

Matematika 1 – 12.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Sústavy lineárnych rovníc

Cramerovo pravidlo pre sústavu LR ($n = 3$)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$



Riešenie:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

- môžeme použiť CP

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Riešenie sústavy zapíšeme v tvare $(x_1, x_2, x_3)^T$

Pr. 1 – 78 / 3: Riešte sústavy LR pomocou Cramerovho pravidla




$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}$$

1. Vypočítame determinant D a overíme, že $D \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & -1 \end{vmatrix} = (-6 + 32 + 12) - (48 + 8 - 6) = 38 - 50 = -12 \neq 0$$

môžeme použiť CP

2. Vypočítame determinanty D_1, D_2, D_3 .


$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = (-24 + 32 + 6) - (24 + 32 - 6) = 14 - 50 = -36$$

$$\begin{array}{rclcl}
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\
 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 2 \\
 4x_1 & + & 8x_2 & - & x_3 & = & 2
 \end{array}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2 + 8 + 16) - (16 + 2 - 8) = 22 - 10 = 12$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = (12 + 64 + 24) - (96 + 16 + 12) = 100 - 124 = -24$$

3. Určíme hodnotu x_1, x_2, x_3 .

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-36}{-12} = 3 \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{12}{-12} = -1 \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-24}{-12} = 2$$

4. Zapišeme výsledek v tvare $(x_1, x_2, x_3)^T$ $(3, -1, 2)^T$

Pr. 2 – 79/ 8: Riešte sústavy LR pomocou Cramerovho pravidla

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -6 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 17 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 5 \end{vmatrix} = (15 + 15 + 4) - (18 + 5 + 10) = 34 - 33 = 1 \neq 0$$

môžeme použiť CP

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -6 & 3 & -1 \\ 17 & -5 & 5 \end{vmatrix} = (135 + 90 + 34) - (153 + 45 + 60) = 259 - 258 = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & -6 & -1 \\ 2 & 17 & 5 \end{vmatrix} = (-30 - 51 - 18) - (-36 - 17 - 45) = -99 + 98 = -1$$

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -6 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 17 \end{array}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 17 \end{vmatrix} = (51 + 45 + 24) - (54 + 30 + 34) = 120 - 118 = 2$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 3 & -6 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{1} = 1 \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{1} = -1 \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{2}{1} = 2$$

$$(1, -1, 2)^T$$

Pr. 3 – 78 / 4: Riešte sústavy LR pomocou Cramerovho pravidla

$$\begin{array}{rclcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array} \quad (2, 1, -1)^T$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (60 + 6 + 16) - (20 + 18 + 16) = 82 - 54 = 28 \neq 0$$

môžeme použiť CP

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (160 + 30 + 24) - (30 + 48 + 80) = 214 - 158 = 56$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (60 + 6 + 32) - (20 + 18 + 32) = 98 - 70 = 28$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = (45 + 24 + 40) - (80 + 45 + 12) = 109 - 137 = -28$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{56}{28} = 2 \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{28}{28} = 1 \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-28}{28} = -1$$

$$(2, 1, -1)^T$$

Pr. 4 : Riešte sústavy LR pomocou Cramerovho pravidla

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 13 \\3x_1 + x_2 - x_3 &= 2\end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (4 - 1 + 9) - (6 + 6 - 1) = 12 - 11 = 1 \neq 0$$

môžeme použiť CP

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 13 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0 - 13 + 6) - (4 + 0 - 13) = -7 + 9 = 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 13 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-26 - 2 + 0) - (-39 + 12 + 0) = -28 + 27 = -1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 13 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 13 \end{vmatrix} = (-8 + 0 + 39) - (0 + 26 + 2) = 31 - 28 = 3$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{1} = 2 \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{1} = -1 \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{3}{1} = 3$$

$$(2, -1, 3)^T$$

Dú: Str. 79 / 7, 9, 10, 12 - 15

Inverzná matica

Inverzná matica A^{-1} k matici A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hľadanie inverznej matice

- a) pomocou **jednotkovej matice** - E
- b) pomocou **adjungovanej matice** - $\text{adj } A$

Transponovaná matica – vo výslednej matici výmena riadkov za stĺpce

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

kde A_{ij} – algebraický doplnok k prvku a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

adjungovaná matica

Pr. 1 – 67 / 2: Nájdite inverznú maticu k matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Vypočítať determinant matice A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2$$

2. Určiť algebraické doplnky A_{ij} k všetkým prvkom a_{ij} matice A (i – riadok, j – stĺpec).

$$A_{11} = (-1)^{1+1} D_{11} = (-1)^2 (-3) = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} D_{12} = (-1)^3 (-4) = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} D_{21} = (-1)^3 (1) = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} D_{22} = (-1)^4 (2) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$$

3. Zápis adjungovanej matice k matici A

$$a_{dj}A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Transponovaná matica – výmena riadkov za stĺpe

$$a_{dj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T$$

4. Zápis inverznej matice k matici A

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T$$

Informácie k 2. zápočtovej písomke z Matematiky 1

utorok 7.1.2025 – opakujúci, KM

9:00 – 11:00 miestnosť P25: prvá skupina podľa rozpisu, ktorý ešte pošlem

11:00 – 13:00 miestnosť P25: druhá skupina podľa rozpisu, ktorý ešte pošlem

streda 8.1. 2025 - denní

8:00 - 9:30 , miestnosť ZP4: študijné skupiny: **E6,11,14** (cvičenie piatok 10:50)

8:00 - 9:30 , miestnosť P25: študijné skupiny: **C1, E10,12** (cvičenie utorok 7:30)

9:30 -11:00 , miestnosť ZP1: študijné skupiny: **A6, 7, 8** (cvičenie utorok 10:50)

9:30 -11:00, miestnosť ZP4: študijné skupiny: **E1, 2, 4** (cvičenie utorok 9:10)

Na 2. zápoč. písomku sa neprihlasuje. **Doniesť dvojhárok s vytlačenou hlavičkou, ISIC.** Písomka za 55 bodov (40 bodov - príklady, 15 bodov - teória), čas: 80 minút

Okruhy:

1. určenie monotónosti funkcie + definičný obor, párnosť, nepárnosť, lokálne extrémny
2. určenie konvexnosti a konkávnosti funkcie + definičný obor, párnosť, nepárnosť, inflexné body
3. operácie z maticami (súčet, rozdiel, súčin)
4. výpočet determinantu matice
5. riešenie SLR pomocou Gauss. eliminačnej metódy
6. riešenie SLR pomocou Cramerovho pravidla

Opravné písomky: denní

oprava prvej zápočtovej písomky: utorok 14.1.2025

oprava druhej zápočtovej písomky utorok 21.1.2025

Na opravné písomky sa treba prihlásiť v MOODLI.

Termín prihlasovania sa v MOODLI na obe: **11.1. - 12.1. 2025.**

Opravné písomky: KM, opakujúci

oprava prvej zápočtovej písomky: pondelok 13.1.2025, miestnosť P25, 9:00, 11:00

oprava druhej zápočtovej písomky: pondelok 20.1.2025, miestnosť P25, 9:00 , 11:00

Info o prihlasovaní pošlem mailom.