Matematika 2 – 2.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr. 8 – 55 / 29:

Určte z^5 a upravte na algebraický tvar, ak $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Postup pri určení umocnení komplexného čísla:

1. Zapíšeme kom. číslo v goniometrickom tvare.
2. Umocníme pomocou Moivreovej vety.
3. Do súradnej osi zakreslíme argument φ a určíme jeho kvadrant.
4. Určíme hodnotu φ_0 pomocou φ (vyjadríme ho pre prvý kvadrant, pomocou znamienok zohľadníme daný kvadrant φ, v prípade potreby využijeme aj periodickosť sínusu a kosínusu - $\text{ak je } \varphi > 2\pi$).
5. Zapíšeme kom. číslo v algebraickom tvare.

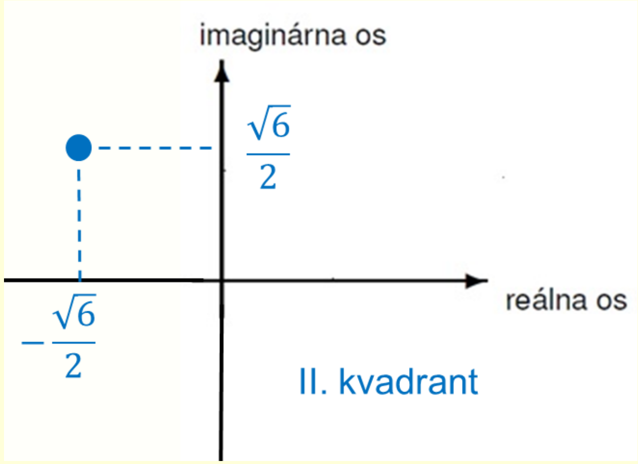
Pr. 9 – 55 / 31**:**

Určte z^6 a upravte na algebraický tvar, ak $\mathrm{z} = (-2 - 2\sqrt{3}i)$.

Pr. 10 – 55 / 25: Určte z^4 a upravte na algebraický tvar, ak $z = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$.

1. Zapíšeme kom. číslo v goniometrickom tvare.

$$a = -\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad b = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} \qquad |z| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \wedge\ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

II. kvadrant: $\varphi = \pi - \varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$$z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

2. Umocníme pomocou Moivreovej vety. $z^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4 \left(\cos 4.\frac{3\pi}{4} + i\sin 4.\frac{3\pi}{4}\right)$

3. Využijeme periodickosť sínusu a kosínusu pri úprave φ (ak je $\varphi > 2\pi$).

$$\cos 3\pi = \cos\ (\pi + 2\pi) = \cos\pi = -1 \qquad \sin 3\pi = \sin\ (\pi + 2\pi) = \sin\pi = 0$$

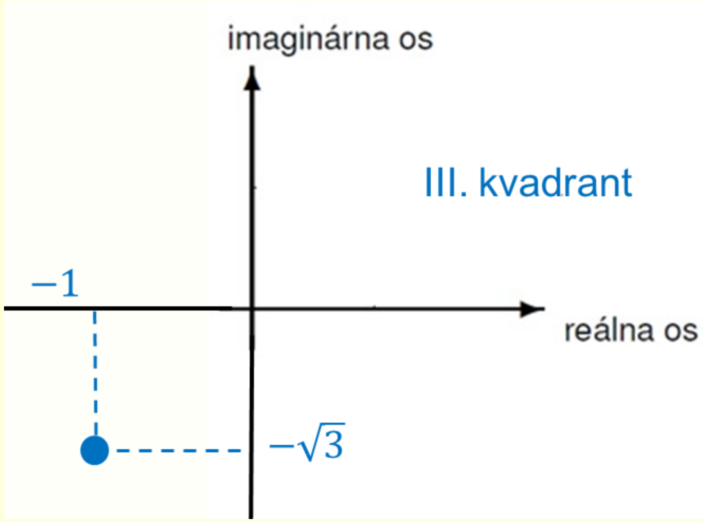
$$z^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4 \left(\cos 4.\frac{3\pi}{4} + i\sin 4.\frac{3\pi}{4}\right) = 9\left(\cos 3\pi + i\sin\ 3\pi\right) =$$

4. Zapíšeme kom. číslo v algebraickom tvare.

$$z^4 = 9(-1 + 0) = -9$$

Pr.11 – 55 / 35: Určte z^5 a upravte na algebraický tvar, ak $z = -1 - \sqrt{3}i$.

1. Zapíšeme kom. číslo v goniometrickom tvare.



$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} \qquad a = -1 \quad b = -\sqrt{3}$$

$$|z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-1}{2} \ \wedge\ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

III. kvadrant: $\varphi = \pi + \varphi_0 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

2. Umocníme pomocou Moivreovej vety.

$$z^5 = 2^5\left(\cos 5\frac{4\pi}{3} + i\sin 5\frac{4\pi}{3}\right)$$

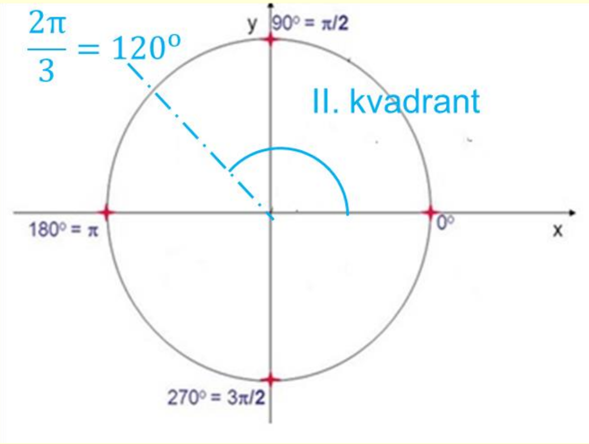
$$z^5 = 2^5\left(\cos 5\frac{4\pi}{3} + i\sin 5\frac{4\pi}{3}\right) = 2^5\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20}{3}\right)$$

3. Využijeme periodickosť sínusu a kosínusu pri úprave φ.

$$z^5 = 2^5\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right) = 2^5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^5\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\frac{20\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 18\pi\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\frac{20\pi}{3} = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 18\pi\right) = \sin\frac{2\pi}{3}$$



4. Do súradnej osi zakreslíme argument φ a určíme jeho kvadrant.

II. kvadrant: $\varphi = \pi - \varphi_0$

5. Určíme hodnotu φ_0 pomocou φ (vyjadríme ho pre prvý kvadrant, pomocou znamienok zohľadníme daný kvadrant φ).

$$\varphi_0 = \pi - \varphi = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. Zapíšeme kom. číslo v algebraickom tvare.

$$z^5 = 2^5\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^4(-1 + i) = -16 + i\,16\sqrt{3}$$

Dú: kap. Matematika I, str. 52 / 4, 6, 7, 8, 14, 16, 17, 18, 24, 26, 27, 28

Polynómy

Operácie s polynómami

Pr. 1 - 7 / 3: Vypočítajte $(4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x) : (x^2 + x - 3)$

$$(4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x) : (x^2 + x - 3) = 4x^2 - x + 11$$

$$\underline{-(4x^4 + 4x^3 - 12x^2)}$$

$$0 \quad - x^3 \quad + 10x^2 + x$$

stupeň polynómu n = 3 > 2 stupeň polynómu, ktorým delíme ⇒ pokračujeme v delení

$$\underline{-(\ -x^3 \ - \ x^2 + 3x)}$$

$$0 \ + 11\,x^2 - 2x$$

stupeň polynómu n = 2 = 2 stupeň polynómu, ktorým delíme ⇒ pokračujeme v delení

$$\underline{-(\ 11x^2 + 11x - 33)}$$

$$0 - 13x^1 + 33$$

zvyšok po delení

stupeň polynómu n = 1 < 2 stupeň polynómu, ktorým delíme ⇒ koniec delenia

Zápis výsledku:

I. $4x^2 - x + 11$ a zvyšok $-13x + 33$

II: $4x^2 - x + 11 + \frac{-13x + 33}{x^2 + x - 3}$

Pr. 2 - 7 / 1: Vypočítajte $(x^3 + 2x^2 - 2x + 1) : (x^2 - 1)$

Pr. 3 - 7 / 5: Vypočítajte $(x^4+4x^3+x^2+30x+14):(x^3+4x^2-x-4)$

$$(x^4+4x^3+x^2+30x+14):(x^3+4x^2-x-4)=x$$

$$\frac{-(x^4+4x^3-x^2-4x)}{0\quad +0\quad \underbrace{+2x^2+34x+14}_{\text{zvyšok po delení}}}$$

stupeň polynómu n = 2 < 3 stupeň polynómu, ktorým delíme ⇒ koniec delenia

<u>Zápis výsledku:</u>

I. x a zvyšok $2x^2+34x+14$

II: $x+\frac{2x^2+34x+14}{x^3+4x^2-x-4}$

Pr. 4 - 7 / 7: Vypočítajte $(6x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 17x + 4) : (x^3 - 2x^2 - x + 2)$

$$(6x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 17x + 4) : (x^3 - 2x^2 - x + 2) = 6x$$

$$\underline{-(6x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 12x)}$$

$$0 \quad + \quad 0 \quad \underbrace{- 5x^2 + 5x + 4}_{\text{zvyšok po delení}}$$

stupeň polynómu n = 2 < 3 stupeň polynómu, ktorým delíme ⇒ koniec delenia

Zápis výsledku:

I. $6x +$ a zvyšok $-5x^2 + 5x + 4$

II: $x + \frac{-5x^2+5x+4}{x^3-2x^2-x+2}$

Pr. 5 - 7 / 15: Vypočítajte $(x^5-6x^4+5x^3+26x^2-65x+30):(x^4-3x^3-2x^2+12x-8)$

$$(x^5-6x^4+5x^3+26x^2-65x+30):(x^4-3x^3-2x^2+12x-8)=x-3$$

$$\underline{-(x^5-3x^4-2x^3+12x^2-8x)}$$

$$0\quad -3x^4+7x^3+14x^2-57x+30$$

$$\underline{-(-3x^4+9x^3+6x^2-36x+24)}$$

$$-2x^3+8x^2-21x+6$$

zvyšok po delení

stupeň polynómu n = 4 > 3 stupeň polynómu, ktorým delíme $\Rightarrow$ pokračujeme v delení

stupeň polynómu n = 3 < 4 stupeň polynómu, ktorým delíme $\Rightarrow$ koniec delenia

Zápis výsledku:

I. $x-3$ a zvyšok $-2x^3+8x^2-21x+6$

II: $x-3+\frac{-2x^3+8x^2-21x+6}{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}$

Dú: kap. 1.1 – 3, 4, 11, 12, 13