Matematika 2 – 1.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Cvičiaca: RNDr. Z. Gibová, PhD. , (zuzana.gibova@tuke.sk)

Boženy Nemcovej 32, 6. poschodie, č.k.: 614

konzultácie: utorok 13:30 - 14:30, štvrtok: 13:45 - 14:45, v iný deň dohodou

cvičenia (povinné), max. 3 ospravedlnené neúčasti (stačí ospravedlniť mailom, napísať aj študijnú skupinu), prednášky (link na stránke KMTI – Výučba – aktuálne predmety – Matematika II)

Prenášajúci: doc. RNDr. B. Baculíková, PhD., prof. RNDr. J. Džurina, CSc.

Predmet končí KZ: 2 zápočtové písomky – získať v súčte aspoň 51 bodov

1ZP – 8. týždeň za 50 b (35 b príklady + 15 b teória),

2ZP – 1. týždeň skúškového obdobia za 50 b (35 b príklady + 15 b teória),

OZP – v skúškovom období

Možnosť získať bonusové body za aktivitu na cvičení **max 5 bodov**.

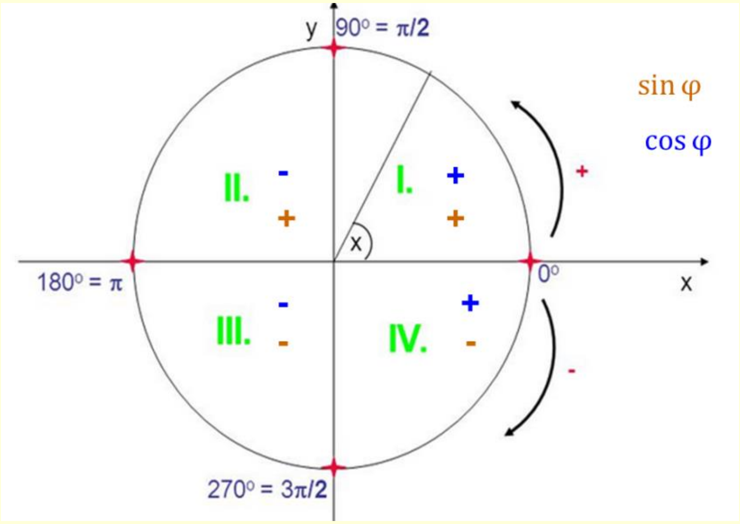
Všetky materiály z prednášok (ppt), ale aj dú z cvičenia na stránke KMTI v časti Prílohy.

Literatúra k cvičeniam

Baculíková B., Grinčová A.: MATEMATIKA II v príkladoch (elektronická zbierka)

Matematika II – **prerekvizita** predmetov **Matematika III, Numerické metódy**

Trochu trigoniometrie



I. Kvadrant: $\varphi_0 \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

II. Kvadrant: $\varphi = \pi - \varphi_0$

III. Kvadrant: $\varphi = \pi + \varphi_0$

IV. Kvadrant: $\varphi = 2\pi - \varphi_0$

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

$\sin(\pi + \varphi) = -\sin\varphi$ $\cos(\pi + \varphi) = -\cos\varphi$

$\sin(2\pi - \varphi) = -\sin\varphi$ $\cos(2\pi - \varphi) = \cos\varphi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin(x)	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	0	-1	0
cos(x)	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	-1	0	1

$\pi = 180^o$

$30^o = \frac{180^o}{6} = \frac{\pi}{6}$

$\sin(\varphi + 2k\pi) = \sin\varphi$ $\cos(\varphi + 2k\pi) = \cos\varphi$

Pr. 1: Sú dané komplexné čísla $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$. Určte

a) $z_1 + z_2$,

b) $z_1 - z_2$,

c) $z_1 . z_2$,

d) $\frac{z_1}{z_2}$,

e) $|z_1|$,

f) ${z_2}^2 . i$

Pr. 2 – 54 / 3: Vypočítajte

$(2+3i)(4+i)$ $\qquad 5+14i$

$$(2+3i)(4+i) = 2.4 + 2.i + 3i.4 + \underbrace{3i.i} = 8 + 14i - 3 = 5 + 14i$$

$$\boxed{3i.i = 3i^2 = 3.(-1)}$$

Pr. 3: Je dané komplexné číslo $z = \frac{1-2i}{3+4i}$. Určte $|z|$.

$$\frac{1-2i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-6i-4i+8i^2}{9-16i^2} = \frac{-5-10i}{9+16} = \frac{5(-1-2i)}{25} = \frac{-1-2i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

úprava pomocou komplexne združeného čísla 3 - 4i,
násobíme čitateľa aj menovateľa

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = -\frac{1}{5} \quad b = -\frac{2}{5}$$

$$\left|\frac{1-2i}{3+4i}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sqrt{\frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sqrt{5}.\sqrt{5} = 5$$

Pr. 4: Komplexné číslo $z = 1 + \sqrt{3}i$ zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

Postup pri určení goniometrického tvaru komplexného čísla:

1. Určíme reálnu a imaginárnu zložku a, b a pomocou nich modul $|z|$.
2. Vypočítame cos φ a sin φ.
3. Do Gaussovej roviny zakreslíme zložky a, b kom. čísla a určíme kvadrant argumentu φ.
4. Určíme hodnotu φ_0 z hodnoty cos φ pre prvý kvadrant a vypočítame φ.
5. Zapíšeme kom. číslo v goniometrickom tvare a exponenciálnom tvare.

Pr. 5 – 55 / 15:

Komplexné číslo $z = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$ zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

Pr. 6 – 55 / 18:

Komplexné číslo $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

1. Určíme reálnu a imaginárnu zložku a, b a pomocou nich modul $|z|$.

$$a = \frac{3}{2} \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

2. Vypočítame cos φ a sin φ.

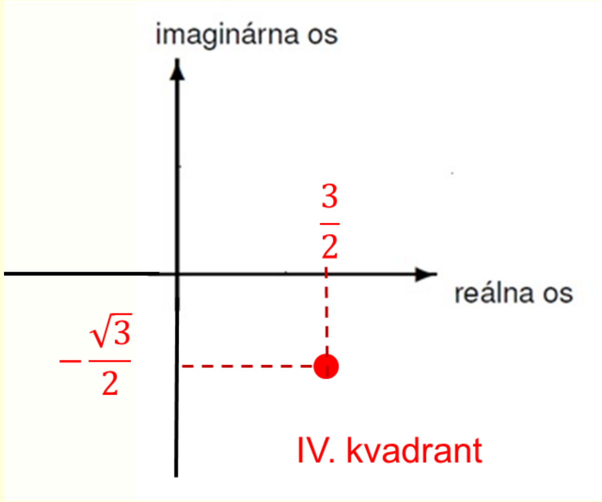
$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2.3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$$

3. Do Gaussovej roviny zakreslíme zložky a, b kom. čísla a určíme kvadrant argumentu φ.



IV. kvadrant:

$$\varphi = 2\pi - \varphi_0$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

4. Určíme hodnotu φ_0 z hodnoty cos φ pre prvý kvadrant a vypočítame φ.

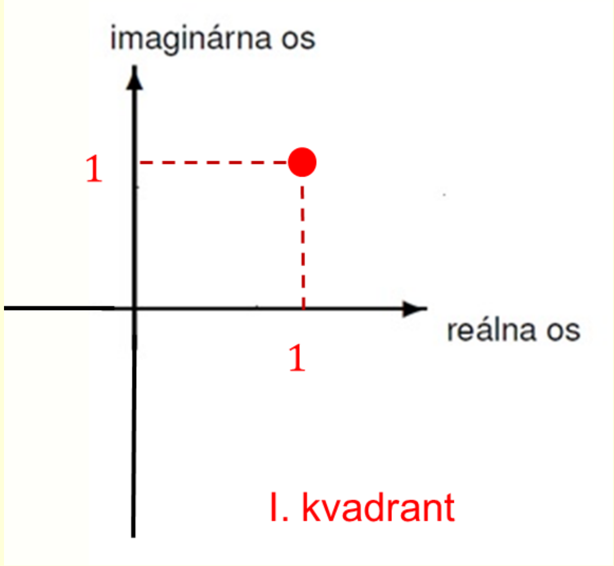
5. Zapíšeme kom. číslo v goniometrickom tvare a exponenciálnom tvare.

$$\boldsymbol{z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{11\pi}{6}}}$$

Pr. 7 – 55 / 13:

Komplexné číslo $z = 1 + i$ zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = 1 \quad b = 1$$



$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \wedge \ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I. kvadrant:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\boldsymbol{z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

Kontrolka: Vyberte správnu odpoveď.

1. Ak je dané $a = 1, b = \sqrt{3}$. Potom pre komplexne číslo z bude

   a) $\sin\varphi = \frac{1}{2}$,

   b) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

   c) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

   d) $\cos\varphi = \frac{1}{2}$.

2. Ak je dané $\varphi = \frac{\pi}{8}, |z| = 3$. Potom komplexne číslo z v exponenciálnom tvare je dané

   a) $z = 3. e^{\frac{\pi}{8}i}$

   b) $z = \frac{\pi}{8}. e^{3i}$,

   c) $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

Pr. 8 – 55 / 29:

Určte z^5, ak $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Postup pri určení umocnení komplexného čísla:

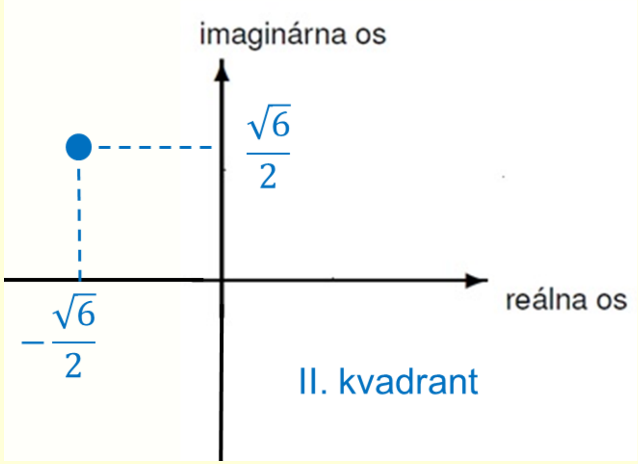
1. Zapíšeme kom. číslo v goniometrickom tvare.
2. Umocníme pomocou Moivreovej vety.
3. Do súradnej osi zakreslíme argument φ a určíme jeho kvadrant.
4. Určíme hodnotu φ_0 pomocou φ (vyjadríme ho pre prvý kvadrant, pomocou znamienok zohľadníme daný kvadrant φ, v prípade potreby využijeme aj periodickosť sínusu a kosínusu).
5. Zapíšeme kom. číslo v algebraickom tvare.

Pr. 9 – 55 / 31**:**

Určte z^6, ak $\mathrm{z} = (-2 - 2\sqrt{3}i)$.

Pr. 10 – 55 / 25: Určte z^4, ak $z = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$.

1. Zapíšeme kom. číslo v goniometrickom tvare.



$$a = -\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad b = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} \qquad |z| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \wedge\ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

II. kvadrant: $\varphi = \pi - \varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$$z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

2. Umocníme pomocou Moivreovej vety. $z^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4 \left(\cos 4.\frac{3\pi}{4} + i\sin 4.\frac{3\pi}{4}\right)$

3. Využijeme periodickosť sínusu a kosínusu pri úprave φ.

$$\cos 3\pi = \cos\,(\pi + 2\pi) = \cos\pi = -1 \qquad \sin 3\pi = \sin\,(\pi + 2\pi) = \sin\pi = 0$$

$$z^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4 \left(\cos 4.\frac{3\pi}{4} + i\sin 4.\frac{3\pi}{4}\right) = 9\,(\cos 3\pi + i\sin\,3\pi) =$$

4. Zapíšeme kom. číslo v algebraickom tvare.

$$z^4 = 9(-1 + 0) = -9$$

Dú: kap. Matematika I, str. 52 / 4, 6, 7, 8, 14, 16, 17, 18, 24, 26, 27, 28