Matematika 2 – 3.cvičenie

opakujúci

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Polynómy
Rozklad racionálnej funkcie na elementárne (parciálne) zlomky

Funkciu $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nazývame **racionálnou funkciou.**

Ak
I. *n* < *m* je funkcia *f* (*x*) **rýdzoracionálna**
II. *n* ≥ *m* je funkcia *f* (*x*) **nerýdzoracionálna**

I. Vieme rozložiť na súčet parciálnych zlomkov

$$\frac{A}{x-\alpha}, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^n}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

kde $A, B, C, \alpha, p, q \in R,\ n \in N,\ p^2 - 4q < 0.$

II. Predelíme a vyjadríme ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie, ktorú rozložíme na súčet parciálnych zlomkov

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}, st\ R(x) < m$$

Príklady rozkladu na parciálne zlomky

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-\alpha_1)^1.(x-\alpha_2)^1(x-\alpha_3)^1} = \frac{A}{(x-\alpha_1)} + \frac{B}{(x-\alpha_2)} + \frac{C}{(x-\alpha_3)}$$

3 reálne korene = 3 zlomky

(počet exponentov v menovateli = počet zlomkov)

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-\alpha_1)^2.(x-\alpha_2)^1} = \frac{A}{(x-\alpha_1)^2} + \frac{B}{(x-\alpha_1)} + \frac{C}{(x-\alpha_2)}$$

2 - násobný koreň = 3 zlomky

(súčet mocnín v menovateli 2+1 = 3)

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-\alpha_1)^2.(x-\alpha_2)^1(x^2+px+q)^1} = \frac{A}{(x-\alpha_1)^2} + \frac{B}{(x-\alpha_1)} + \frac{C}{(x-\alpha_2)} + \frac{Dx+E}{x^2+px+q}$$

súčet exponentov 2 + 1 + 1 + 1 = 4 = 4 zlomky

Pr. 1 – 17 / 1: rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{2x^{2}+10x-18}{x^{3}-2x^{2}-5x+6}$

1. Zistíme, či je funkcia rýdzoracionálna

2. Urobíme kanonický rozklad menovateľa na súčin koreňových činiteľov

3. Vyjadríme racionálnu funkciu pomocou parciálnych zlomkov a upravíme na spoločného menovateľa

4. Na vyjadrenie koeficientov A, B, C použijeme dosadzovaciu metódu (za neznámu *x* v rovnici dosadzujeme korene menovateľa, prípadne ďalšie možné hodnoty, napr. 0)

5. Zapíšeme funkciu pomocou parciálnych zlomkov

Pr. 2: rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

1. **Zistíme, či je funkcia rýdzoracionálna** stupeň polynómu v čitateli n = 2 < m = 3 v menovateli, funkcia je rýdzoracionálna môžeme hneď rozkladať na parciálne zlomky

2. Urobíme kanonický rozklad menovateľa na súčin koreňových činiteľov

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = x(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x + 2) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)$$

3. Vyjadríme racionálnu funkciu pomocou parciálnych zlomkov a upravíme na spoločného menovateľa

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$$3x^2 + 2x + 1 = A(x + 1)(x + 2) + B(x + 2)(x - 1) + C(x + 1)(x - 1)$$

4. Na vyjadrenie koeficientov A, B, C použijeme dosadzovaciu metódu (za neznámu *x* v rovnici dosadzujeme korene menovateľa, prípadne ďalšie možné hodnoty, napr. 0)

$x = -2$: $\quad 3(-2)^2 + 2(-2) + 1 = C(-2+1)(-2-1)$

$$9 = 3C$$

$$C = 3$$

$x = -1$: $\quad 3(-1)^2 + 2(-1) + 1 = B(-1+2)(-1-1)$

$$2 = -2B$$

$$B = -1$$

$x = 1$: $\quad 3(1)^2 + 2(1) + 1 = A(1+1)(1+2)$

$$6 = 6A$$

$$A = 1$$

5. Zapíšeme funkciu pomocou parciálnych zlomkov

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

Pr. 3 – 17 / 14: rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{4x^2+3x+2}{2x^3+3x^2-1}$

Pr. 4 rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\frac{5x^2-13x+9}{x^3-3x^2+4}$

možné korene $\frac{\mathbf{D(4)}}{\boldsymbol{D(1)}} = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{4}\}$

	1	**-3**	**0**	**4**
-1		-1	4	-4
	1	- 4	4	**0**
2		2	- 4	
	1	- 2	**0**	

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)(x-2) = (x+1)(x-2)^2$$

$$\frac{5x^2-13x+9}{x^3-3x^2+4} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{5x^2 - 13x + 9}{x^3 - 3x^2 + 4} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$5x^2 - 13x + 9 = A(x+1) + B(x-2)(x+1) + C(x-2)^2$$

$x = -1$: $\quad 5 + 13 + 9 = 9C$

$C = 3$

$x = 2$: $\quad 20 - 26 + 9 = 3A$

$A = 1$

$x = 0$: $\quad 9 = A(0+1) + B(-2) + C4$

$9 = 1 - 2B + 12$

$B = 2$

$$\frac{5x^2 - 13x + 9}{x^3 - 3x^2 + 4} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+1}$$

Pr. 5 – 17 / 28: rozložte v **R** na parciálne zlomky: $$\frac{x^2+7x+3}{x^4+2x^3+x+2}$$

Pr. 6 – 16 / 6 rieš.:

rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}$

$x^3-3x^2+2x-6 = x^2(x-3)+2(x-3) = (x^2+2)(x-3)$

$$\frac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$5x^2-7x+9 = A(x^2+2)+(Bx+C)(x-3)$

$x=3$: $\quad 5.9-7.3+9 = A(9+2)$

$33 = 11A \qquad A = 3$

$x=0$: $\quad 9 = 2A + C(0-3)$

$9 = 2.3 - 3C$

$3C = -3 \qquad C = -1$

$x=1$: $\quad 5-7+9 = 3A+(B+C)(1-3)$

$7 = 9+(B-1)(-2)$

$7 = 9-2B+2$

$2B = 4 \qquad B = 2$

$$\frac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6} = \frac{3}{x-3} + \frac{2x-1}{x^2+2}$$

2. Malá písomka

1. (0,3 b) Overte pomocou Hornerovej schémy, či – 3 je koreňom polynómu

$$\mathrm{P(x)} = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

0,05	**1**	**- 3**	**-13**	**15**
-3		-3	18	-15
	0,05 1	0,05 -6	0,05 5	0,05 **0**

-3 je koreňom 0,05

2. (0,2b) a) Určte hodnotu funkcie: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 0,1

b) Určte hodnotu uhla φ: $\sin\varphi = -1$ $\cos\varphi = 1$

$\varphi = 270°$ $\varphi = 0°$ 0,1