Matematika 2 – 3.cvičenie

príprava

d) Kanonický rozklad polynómov – na súčin koreňových činiteľov

$$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_sx+q_s)$$

α je koreň $\rightarrow (x-\alpha)$

$-\alpha$ je koreň $\rightarrow \left(x-(-\alpha)\right) = (x+\alpha)$

$(x-\alpha)^1 \rightarrow \alpha$ je jednoduchý koreň

$(x-\alpha)^n \rightarrow \alpha$ je n - násobný koreň

Napr. $P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$ má stupeň n = 4

a) Ak sú korene α_1, α_2, α_3, α_4 jednoduché → rozklad $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$

$$P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = (x-\alpha_1)^1.(x-\alpha_2)^1(x-\alpha_3)^1(x-\alpha_4)^1 \text{ , } 4 = 1+1+1+1$$

b) Ak je α_1 trojnásobný koreň, α_2 jednoduchý → rozklad $(x-\alpha_1)^3(x-\alpha_2)$

$$P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = (x-\alpha_1)^3.(x-\alpha_2)^1, \ 4 = 3+1$$

c) Ak je α_1, α_2 jednoduché korene a ďalej už nie je možné rozložiť polynóm v R → rozklad $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x^2+px+q)$

$$P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = (x-\alpha_1)^1.(x-\alpha_2)^1(x^2+px+q), \ 4 = 1+1+2$$

I: použitím vzorcov

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

II: postupným vyberaním spoločných výrazov pred zátvorku

III: postupným vyberaním spoločných výrazov pred zátvorku a použitím vzorcov

IV. Hornerova schéma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

- určime **možné korene** ako podiel deliteľov absolútneho člena a_0 a koeficientu pri najvyššej mocnine a_n

$$\frac{\mathbf{D}(\boldsymbol{a_0})}{\mathbf{D}(\boldsymbol{a_n})} = \{\pm\boldsymbol{\alpha_1}, \pm\boldsymbol{\alpha_2}, \dots . \pm\boldsymbol{\alpha_n}\}$$

- ak súčet koeficientov polynómu $(\boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{a_{n-1}} + \dots + \boldsymbol{a_0})$ je rovný nule, potom jedným z koreňov je číslo 1
- ak sú koeficienty polynómu len **kladné čísla**, potom korene polynómu budú len záporné čísla

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_0
α_1		$\alpha_1 \,.\, a_n$ $+$	$\alpha_1\,(\alpha_1 \,.\, a_n + a_{n-1})$ $+$		$+$	
$\cdot$	a_n	$\alpha_1 \,.\, a_n + a_{n-1}$				**0**

α_1 **je koreň, ak vyjde 0**

- začať dosadzovať od najmenšieho celého koreňa

Polynómy

Rozklad racionálnej funkcie na elementárne (parciálne) zlomky

Funkciu $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nazývame **racionálnou funkciou.**

Ak

I. *n* < *m* je funkcia *f* (*x*) **rýdzoracionálna**

II. *n* > *m* je funkcia *f* (*x*) **nerýdzoracionálna**

I. Vieme rozložiť na súčet parciálnych zlomkov

$$\frac{A}{x-\alpha}\ ,\quad \frac{A}{(x-\alpha)^n}\ ,\quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\ ,\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

kde $A, B, C, \alpha, p, q \in R,\ \ n \in N,\ \ p^2 - 4q < 0.$

II. Predelíme a vyjadríme ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie, ktorú rozložíme na súčet parciálnych zlomkov

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}, st\ R(x) < m$$

Príklady rozkladu na parciálne zlomky

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{\underbrace{(x-\alpha)^1 (x-\beta)^1 (x-\gamma)^1}_{\text{tri reálne korene}}} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}$$

tri zlomky

počet zlomkov = počet exponentov v menovateli

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{x-3}$$

2-násobný koreň

tri zlomky

(súčet mocnín v menovateli $2+1=3$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-2)^2(x-3)^1(x^2+px+q)^1} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$+ \frac{Dx+E}{x^2+px+q}$$

súčet exponentov

$2+1+1=4 \Rightarrow$ počet

zlomkov $=4$