DOBRÉ RÁNO :)

2.ZP ⑤⑤⑥ termín $\boxed{8.1 \text{ a } 9.1.\ 2025}$ (rozdelenie (web) KMTI, predmet MAT 1, oznamy + mail od cvičiacich)

↓ teória (od priebehu funkcie po inverznú maticu (11. týždeň), (dnes)

$\boxed{12.}$ týždeň – prednáška (komplexné čísla) → nebude na zápočte.

! pripravujte sa zodpovedne !

! MAT 1 je prerekvizita pre MAT 2 !

DETERMINANTY

Def nech A je štvorcová matica. Číslo priradené (istým spôsobom) matici A nazývame determinant matice A. Označenie: det A, |A|

spôsob výpočtu:

1) nech A je 2. stupňa ($n = 2$): $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

pr. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = \boxed{-2}$

2) nech $n = 3$ (determinant 3. stupňa) SARRUSOVO PRAVIDLO

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \end{matrix} = a_{11}a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}.a_{23} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}.a_{33}$$

príklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \quad 3 \end{matrix} = 1.2.(-2) + 2(-3).1 + 3.1.3 - 3.2.1 - 1.(-3).3 - 2.1.(-2)$$

$$= \cancel{-4} - 6 + 9 - 6 + 9 + \cancel{4} = \boxed{6}$$

Def Subdeterminant (MINOR) D_{ij} vzhľadom na prvok a_{ij} (vynechám i-ty riadok a j-ty stĺpec)

príkl. $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ určme $D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ vynechám 1. riadok a 2. stĺpec

3) výpočet determinanty stupňa $\boxed{n \geq 4}$ robíme rozvojom podľa „vhodného" riadku alebo stĺpca. → ktorý obsahuje čo najviac núl.

a) rozvoj podľa i-teho riadku

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \dots + a_{in}.A_{in}$$

Def A_{ij} … algebraický doplnok k prvku a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$$

príklad: o chvíľu.

najpr. vlastnosti determinantov:

- pojem: regulárna matica, $|A| \neq 0$; singulárna, $|A| = 0$
- $|A^T| = |A|$

príklad: matica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ← transponovaná matica

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = -2$ (determinant)

$|A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2$

- ak sa v determinante nachádza nulový riadok alebo stĺpec, potom $\det A = 0$
- Vplyv ekvivalentných úprav na hodnotu determinantu

zámena poradia riadkov alebo stĺpcov sa mení znamienko determinantu!

príklad

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = \boxed{-2}$

$\updownarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 1.4 = \boxed{2}$

ak vynásobíme riadok alebo stĺpec nenulovou konštantou (napr. k), hodnota determinantu sa zmení k-krát.

pr. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 2.1 = 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.2 = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 2.2 = 6 - 4 = 2$

ak pripočítame k riadku alebo stĺpcu lineárnu kombináciu (resp. násobok) iných riadkov alebo stĺpcov, tak hodnota determinantu sa nemení!

príklad:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 2.(-1) = 5$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} .(-2) \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 0.(-1) = 5$

príklad vypočítajme determinant 4. stupňa (rozvojom)

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{rozvoj podľa 1. riadku}}{=} \overset{a_{11}}{0}.(-1)^{1+1}.D_{11} + \overset{a_{12}}{1}.(-1)^{1+2}D_{12} + \overset{a_{13}}{1}.(-1)^{1+3}.D_{13} + \overset{a_{14}}{1}.(-1)^{1+4}.D_{14} =$$

$$= -1.\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{D_{12}} + 1.\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{D_{13}} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

O.K., ale viem si výpočet zjednodušiť. „vyrobím" viac núl v pôvodnom determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ .(-1) \quad .(-4) \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{rozvoj podľa 1. stĺpca}}{=} \overset{a_{11}}{0}.(-1)^{1+1}.D_{11} + \overset{a_{21}}{1}.(-1)^{2+1}.D_{21} + 0\dots + 0\dots =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -6;$$

máme vypočítaný

použitie determinantov pri riešení sústav lineárnych rovníc:

príklad

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \quad |.\,a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \quad |.(-a_{12}) \end{aligned}$$

CRAMEROVO PRAVIDLO

$$a_{11}.a_{22}x_1 - a_{21}.a_{12}.x_1 + \cancel{a_{12}.a_{22}.x_2} - \cancel{a_{12}a_{22}x_2} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$x_1(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{D_1}{D} \quad ; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

ak označím $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}.a_{12}$ ak $D \neq 0$

$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$

kde $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

CRAMEROVO PRAVIDLO – riešenie n rovníc o n neznámych.

ak $D \neq 0$, potom platí (sústava má práve 1 riešenie)

! $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

potom $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $x_2 = \frac{D_2}{D}$, $x_3 = \frac{D_3}{D}$

príklad

$$\begin{aligned} 1.x_1 + 1.x_2 - 1x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

riešte sústavu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 \quad 1 \quad -1 \\ 3 \quad 2 \quad -2 \end{matrix} = 1.2.2 + 3.(-3).(-1) + 4.1(-2) - 4.2(-1) - 1.(-3).(-2) - 3.1.2 =$$

$$= 4 + 9 - \cancel{8} + \cancel{8} - 6 - 6 = 1 \neq 0 !$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 2 \quad 1 \quad -1 \\ 5 \quad 2 \quad -2 \end{matrix} = 2.2.2 + 5.(-3).(-1) + (-1).1.(-2) - (-1).2(-1) - 2.(-3)(-2) - 5.1.2 =$$

$$= 8 + 15 + \cancel{2} - \cancel{2} - 12 - 10 = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 \quad 2 \quad -1 \\ 3 \quad 5 \quad -2 \end{matrix} = 1.5.2 + 3.(-1).(-1) + 4.2.(-2) - 4.5(-1) - 1.(-1).(-2) - 3.2.2 =$$

$$= 10 + 3 - 16 + 20 - 2 - 12 = 3$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

riešenie: $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{1} = 1$

$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{1} = 3$

$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{2}{1} = 2$

$(x_1, x_2, x_3)^T = (1, 3, 2)^T$

$D \neq 0$ zabezpečí, že sústava má práve 1 riešenie.

INVERZNÁ MATICA

(čo to je? ako sa hľadá? jej využitie pri riešení sústav lineárnych rovníc)

Def nech $|A| \neq 0$, potom existuje A^{-1}, taká, že $A.A^{-1} = A^{-1}.A = E$ (jednotková matica.)

spôsob hľadania A^{-1}:

① eliminačná metóda

$$\boxed{(A|E) \sim (E|A^{-1})}$$

príklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ nájdime k danej matici inverznú ($|A| \neq 0$)

máme vypočítané $|A| = 1$ existuje A^{-1}

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{matrix}}_{A} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \right.\right) \begin{matrix} |.(-3)\,|(-4) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 6 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{matrix} \right.\right) \begin{matrix} |.(-1)\,|.(-7) \\ \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -17 & +7 & -1 \end{matrix} \right.\right) |.(-1) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} -16 & 7 & -1 \\ -14 & 6 & -1 \\ -17 & 7 & -1 \end{matrix} \right.\right) |.(-1)$$

$$\sim \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \left| \underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 & 0 \\ -14 & 6 & -1 \\ -17 & 7 & -1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \right.\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -14 & 6 & -1 \\ -17 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

skúška správnosti? D.Ú. $A.A^{-1} = E$