Matematika 2 – 3.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

d) Kanonický rozklad polynómov – na súčin koreňových činiteľov

$$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_sx+q_s)$$

α je koreň $\rightarrow (x-\alpha)$

$-\alpha$ je koreň $\rightarrow \big(x-(-\alpha)\big) = (x+\alpha)$

$(x-\alpha)^1 \rightarrow \alpha$ je jednoduchý koreň (1- násobný)

$(x-\alpha)^n \rightarrow \alpha$ je n - násobný koreň

Napr. $P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$ má stupeň n = 4

a) Ak sú korene $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ jednoduché → rozklad $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$

$$P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = (x-\alpha_1)^1.(x-\alpha_2)^1(x-\alpha_3)^1(x-\alpha_4)^1,\ 4 = 1+1+1+1$$

b) Ak je α_1 trojnásobný koreň, α_2 jednoduchý → rozklad $(x-\alpha_1)^3(x-\alpha_2)$

$$P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = (x-\alpha_1)^3.(x-\alpha_2)^1,\ 4 = 3+1$$

c) Ak je α_1, α_2 jednoduché korene a ďalej už nie je možné rozložiť polynóm v R → rozklad $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x^2+px+q)$

$$P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = (x-\alpha_1)^1.(x-\alpha_2)^1(x^2+px+q),\ \ 4 = 1+1+2$$

I: použitím vzorcov

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Pr. 1 - 9 / 34: urobte kanonický rozklad polynómu v **R**

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Pr. 2 – 9 / 48: urobte kanonický rozklad polynómu v **R**

$$x^4 - 18x^2 + 81$$

Pr. 3 - 9 / 35: urobte kanonický rozklad polynómu v **R** x^3+3x^2+3x+1

$$x^3+3x^2+3x+1 \quad = (x+1)^3$$

koreň polynómu $\alpha = -1$, je trojnásobný

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3$$

$$x^3 = a^3 \to x = a$$

$$1 = b^3 \to 1 = b$$

II: postupným vyberaním spoločných výrazov pred zátvorku

Pr. 4 - 8 / 30: urobte kanonický rozklad polynómu v **R**

$$x^3 - x^2 + 4x - 4$$

III: postupným vyberaním spoločných výrazov pred zátvorku a použitím vzorcov

Pr. 5 – 8 / 19: urobte kanonický rozklad polynómu v **R** $x^3 - 2x^2 - x + 2$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

polynóm má tri jednoduché korene $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2$

IV. Hornerova schéma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

- určime **možné korene** ako podiel deliteľov absolútneho člena a_0 a koeficientu pri najvyššej mocnine a_n

$$\frac{\mathbf{D}(\boldsymbol{a_0})}{\mathbf{D}(\boldsymbol{a_n})} = \{\pm\boldsymbol{\alpha_1}, \pm\boldsymbol{\alpha_2}, \ldots . \pm\boldsymbol{\alpha_n}\}$$

- ak súčet koeficientov polynómu $(\boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{a_{n-1}} + \ \ldots\ + \boldsymbol{a_0})$ je rovný nule, potom jedným z koreňov je číslo 1
- ak sú koeficienty polynómu len **kladné čísla**, potom korene polynómu budú len záporné čísla

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_0
α_1		$\alpha_1 \,.\, a_n$ $+$	$\alpha_1\,(\alpha_1 \,.\, a_n + a_{n-1})$ $+$		$+$	
.	a_n	$\alpha_1 \,.\, a_n + a_{n-1}$				**0**

α_1 **je koreň, ak vyjde 0**

- začať dosadzovať od najmenšieho celého koreňa

Pr. 6 – 8 / 22: urobte kanonický rozklad polynómu v **R** $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

Pr. 7 – 8 / 25: urobte kanonický rozklad polynómu v **R** $3x^3+11x^2+12x+4$

Pr. 8 – 8 / 23: Overte, či 1 a - 2 sú korene polynómu, urobte jeho kanonický rozklad.

$$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$$

možné korene $\frac{\mathbf{D(2)}}{\mathbf{D(3)}} = \frac{\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}\}}{\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{3}\}} = \left\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \pm\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right\}$

$a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 = 3 + 2 - 7 + 2 = 0,$ 1 je určite koreň

	3	**2**	**-7**	**2**	
1		3	5	-2	
	3	5	-2	**0**	je koreň
-2		- 6	2		
	3	-1	**0**		je koreň

$(a_1x + a_0)$

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(3x - 1)$$

Pr. 9 – 10 / 58:

Overte, či 2 a - 4 sú korene polynómu, urobte jeho kanonický rozklad. Ktorý koreň je dvojnásobný?

$$3x^5 + 17x^4 - 6x^3 - 96x^2 + 32x$$

Pr. 10 – 10 / 64:

Overte, že 3 je trojnásobný koreň polynómu a zapíšte jeho kanonický rozklad.

$$5x^5 - 43x^4 + 117x^3 - 81x^2 - 54x = x(5x^4 - 43x^3 + 117x^2 - 81x - 54)$$

	5	**-43**	**117**	**-81**	**-54**
3		15	-84	99	54
	5	-28	33	18	**0**
3		15	-39	-18	
	5	-13	-6	**0**	
3		15	6		
	5	2	**0**		

$$(a_1x + a_0)$$

$$P(x) = x(x-3)^3(5x+2)$$

Dú: kap. 1.1 – 3, 4, 11, 12, 13, 20, 29, 40, 43, 45, 47, 51, 57, 67