NMPaMŠ – 2.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Numerické riešenie nelineárnych rovníc
2. Metóda prostej iterácie

Pr. 1: Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $f(x) = x^3 - 12x^2 + 1 = 0$.
Menší kladný koreň určte metódou prostej iterácie s presnosťou ε = 0,01.

1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa, overenie $\alpha \in \langle a, b \rangle$

2. Určíme funkciu $x = \varphi(x)$ (vyjadríme *x* z rovnice)

3. Vypočítame deriváciu $\varphi'(x)$

4. Overíme podmienku konvergencie φ´(x)

ak $\mathbf{M} = \max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |\varphi'(x)| < 1$, potom λ = M (λ – koeficient kontraktívnosti)

5. Na určenie približnej hodnoty koreňa zvolíme iteračný proces $\varphi(x) = x$ a počiatočný bod iterácie z intervalu $\langle a, b \rangle$

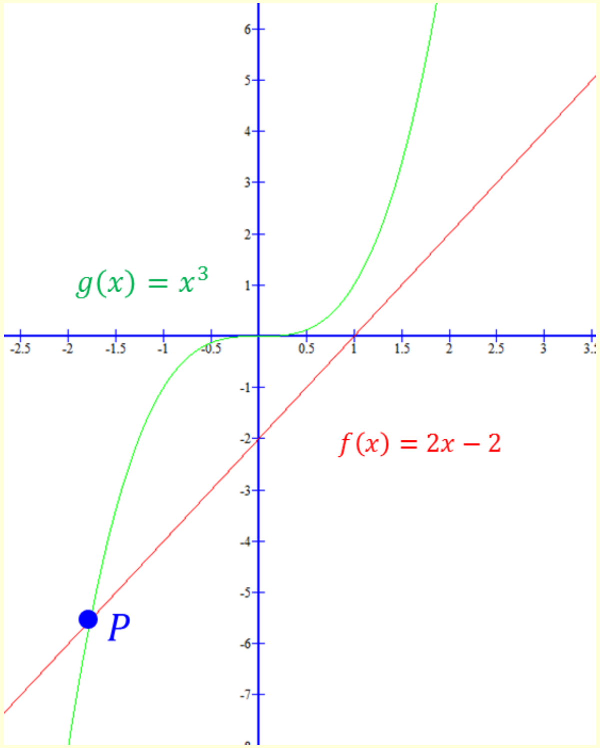
6. Iteračný proces ukončíme, ak je splnená podmienka

$$|x_{n+1} - x_n| \le \frac{1 - \lambda}{\lambda} \varepsilon$$

7. Aproximujeme koreň pomocou iterácie x_n a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť

Pr. 2: Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $f(x) = x^3 - 2x + 2 = 0$.
Koreň rovnice určte metódou prostej iterácie s presnosťou ε = 0,01.

1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa, overenie $\alpha \in \langle a, b\rangle$



$$x^3 - 2x + 2 = 0$$

$$x^3 = 2x - 2$$

$$P \in (-2, -1)$$

$$f(-2) = -8 + 4 + 2 = -2$$

$$f(-1) = -1 + 2 + 2 = 3$$

$$f(-1).f(-2) < 0 \ \rightarrow \alpha \in \langle -2, -1\rangle$$

2. Určíme funkciu $x = \varphi(x)$ – úpravou rovnice vyjadríme *x*

$$\varphi_1(x) = \sqrt[3]{2x - 2} \qquad \varphi_2(x) = \frac{x^3 + 2}{2}$$

3. Vypočítame deriváciu $\varphi'(x)$

$$\varphi_1'(x) = \frac{1}{3}\frac{2}{\sqrt[3]{(2x-2)^2}} \qquad \varphi_2'(x) = \frac{3x^2}{2}$$

4. Overíme podmienku konvergencie φ´(x)

ak $\mathbf{M} = \max_{x \in \langle a,b \rangle} |\varphi'(x)| < 1$ **, potom** $\lambda = \mathbf{M}$ (λ – koeficient kontraktívnosti)

$$\varphi_1'(x) = \frac{1}{3}\frac{2}{\sqrt[3]{(2x-2)^2}}$$

$$\mathrm{M} = \max_{x \in \langle a,b \rangle} |\varphi_1'(x)| = \max_{x \in \langle -2,-1 \rangle} \left| \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(2x-2)^2}} \right| < 1$$

$$x = -1, \quad \left| \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(-2-2)^2}} \right| = 0{,}26 < 1$$

$$x = -2, \quad \left| \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(-4-2)^2}} \right| = 0{,}2 < 1$$

$$\varphi_2'(x) = \frac{3x^2}{2}$$

$$\mathrm{M} = \max_{x \in \langle a,b \rangle} |\varphi_2'(x)| = \max_{x \in \langle -2,-1 \rangle} \left| \frac{3x^2}{2} \right| < 1$$

$$x = -1, \quad \left| \frac{3(-1)^2}{2} \right| = 1{,}5 > 1$$

$$x = -2, \quad \left| \frac{3(-2)^2}{2} \right| = 6 > 1$$

5. Na určenie približnej hodnoty koreňa zvolíme iteračný proces $\boldsymbol{\varphi(x) = x}$ a počiatočný bod iterácie z intervalu $\boldsymbol{\langle a, b\rangle}$

$\varphi_1(x) = \sqrt[3]{2x-2}$ vyhovuje

$\varphi_2(x) = \frac{x^3+2}{2}$ nevyhovuje

Iteračný proces: $\varphi(x) = x_{n+1} = \sqrt[3]{2x_n - 2}$

$x_0 = -1{,}5$

6. Iteračný proces ukončíme, ak je splnená podmienka

$$|\mathbf{x_{n+1}} - x_n| \leq \frac{\mathbf{1-\boldsymbol{\lambda}}}{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \lambda = M = 0{,}26$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1-0{,}26}{0{,}26}0{,}01 = 0{,}028$$

n	x_n	$\|x_{n+1} - x_n\|$
0	-1,5	0,21
1	-1,71	0,047
2	-1,757	0,01 < 0,028 stop iterácie
3	-1,767	

$$\varphi(x) = x_{n+1} = \sqrt[3]{2x_n - 2} \qquad x_0 = -1,5$$

$$x_1 = \sqrt[3]{2x_0 - 2} = \sqrt[3]{2.(-1,5) - 2} = -1,71$$

$$|x_1 - x_0| = |-1,71 - (-1,5)| = 0,21$$

7. Aproximujeme koreň pomocou iterácie x_n **a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť**

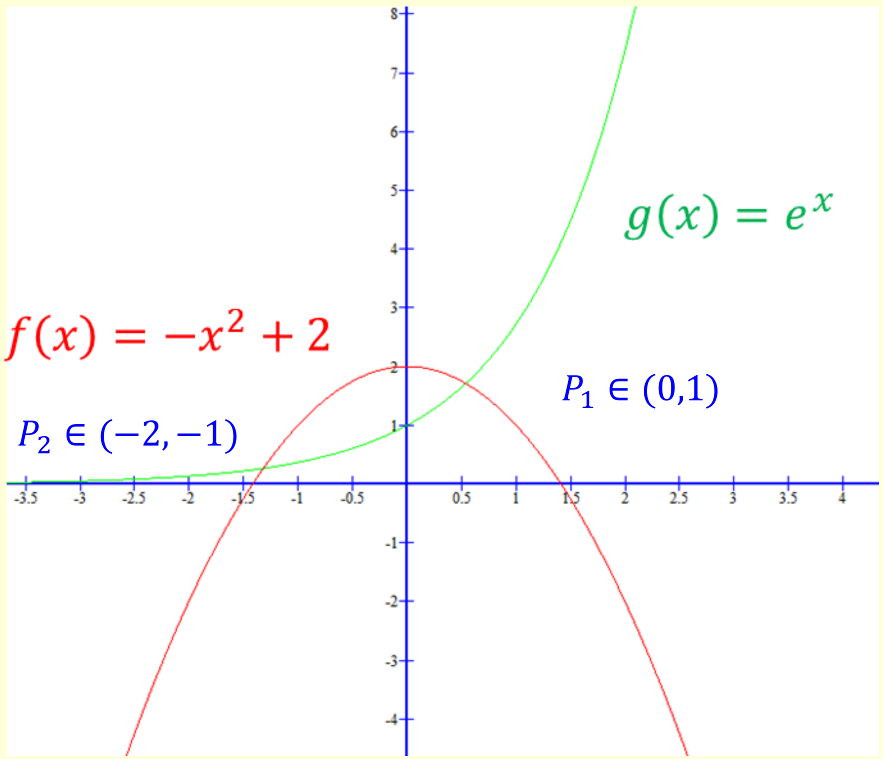
$$x_3 = -1,767 \qquad \alpha \approx -1,77$$

Numerické riešenie nelineárnych rovníc

2. Newtonova metóda

Pr. 3: Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $f(x) = e^x + x^2 - 2 = 0$. Všetky korene určte pomocou Newtonovej metódy s presnosťou ε = 0,001.

1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa, overenie $\boldsymbol{\alpha} \in \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$



$$e^x + x^2 - 2 = 0$$
$$e^x = -x^2 + 2$$

$kladný\ koreň\ \alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + x^2 - 2 \\ f(0) &= -1 \\ f(1) &= 1{,}7183 \end{aligned}$$

$$f(0).f(1) < 0 \ \rightarrow \alpha \in \langle 0, -1 \rangle$$

2. Určime prvú a druhú deriváciu funkcie $f(x)$

$f(x) = e^x + x^2 - 2$

$f'(x) = e^x + 2x$

$f''(x) = e^x + 2$

4. Overíme, či prvá a druhá derivácia funkcie *f*(*x*) zachováva na intervale $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle$ znamienko (musia pre koncové hodnoty intervalu mať rovnaké znamienko)

$f'(0) = e^0 + 0 = 1$ +

$f'(1) = e^1 + 2 = 4{,}7138$ +

$f''(0) = e^0 + 2 = 3$ +

$f''(1) = e^1 + 2 = 4{,}7138$ +

prvá derivácia zachováva znamienko

druhá derivácia zachováva znamienko

5. Zvolíme štartovací bod $x_0 \in \langle a , b\rangle$, pre ktorý má platiť $f(x_0)\,.\,f''(x_0) > 0$

$x_0 = 1 \in \langle 0 , 1\rangle$ $\quad f(1)\,.\,f''(1) > 0$ $\quad f(1) = 1{,}7183,\ f''(1) = 4{,}7138$

$+ \ . \ +$

6. Zvolíme iteračný proces $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$

7. Urobíme odhad nepresnosti a ukončenie (stop test)

Ak platí, že prvá derivácia **nemení** na intervale znamienko, potom odhad presnosti

$$\frac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon$$

$$m = \min_{x\in\langle a,b\rangle} |f'(x_n)| \qquad m = \min_{x\in\langle 0,1\rangle} |e^x + 2x| = \begin{matrix} 1, & x = 0 \\ 4{,}7138, & x = 1 \end{matrix} \quad \rightarrow \ \boldsymbol{m = 1}$$

$$\frac{|f(x_n)|}{1} < 0{,}001$$

Poznámka: Ak prvá derivácia **mení** na intervale **znamienko**, potom odhad presnosti

$$f(x_n - \varepsilon).\,f(x_n + \varepsilon) < 0$$

n	x_n	$f(x_n)$ $e^x + x^2 - 2$	$f'(x_n)$ $e^x + 2\boldsymbol{x}$	$\frac{\lvert \mathbf{f}(\mathbf{x_n}) \rvert}{\mathbf{m}} < \boldsymbol{\varepsilon}$ $\frac{\lvert \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n}) \rvert}{\mathbf{1}} < \mathbf{0{,}001}$
0	1	1,1783	4,7183	1,7183
1	0,6358	0,2928	3,1601	0,2928
2	0,5431	0,0163	2,8075	0,0163 < 0,001
3	0,5373	0,0007		

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1{,}1783}{4{,}7183} = 0{,}6358 \qquad \frac{|f(x_0)|}{1} = \frac{|1{,}1783|}{1} = 1{,}1783$$

8. Aproximujeme koreň pomocou iterácie x_n **a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť.**

$$x_3 = 0{,}5373 \qquad \alpha \approx 0{,}537$$

Dú:

Pr. 3 − dokončiť pre *záporný kore*ň

Príklady na riešenie 1: A / 1 - 10