Matematika 2 – 2.cvičenie

opakujúci

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Polynómy

Operácie s polynómami

Pr. 1 - 7 / 3: Vypočítajte $(4x^4+3x^3-2x^2+x):(x^2+x-3)$

$$(4x^4+3x^3-2x^2+x):(x^2+x-3) = 4x^2 - x + 11$$

$$\underline{-(4x^4+4x^3-12x^2)}$$

$$0 \quad -x^3 \quad +10x^2+x$$

$$\underline{-(\ -x^3 \ - \ x^2+3x)}$$

$$0 \ +11x^2-2x$$

$$\underline{-(\ 11x^2+11x-33)}$$

$$0-13x^1+33$$

zvyšok po delení

stupeň polynómu n = 3 > 2 stupeň polynómu, ktorým delíme ⇒ pokračujeme v delení

stupeň polynómu n = 2 = 2 stupeň polynómu, ktorým delíme ⇒ pokračujeme v delení

stupeň polynómu n = 1 < 2 stupeň polynómu, ktorým delíme ⇒ koniec delenia

Zápis výsledku:

I. $4x^2-x+11$ a zvyšok $-13x+33$

II: $4x^2-x+11+\frac{-13x+33}{x^2+x-3}$

Pr. 2 - 7 / 1: Vypočítajte $(x^3 + 2x^2 - 2x + 1) : (x^2 - 1)$

Pr. 3 - 7 / 5: Vypočítajte $(x^4+4x^3+x^2+30x+14):(x^3+4x^2-x-4)$

$$(x^4+4x^3+x^2+30x+14):(x^3+4x^2-x-4)=x$$
$$\frac{-(x^4+4x^3-x^2-4x)}{\quad 0 \quad +0 \quad \underbrace{+2x^2+34x+14}_{\text{zvyšok po delení}}}$$

stupeň polynómu n = 2 < 3 stupeň polynómu, ktorým delíme $\Rightarrow$ koniec delenia

Zápis výsledku:

I. x a zvyšok $2x^2+34x+14$

II: $x+\frac{2x^2+34x+14}{x^3+4x^2-x-4}$

Pr. 4 - 7 / 7: Vypočítajte $(6x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 17x + 4) : (x^3 - 2x^2 - x + 2)$

$$(6x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 17x + 4) : (x^3 - 2x^2 - x + 2) = 6x$$
$$\underline{-(6x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 12x)}$$
$$0 \quad + \quad 0 \quad \underbrace{- 5x^2 + 5x + 4}$$

zvyšok po delení

stupeň polynómu n = 2 < 3 stupeň polynómu, ktorým delíme ⇒ koniec delenia

<u>Zápis výsledku:</u>

I. $6x +$ a zvyšok $-5x^2 + 5x + 4$

II: $x + \frac{-5x^2+5x+4}{x^3-2x^2-x+2}$

Pr. 5 - 7 / 15: Vypočítajte $(x^5 - 6x^4 + 5x^3 + 26x^2 - 65x + 30) : (x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8)$

$$(x^5 - 6x^4 + 5x^3 + 26x^2 - 65x + 30) : (x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8) = x - 3$$

$$\underline{-(x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 8x)}$$

$$0 \quad - 3x^4 + 7x^3 + 14x^2 - 57x + 30$$

stupeň polynómu n = 4 > 3 stupeň polynómu, ktorým delíme ⇒ pokračujeme v delení

$$\underline{-(-3x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 36x + 24)}$$

$$-2x^3 + 8x^2 - 21x + 6$$

zvyšok po delení

stupeň polynómu n = 3 < 4 stupeň polynómu, ktorým delíme ⇒ koniec delenia

Zápis výsledku:

I. $x - 3$ a zvyšok $-2x^3 + 8x^2 - 21x + 6$

II: $x - 3 + \frac{-2x^3+8x^2-21x+6}{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}$

d) Kanonický rozklad polynómov – na súčin koreňových činiteľov

$$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_sx+q_s)$$

α je koreň $\rightarrow (x-\alpha)$ $\quad (x-\alpha)^1 \rightarrow \alpha$ je jednoduchý koreň (1- násobný)

$-\alpha$ je koreň $\rightarrow \big(x-(-\alpha)\big) = (x+\alpha)$ $\quad (x-\alpha)^n \rightarrow \alpha$ je n - násobný koreň

Napr. $P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$ má stupeň n = 4

a) Ak sú korene $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ jednoduché → rozklad $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$

$$P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = (x-\alpha_1)^1.(x-\alpha_2)^1(x-\alpha_3)^1(x-\alpha_4)^1 \text{ , } 4 = 1+1+1+1$$

b) Ak je α_1 trojnásobný koreň, α_2 jednoduchý → rozklad $(x-\alpha_1)^3(x-\alpha_2)$

$$P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = (x-\alpha_1)^3.(x-\alpha_2)^1, \; 4 = 3+1$$

c) Ak je α_1, α_2 jednoduché korene a ďalej už nie je možné rozložiť polynóm v R
→ rozklad $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x^2+px+q)$

$$P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = (x-\alpha_1)^1.(x-\alpha_2)^1(x^2+px+q), \; 4 = 1+1+2$$

I: použitím vzorcov

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Pr. 6 - 9 / 34: urobte kanonický rozklad polynómu v **R**

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Pr. 7 - 9 / 35: urobte kanonický rozklad polynómu v **R** x^3+3x^2+3x+1

$$x^3+3x^2+3x+1 \quad = (x+1)^3$$

koreň polynómu $\alpha = -1$, je trojnásobný

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3$$

$$x^3 = a^3 \rightarrow x = a$$

$$1 = b^3 \rightarrow 1 = b$$

Pr. 8 – 9 / 48: urobte kanonický rozklad polynómu v **R**

$$x^4 - 18x^2 + 81$$

Pr. 9 – 9 / 47: urobte kanonický rozklad polynómu v **R**

$x^4 - 8x^2 + 16$

$$x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2 = (x^2 - 2^2)^2 = (x-2)^2(x+2)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$x^4 = a^2 \rightarrow x^2 = a$$

$$16 = b^2 \rightarrow b = \sqrt{16} = 4$$

polynóm má dva dvojnásobné korene $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = 2$

II: postupným vyberaním spoločných výrazov pred zátvorku

Pr.10 - 8 / 30: urobte kanonický rozklad polynómu v **R**

$$x^3 - x^2 + 4x - 4$$

III: postupným vyberaním spoločných výrazov pred zátvorku a použitím vzorcov

Pr. 11 – 8 / 19: urobte kanonický rozklad polynómu v **R** $x^3 - 2x^2 - x + 2$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

polynóm má tri jednoduché korene $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2$

IV. Hornerova schéma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

- určime **možné korene** ako podiel deliteľov absolútneho člena a_0 a koeficientu pri najvyššej mocnine a_n

$$\frac{\mathbf{D}(\boldsymbol{a_0})}{\mathbf{D}(\boldsymbol{a_n})} = \{\pm\boldsymbol{\alpha_1}, \pm\boldsymbol{\alpha_2}, \ldots . \pm\boldsymbol{\alpha_n}\}$$

- ak súčet koeficientov polynómu $(\boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{a_{n-1}} + \ldots + \boldsymbol{a_0})$ je rovný nule, potom jedným z koreňov je číslo 1
- ak sú koeficienty polynómu len **kladné čísla**, potom korene polynómu budú len záporné čísla

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_0
α_1		$\alpha_1 . a_n$ +	$\alpha_1(\alpha_1 . a_n + a_{n-1})$ +		+	
.	a_n	$\alpha_1 . a_n + a_{n-1}$				**0**

α_1 **je koreň, ak vyjde 0**

- začať dosadzovať od najmenšieho celého koreňa

Pr.12 – 8 / 22: urobte kanonický rozklad polynómu v **R** $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

Pr.13 – 8 / 25: urobte kanonický rozklad polynómu v **R** $3x^3 + 11x^2 + 12x + 4$

Pr.14 – 8 / 23: Overte, či 1 a - 2 sú korene polynómu, urobte jeho kanonický rozklad.

$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

možné korene $\frac{\mathbf{D(2)}}{\mathbf{D(3)}} = \frac{\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}\}}{\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{3}\}} = \left\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \pm\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right\}$

$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$ = 3 + 2 - 7 + 2 = 0, 1 je určite koreň

	3	**2**	**-7**	**2**	
1		3	5	-2	
	3	5	-2	**0**	je koreň
-2		- 6	2		
	3	-1	**0**		je koreň

$(a_1 x + a_0)$

$P(x) = (x - 1)(x + 2)(3x - 1)$

Pr.15 – 10 / 58:

Overte, či 2 a - 4 sú korene polynómu, urobte jeho kanonický rozklad. Ktorý koreň je dvojnásobný?

$$3x^5 + 17x^4 - 6x^3 - 96x^2 + 32x$$

Pr.16 – 10 / 64:

Overte, že 3 je trojnásobný koreň polynómu a zapíšte jeho kanonický rozklad.

$$5x^5 - 43x^4 + 117x^3 - 81x^2 - 54x = x(5x^4 - 43x^3 + 117x^2 - 81x - 54)$$

	5	**-43**	**117**	**-81**	**-54**
3		15	-84	99	54
	5	-28	33	18	**0**
3		15	-39	-18	
	5	-13	-6	**0**	
3		15	6		
	5	2	**0**		

$$(a_1x + a_0)$$

$$P\,(x) = x(x-3)^3(5x+2)$$

Dú: kap. 1.1 – 3, 4, 11, 12, 13, 20, 29, 40, 43, 45, 47, 51, 57, 67

1. Malá písomka

1. (0,5 b) Zapíšte komplexné číslo $z = -\sqrt{3} - i$ v goniometrickom tvare.

$a = -\sqrt{3}, b = -1$

0,1

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

0,1

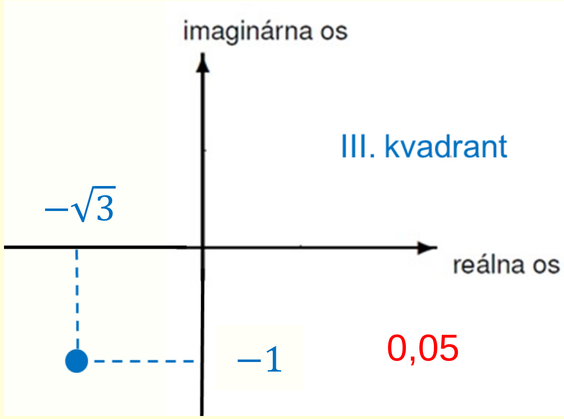
$$|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = -\frac{1}{2}$$

0,1

III. kvadrant:

$\varphi = \pi + \varphi_0$



0,05

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

0,1

$$\varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + 1\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\boldsymbol{z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}$$

0,05

1. Malá písomka

2. (cvičný príklad) Upravte zlomok, tak aby v menovateli nebola $\sqrt{}$:

$$\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{5}\sqrt{3.5}}{15} = \frac{3\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{3}}{15} = \frac{3.5\sqrt{3}}{15} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{15}.\sqrt{15} = 15$$