

Matematika 2 – 1.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Cvičiaca: RNDr. Z. Gibová, PhD. , (zuzana.gibova@tuke.sk)

Boženy Nemcovej 32, 6. poschodie, č.k.: 614

konzultácie: utorok 13:30 - 14:30, štvrtok: 13:45 - 14:45, v iný deň dohodou

cvičenia (povinné), max. 3 ospravedlnené neúčasti (**stačí ospravedlniť mailom, napísať aj študijnú skupinu**), prednášky (link na stránke KMTI – Výučba – aktuálne predmety – Matematika II)

Prenášajúci: doc. RNDr. B. Baculíková, PhD., prof. RNDr. J. Džurina, CSc.

Predmet končí KZ: 2 zápočtové písomky – získať v súčte **aspoň 51 bodov**

1ZP – 8. týždeň za 50 b (35 b príklady + 15 b teória),

2ZP – 1. týždeň skúškového obdobia za 50 b (35 b príklady + 15 b teória),

OZP – v skúškovom období

Možnosť získať bonusové body za aktivitu na cvičení max 5 bodov.

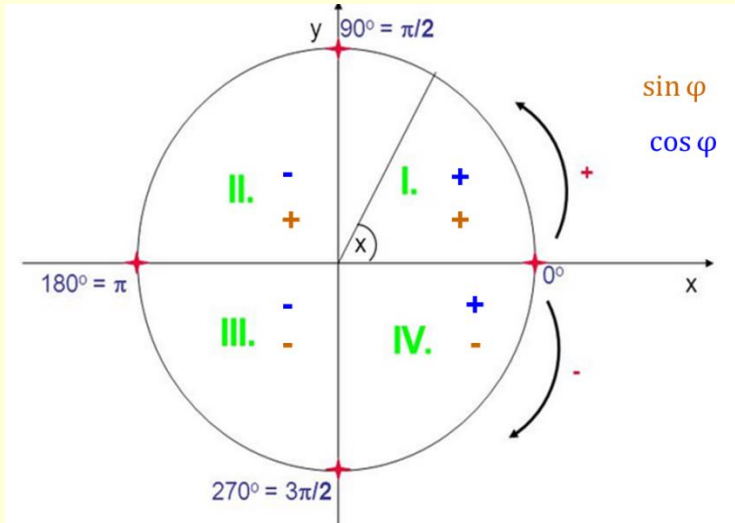
Všetky materiály z prednášok (ppt), ale aj dú z cvičenia na stránke KMTI v časti Prílohy.

Literatúra k cvičeniam

Baculíková B., Grinčová A.: MATEMATIKA II v príkladoch (elektronická zbierka)

Matematika II – prerekvizita predmetov **Matematika III, Numerické metódy**

Trochu trigonometrie



I. Kvadrant: $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

II. Kvadrant: $\varphi = \pi - \varphi_0$

III. Kvadrant: $\varphi = \pi + \varphi_0$

IV. Kvadrant: $\varphi = 2\pi - \varphi_0$

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi \quad \cos(-\varphi) = \cos \varphi$$

$$\sin(\pi + \varphi) = -\sin \varphi \quad \cos(\pi + \varphi) = -\cos \varphi$$

$$\sin(2\pi - \varphi) = -\sin \varphi \quad \cos(2\pi - \varphi) = \cos \varphi$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin(x)	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	0	-1	0
cos(x)	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	-1	0	1

$$\pi = 180^\circ$$

$$30^\circ = \frac{180^\circ}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin(\varphi + 2k\pi) = \sin \varphi \quad \cos(\varphi + 2k\pi) = \cos \varphi$$

Pr. 1: Sú dané komplexné čísla $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$. Určte

a) $z_1 + z_2$,

b) $z_1 - z_2$,

c) $z_1 \cdot z_2$,

d) $\frac{z_1}{z_2}$,

e) $|z_1|$,

f) $z_2^2 \cdot i$

Pr. 2 – 54 / 3: Vypočítajte

$$(2 + 3i)(4 + i)$$

$$5 + 14i$$

$$(2 + 3i)(4 + i) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot i + 3i \cdot 4 + \underbrace{3i \cdot i}_{\downarrow} = 8 + 14i - 3 = 5 + 14i$$

$$3i \cdot i = 3i^2 = 3 \cdot (-1)$$

Pr. 3: Je dané komplexné číslo $z = \frac{1-2i}{3+4i}$. Určte $|z|$.

$$\frac{1-2i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-6i-4i+8i^2}{9-16i^2} = \frac{-5-10i}{9+16} = \frac{5(-1-2i)}{25} = \frac{-1-2i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

úprava pomocou komplexne združeného čísla $3 - 4i$,
násobíme ním čitateľa aj menovateľa

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = -\frac{1}{5} \quad b = -\frac{2}{5}$$

$$\left| \frac{1-2i}{3+4i} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sqrt{\frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$$

Pr. 4: Komplexné číslo $z = 1 + \sqrt{3}i$ zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

Pr. 5 – 55 / 15:

Komplexné číslo $z = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$ zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

Pr. 6 – 55 / 18:

Komplexné číslo $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

Postup pri určení goniometrického tvaru komplexného čísla:

1. Určíme reálnu a imaginárnu zložku kom. čísla a , b a pomocou nich modul $|z|$.

$$a = \frac{3}{2} \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

2. Vypočítame $\cos \varphi$ a $\sin \varphi$.

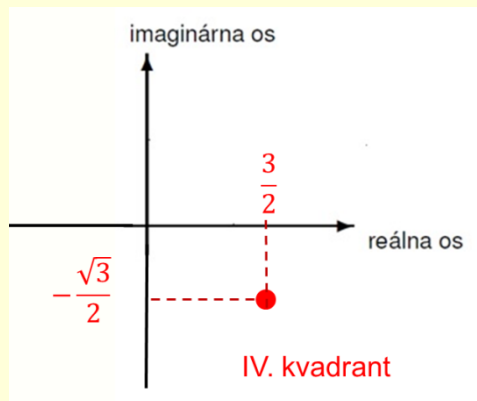
$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

Pr. 6 – 55 / 18:

3. Do Gaussovej roviny zakreslíme zložky a, b kom. čísla a určíme kvadrant argumentu φ .



4. Určíme hodnotu φ_0 (pre prvý kvadrant zo zápisu $\cos \varphi$, $\sin \varphi$) a pomocou neho vyjadríme φ pre daný kvadrant.

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ (z tabuľky)}$$

IV. kvadrant:

$$\varphi = 2\pi - \varphi_0 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

5. Zapíšeme kom. číslo v goniometrickom tvare.

$$z = \sqrt{3} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt{3} e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

6. Zapíšeme kom. číslo v exponenciálnom tvare.

$$z = \sqrt{3} e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

Pr. 7 – 55 / 13:

Komplexné číslo $z = 1 + i$ zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = 1 \quad b = 1$$

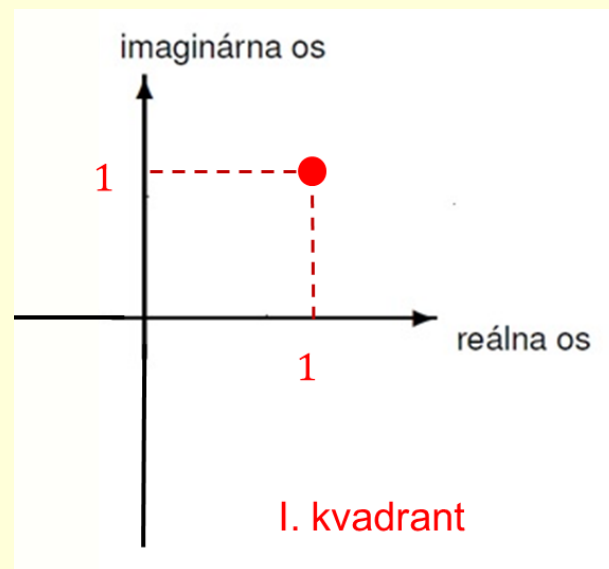
$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I. kvadrant:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$



Dú: kap. Matematika I, str. 52 / 4, 6, 7, 8, 14, 16, 17, 18