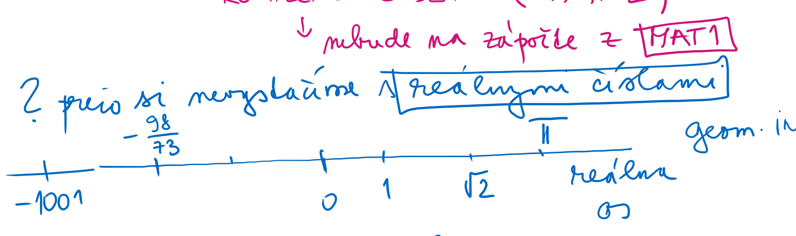
KOMPLEXNÉ ČÍSLA (MAT 2)

↓ nebude na zápočte z $\boxed{\text{MAT1}}$

? prečo si nevystačíme s $\boxed{\text{reálnymi číslami}}$



vezmime si rovnicu: $x^2+1=0$

$x^2=-1$ → v kompl. číslach máme riešenie $\pm i$

↳ v reálnych číslach nemá rovnica riešenie.

preto sa zavedie „$\boxed{\text{číslo}}$" i; $i^2=-1$

↓ imaginárna jednotka.

Def. komplexné čísla (KČ)

$$\mathbb{C}=\{a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}\};\ i^2=-1$$

$z=a+bi$ ... nazývame algebraický tvar KČ

↳ a – reálna zložka (Rez)

↳ b – imaginárna zložka (Imz)

$i^2=-1$

$i^3=i.i^2=i.(-1)=-i$

$i^4=i^2.i^2=1$

$i^5=i.i^4=i$

$i^6=i^5.i=i.i=-1$

$i^7=i^6.i=-1.i=-i$

Operácie s KČ v algebraickom tvare: $(z=a+bi)$

1. analogicky

príklad: $z_1=1+2i$ $\quad z_2=-3+4i$

$z_1+z_2=1+2i+(-3+4i)=-2+6i$

$z_1-z_2=1+2i-(-3+4i)=4-2i$

$z_1.z_2=(1+2i).(-3+4i)=-3+4i-6i+8i^2=-11-2i$

$i^2 \to -8$

dvojčlen . dvojčlen

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2i}{-3+4i}$

pojem: $\bar{z}=a-bi$ nazývame komplexne združené číslo k číslu $z=a+bi$

pr. $z=1+2i$, $\quad z=-3-3i$

$\bar{z}=1-2i$ $\quad \bar{z}=-3+3i$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2i}{-3+4i}\cdot\boxed{\frac{-3-4i}{-3-4i}}=\frac{(1+2i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}=\frac{-3-4i-6i+8}{9+16}=\frac{5-10i}{25}=\boxed{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i}$$

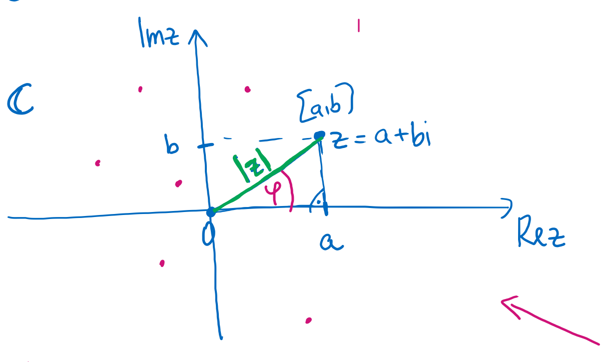
$\boxed{\frac{-3-4i}{-3-4i}}=1$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ $\quad \boxed{9+16}$

lebo $\boxed{i^2=-1}$

vlastnosť i

Geometrická interpretácia KČ



$\boxed{z=a+bi}$ predstavuje bod $[a,b]$ roviny

↓ Rez $\quad$ ↓ Imz

Rovina komplexných čísel sa nazýva Gaussova rovina

pojmy:

MODUL (absolútna hodnota) komplexného čísla $z=a+bi$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

ARGUMENT komplexného čísla $z=a+bi$

$\varphi\in\langle 0,2\pi)$

$\sin\varphi=\frac{b}{|z|}$, $\cos\varphi=\frac{a}{|z|}$

$$z=a+bi=\underbrace{|z|.\cos\varphi}_{a}+i\underbrace{|z|.\sin\varphi}_{b}=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$\boxed{z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$ goniometrický tvar KČ

$\boxed{z=|z|.e^{i\varphi}}$ exponenciálny tvar KČ

operácie s KČ v goniom. a exp. tvare ↓ prezentácia.

n-tá mocnina komplexného čísla. $n\in\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{MOIVREOVA VETA}}$

nech $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

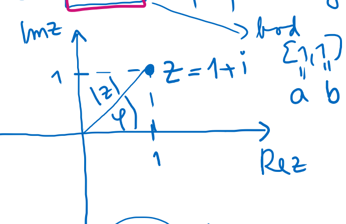
potom $\boxed{z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}$

príklady: napíšme číslo v goniom. tvare:

① $z=\boxed{1+i}$, potrebujem $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$

$\varphi=\frac{\pi}{4}$ (bez počítania)

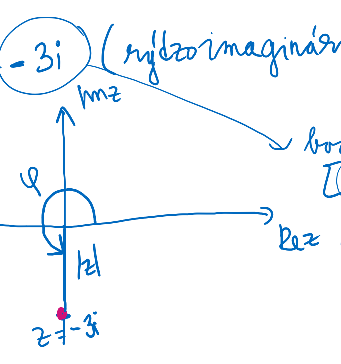
→ bod $[1,1]$, $a=1$, $b=1$



$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\boxed{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ goniom. tvar.

② $z=-3i$ (rýdzoimaginárne KČ)

→ bod $[0,-3]$, $a=0$, $b=-3$

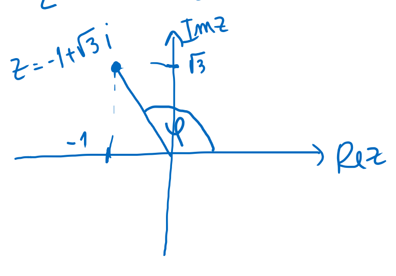


$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$

$\varphi=\frac{3\pi}{2}$

$-3i=3\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

③ $z=-1+\sqrt{3}i$



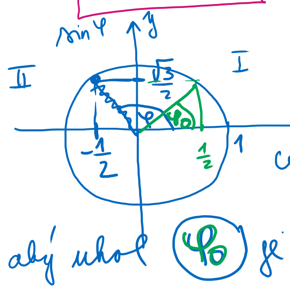
bod $[-1,\sqrt{3}]$, $a=-1$, $b=\sqrt{3}$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\varphi=$

vieme $\sin\varphi=\frac{b}{|z|}$ $\quad \cos\varphi=\frac{a}{|z|}$

$\left.\begin{array}{l}(+)\ \boxed{\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}}\\(-)\ \boxed{\cos\varphi=\frac{-1}{2}}\end{array}\right\}\ \varphi=?$



jednotková kružnica

? pre aký uhol φ_0 je $\left.\boxed{\begin{array}{l}\sin\varphi_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\\\cos\varphi_0=\frac{1}{2}\end{array}}\right\}$ to vieme $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$

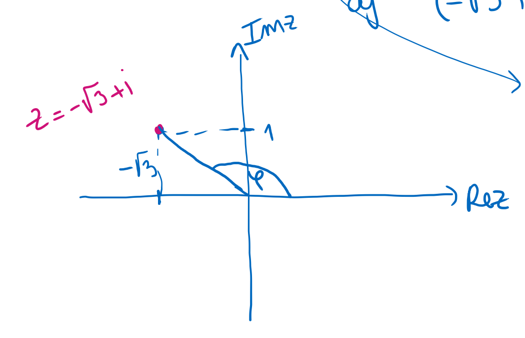
$-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$\boxed{\varphi=\frac{2}{3}\pi}$

④ $z=\boxed{-\sqrt{3}+i}$ v $\boxed{\text{gon. tvare}}$

aj $(-\sqrt{3}+i)^{12}$

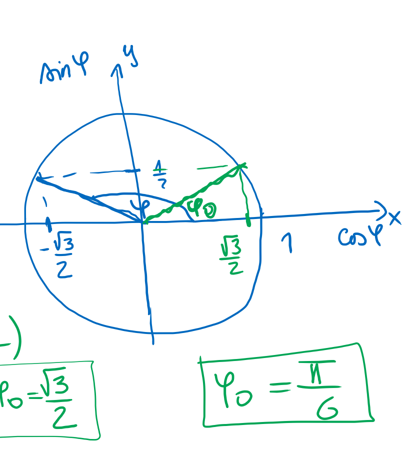
→ bod $[-\sqrt{3},1]$, $a=-\sqrt{3}$, $b=1$



$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

? φ ? $\quad (+)\ \sin\varphi=\frac{b}{|z|}=\frac{1}{2}$

$(-)\ \cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$



hľadám zákl. uhol (1. kvadrant)

$(+)\ \boxed{\sin\varphi_0=\frac{1}{2}}$, $\boxed{\cos\varphi_0=\frac{\sqrt{3}}{2}}\ (+)$ $\qquad \boxed{\varphi_0=\frac{\pi}{6}}$

$\varphi=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$

gon. tvar: $-\sqrt{3}+i=\boxed{2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)}$

$$\boxed{(-\sqrt{3}+i)^{12}}=2^{12}\left(\cos\left(12.\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(12.\frac{5}{6}\pi\right)\right)=$$

$\boxed{z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}$

podľa MOIVREOVEJ VETY

$$=2^{12}\left(\cos 10\pi+i\sin 10\pi\right)=2^{12}\left(\cos 0+i\sin 0\right)=2^{12}(1+i.0)=\boxed{2^{12}}.$$

↓ táto téma bude v rámci MAT 2 (aj na cvičení).