pokračovanie: inverzná matica

k matici A ($|A| \neq 0$) regulárna existuje A^{-1}, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

algebraický doplnok k prvku a_{ij}

$$\boxed{A_{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

2. spôsob výpočtu A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \boxed{A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$\operatorname{adj} A$ – adjungovaná matica k A

príklad.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

úloha: nájdime A^{-1} (ak existuje)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{matrix} = \cancel{40} + \underbrace{60}_{-5} + 52 - \underbrace{65} - \cancel{40} - 48 = \boxed{-1} \neq 0 \text{ existuje } A^{-1}$$

počítame algebraické doplnky:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 40 = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = -(48 - 52) = 4$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 13 & 10 \end{vmatrix} = 60 - 65 = -5$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 10) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 13 = -5$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 13 & 10 \end{vmatrix} = -(10 - 13) = 3$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 6) = 2$

$A_{33} = -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{-1}}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

sk. správnosti: $A \cdot A^{-1} = E$ (D.Ú.)

využitie inverznej matice pri riešení sústav lineárnych rovníc:

$$A\vec{x} = \vec{b} \;\Big|\cdot A^{-1} \quad (\text{nech } A \text{ je regulárna, } |A| \neq 0)!$$

sústava má práve 1 riešenie

$$\boxed{A^{-1} \cdot A}\,\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

riešenie vyjadrené pomocou A^{-1}

príklad:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 13x_1 + 10x_2 + 8x_3 &= 1 \end{aligned}$$

← sústava v maticovom tvare

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$|A| = -1 \neq 0$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ } viď predch. príklad.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2 + 1 \\ 0 + 5 - 2 \\ 0 - 3 + 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}}$$

$3 \times 3 = 3 \times 1$

$$\boxed{\vec{x} = (-1, 3, -2)^T}$$

riešenie