KOMPLEXNÉ ČÍSLA

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

Definícia

Množinu

$$C = \{a + b\mathrm{i};\, a, b \in R\},\ \ \mathrm{i}^2 = -1$$

nazývame množinou komplexných čísel.

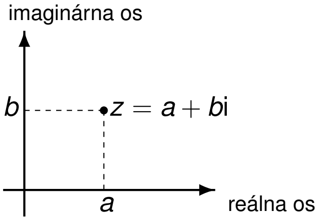
Algebraický tvar komplexného čísla je

$$z = a + b\mathrm{i}$$

číslo a nazývame reálna zložka komplexného čísla $a = Re\, z$
číslo b nazývame imaginárna zložka komplexného čísla $b = Im\, z$

i nazývame imaginárnou jednotkou. Platí:
$\mathrm{i}^2 = -1,\ \mathrm{i}^3 = -i,\ \mathrm{i}^4 = 1,\ \mathrm{i}^5 = i,\ \mathrm{i}^6 = -1,\ \ldots$

Obrazom komplexného čísla $z = a + b\mathrm{i}$ v rovine (Gaussova rovina) je bod $[a, b]$.



Komplexné číslo v tvare

$$\bar{z} = a - b\mathrm{i}$$

nazývame komplexne združeným k číslu $z = a + b\mathrm{i}$

Nech $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ a $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$, potom
súčet (rozdiel) komplexných čísel z_1 a z_2 je komplexné číslo

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1\mathrm{i}) \pm (a_2 + b_2\mathrm{i}) = a_1 \pm a_2 + \mathrm{i}(b_1 \pm b_2)$$

súčin komplexných čísel z_1 a z_2 je komplexné číslo

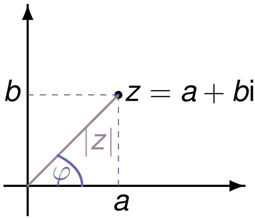
$$z_1.z_2 = (a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i}) = a_1a_2 - b_1b_2 + \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1)$$

podiel komplexných čísel z_1 a z_2 je komplexné číslo

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1\mathrm{i})}{(a_2 + b_2\mathrm{i})}\frac{(a_2 - b_2\mathrm{i})}{(a_2 - b_2\mathrm{i})} = \frac{(a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 - b_2\mathrm{i})}{a_2^2 + b_2^2}$$

Dve komplexné čísla $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ a $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$ sa rovnajú, ak majú rovnakú reálnu aj imaginárnu časť:

$$z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$



Nezáporne reálne číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazývame absolútna hodnota (modul) komplexného čísla . V Gaussovej rovine vyjadruje vzdialenosť polohy komplexného čísla (bodu $[a, b]$) od začiatku súradnicového systému.
Uhol $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ nazývame argument komplexného čísla. Platí

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

Goniometrický tvar komplexného čísla:

$$z = a + bi = |z|\cos\varphi + \mathrm{i}|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

Nech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$, potom

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Nech $n \in N$, potom $n-$ tú mocninu komplexného čísla $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ počítame

MOIVREOVA VETA

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$$

Eulerov vzťah: $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Exponenciálny tvar komplexného čísla:

$$z = |z|e^{\mathrm{i}\varphi}$$

Nech $z_1 = |z_1|e^{\mathrm{i}\varphi_1}$ a $z_2 = |z_2|e^{\mathrm{i}\varphi_2}$, potom

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|e^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$z^n = |z|^n e^{\mathrm{i}n\varphi}$$