NMPaMŠ – 1.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Cvičiaca: **RNDr. Z. Gibová, PhD.**

zuzana.gibova@tuke.sk

Boženy Nemcovej 32, 6. poschodie, č.k.: 614

Konzultácie: štvrtok : 11:00 – 12:00

- cvičenia (povinné), prednášky

Prenášajúca: **doc. RNDr. Helena Myšková, PhD**

Podmienky zápočtu: 2 zápočtové písomky, získať v súčte aspoň 16 b z 30 b

1ZP – 5. – 7. týždeň za 15 b

2ZP – 10. – 12. týždeň za 15 b

Všetky materiály na stránke KMTI / aktuálne predmety /NMPaMŚ

Literatúra k cvičeniam

- Učebnica Daňo, Ostertagová: Numerické metódy, pravdepodobnosť a matematická štatistika v príkladoch – na stránke v prílohách

Numerické riešenie nelineárnych rovníc

nelineárna rovnica - f (x) = 0, rovnica jednej premennej

napr. $\ln x - x + 3x^2 = 0$

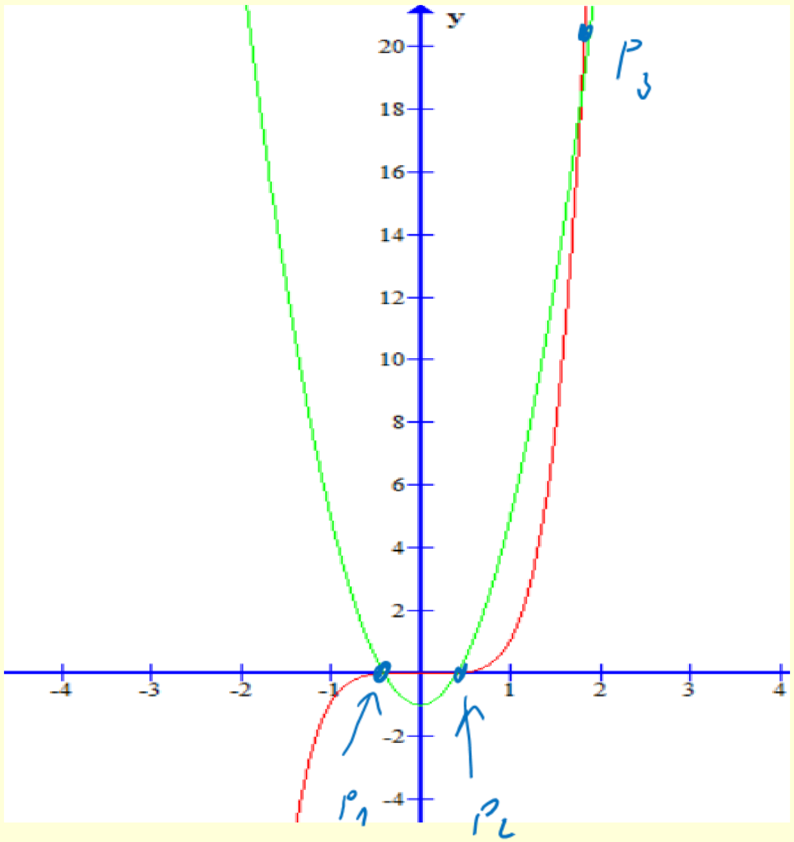
koreň rovnice α, pre ktoré f (α) = 0

Metódy riešenia – a) Metóda polovičného delenia intervalu
b) Metóda prostej iterácie
c) Newtonova metóda

Pri všetkých metódach používame **grafickú separáciu na dve funkcie,** x- ové súradnice priesečníkov predstavujú približné hodnoty koreňov rovnice.

Grafická separácia na dve funkcie

$$f(x) = x^5 - 6x^2 + 1 = 0$$



Upravíme rovnicu tak, aby sme dostali dve základné funkcie, ktoré vieme graficky zobraziť – **separácia**:

$$x^5 - 6x^2 + 1 = 0$$
$$x^5 = 6x^2 - 1$$

$h(x) = x^5$ $\qquad$ $g(x) = 6x^2 - 1$

Nájdeme intervaly (polohu) priesečníkov = **intervaly koreňov** pôvodnej rovnice *f*(*x*) = 0

funkcia má tri priesečníky na intervaloch:
(-1, 0), (0, 1), (1,2)

- ak máme určiť záporný reálny koreň, tak volíme interval (-1, 0),
- ak väčší reálny koreň $\rightarrow$ (1,2)
- ak všetky reálne korene $\rightarrow$ všetky intervaly

Pr. 1: Graficky separujte nasledujúce rovnice:

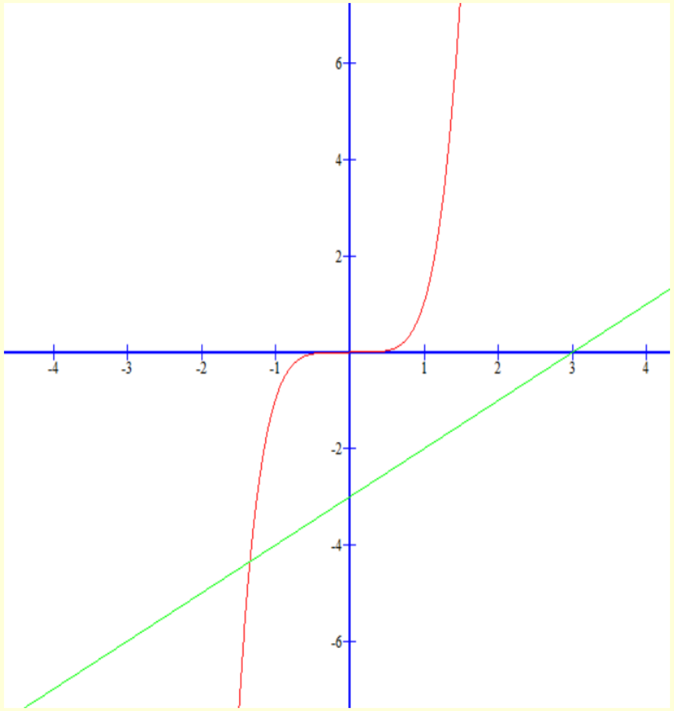
a) $x^5 - x + 3 = 0$,

b) $x^4 - x^3 - 2 = 0$.

c) $e^x - x^2 + 1 = 0$

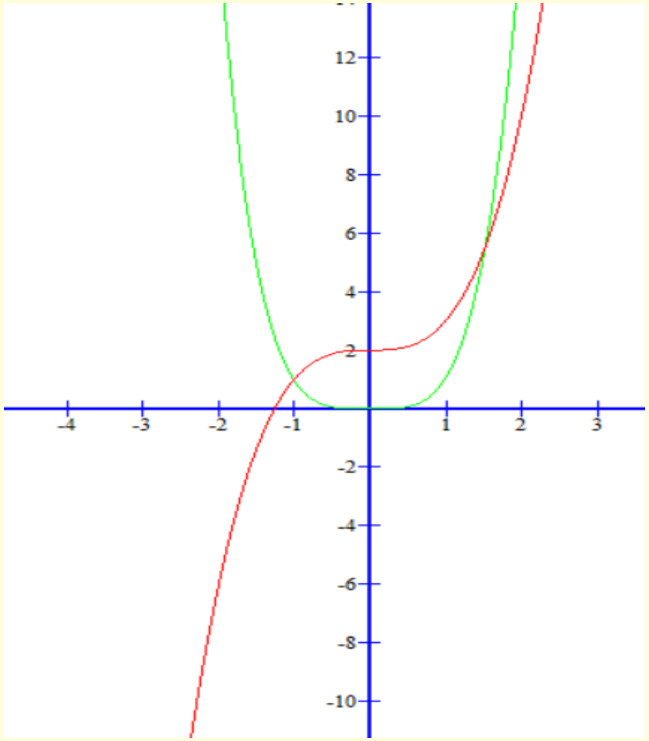
d) $x^2 - 4 - x = 0$. Určte všetky ich priesečníky.

a) jeden priesečník, interval (-2, -1)



$g(x) = x^5$ $h(x) = x - 3$

b) dva priesečníky, intervaly (-1,0), (1,2)

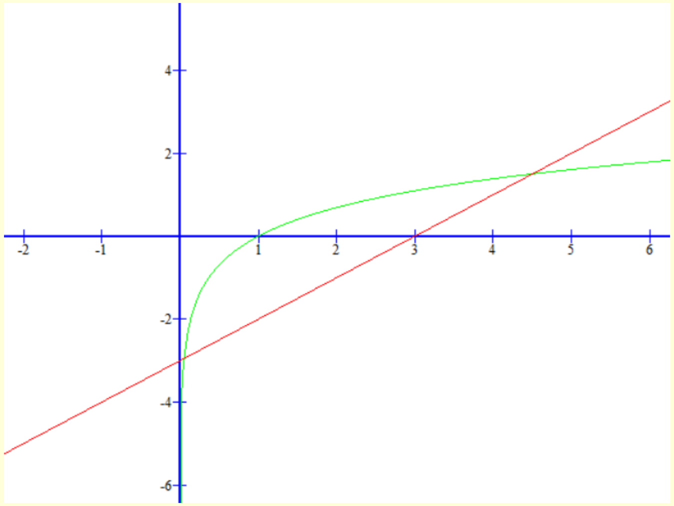


$g(x) = x^3 + 2$ $h(x) = x^4$

1. Metóda polovičného delenia intervalu (bisekcie)

Pr. 2: Metódou polovičného delenia intervalu vypočítajte všetky reálne korene rovnice $f(x) = \ln x - x + 3 = 0$, s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-2.}$

1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa



$$\ln x = x - 3$$

$$g(x) = \ln x \qquad h(x) = x - 3$$

možné korene – dva v intervaloch (0,1), (4,5)

2. Definujeme interval $\langle a , b\rangle$ a overíme, či sa koreň α nachádza v zvolenom intervale

a) menší koreň – volíme interval $\langle 0{,}01, 0{,}5\rangle$

a = 0,01, b = 0,5

$$f(x) = \ln x - x + 3$$

$$\boldsymbol{\alpha \in \langle a, b\rangle} \textbf{ ak } \boldsymbol{f(a).f(b) < 0}$$

$$f(0{,}01) = \ln 0{,}01 - 0{,}01 + 3 = -1{,}62$$

$$f(0{,}5) = \ln 0{,}5 - 0{,}5 + 3 = 1{,}81$$

$$f(0{,}0{,}1).f(0{,}5) < 0 \ \rightarrow \alpha \in \langle 0{,}01, 0{,}5\rangle$$

Poznámka. Rovnica $f(x) = 0$ môže mať v intervale (a, b) nulový bod aj v prípade, keď $f(a) \cdot f(b) > 0$. V tomto prípade je počet koreňov v intervale (a, b) párny.

3. Určíme podmienku ukončenia delenia intervalu (pomôcka: určiť aj počet iterácií)

$$|\mathbf{b_n} - \mathbf{a_n}| < \mathbf{2}\boldsymbol{\varepsilon}$$

pomôcka: $\frac{|\mathbf{b}-\mathbf{a}|}{\boldsymbol{\varepsilon}} < \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}$

$$|\mathrm{b_n} - \mathrm{a_n}| < 2.5.\,10^{-2} = 0{,}1$$

$$9{,}8 = \frac{|0{,}5-0{,}01|}{0{,}05} < 2^{n+1}$$

$$9{,}8 < 2^4 \rightarrow n + 1 = 4$$

$$n = 3 \text{ (počet iterácií)}$$

4. Určíme počiatočné hodnoty a_n , b_n , c_n

a_0 = a = 0,01, b_0 = b = 0,5, $\mathbf{c_0} = \frac{\mathbf{0{,}01+0{,}5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0{,}255}$

$$\mathbf{c_n} = \frac{\mathbf{a_n}+\mathbf{b_n}}{\mathbf{2}}$$

5. Urobíme n delení intervalu $\langle a_n, b_n\rangle$ na interval $\langle a_n, c_n\rangle$ alebo $\langle c_n, b_n\rangle$ (píšeme do tabuľky) podľa pravidiel:

$\mathbf{f(a_n).f(c_n)} < \mathbf{0}$**, potom interval** $\langle \mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+1}\rangle$ **nahradíme intervalom** $\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{c}_n\rangle$

$\mathbf{f(a_n).f(c_n)} > \mathbf{0}$**, potom interval** $\langle \mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+1}\rangle$ **nahradíme intervalom** $\langle \mathbf{c}_n, \mathbf{b}_n\rangle$

$f(a_n).f(c_n) < 0$, potom interval $\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle$ nahradíme intervalom $\langle a_n, c_n\rangle$
$f(a_n).f(c_n) > 0$, potom interval $\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle$ nahradíme intervalom $\langle c_n, b_n\rangle$

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	c_n	$f(c_n)$	$f(a_n).f(c_n)$	$\lvert b_n - a_n\rvert$
0	0,01	-	0,5	+	0,255	+	- $\langle a_n, c_n\rangle$	$0{,}49 > 0{,}1$
1	0,01	-	0,255	+	0,1325	+	- $\langle a_n, c_n\rangle$	$0{,}215 > 0{,}1$
2	0,01	-	0,1325	+	0,07125	+	- $\langle a_n, c_n\rangle$	$0{,}1275 > 0{,}1$
3	0,01	-	0,07125	+	0,040625			$0{,}02 < 0{,}1$

$f(x) = \ln x - x + 3 \rightarrow f(a_n) = \ln a_n - a_n + 3$ $\quad \lvert b_n - a_n\rvert < 2\varepsilon$

6. Delenie ukončíme, ak $\lvert b_n - a_n\rvert < 2\varepsilon$ a súčasne $f(a_n).f(b_n) < 0$

$\lvert b_3 - a_3\rvert = 0{,}02 < 0{,}1$, $f(a_3).f(b_3) < 0$

7. Aproximujeme koreň pomocou c_n a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť.

$c_3 = 0{,}040625,\ \varepsilon = 5.10^{-2}$ zaokruhlíme na dve desatinné miesta podľa ε
presná hodnota koreňa aproximovaná c_3 je $\alpha \approx 0{,}04$

b) väčší koreň – volíme interval $\langle 4, 5\rangle$, a = 4, b = 5

$\boldsymbol{\alpha \,\epsilon\, \langle a, b\rangle}$ **ak** $\boldsymbol{f(a).f(b) < 0}$

$$f(x) = \ln x - x + 3$$

$$f(4) = \ln 4 - 4 + 3 = 0{,}39$$

$$f(5) = \ln 5 - 5 + 3 = -0{,}39$$

$$f(4).f(5) < 0 \rightarrow \alpha \in \langle 4, 5\rangle$$

$$|\mathrm{b_n} - \mathrm{a_n}| < 2.5.10^{-2} = 0{,}1$$

$$9{,}8 = \frac{|5-4|}{0{,}05} < 2^{n+1}$$

$$20 < 2^5 \rightarrow n + 1 = 5,\ n = 4 \text{ (počet iterácií)}$$

$$\mathbf{a_0 = a = 4,\ b_0 = b = 5,\ c_0} = \frac{\mathbf{4+5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{4,5}$$

n	$\mathbf{a}_n$	$\mathbf{f(a_n)}$	$\mathbf{b}_n$	$\mathbf{f(b_n)}$	$\mathbf{c}_n$	$\mathbf{f(c_n)}$	$\mathbf{f(a_n).f(c_n)}$	$\mathbf{\lvert b_n - a_n\rvert}$
0	4	+	5	-	4,5	+	+ $\langle c_n, b_n\rangle$	1> 0,1
1	4,5	+	5	-	4,75	-	- $\langle a_n, c_n\rangle$	0,5 > 0,1
2	4,5	+	4,75	-	4,625	-	- $\langle a_n, c_n\rangle$	0,25 > 0,1
3	4,5	+	4,625	-	4,5625	-		0,125 > 0,1
4	4,5	+	4,5625	-	4,53125			0,0625 < 0,1

$|\mathrm{b_4} - \mathrm{a_4}| = 0{,}0625 < 0{,}1$, $\mathrm{f(b_4).f(a_4)} < 0$

$c_4 = 4{,}53125,\ \varepsilon = 5.10^{-2}$, presná hodnota c_4 je $\alpha \approx 4{,}53$

Dú: 1.1/ 1 – 3, 1.2 / 5 – 8