ODHAD ABSOLÚTNEJ CHYBY, KTORÝ MÔŽEME POUŽIŤ AJ PRI BISEKCII AJ PRI INÝCH ITERAČNÝCH METÓDACH UROBÍME AJ INÝM SPÔSOBOM.

AK CHCEME ZISTIŤ, AKEJ CHYBY SME SA DOPUSTILI, KEĎ SME UROBILI n ITERÁCIÍ (DOSTALI SME SA DO ČÍSLA x_n), ODVODÍME VZOREC PRE NEPRESNOSŤ ZÍSKANEJ HODNOTY $\to x_n$.

NECH x_n JE n-TÁ ITERÁCIA KOREŇA α ROVNICE $f(x)=0$.

VYUŽIJEME LAGRANGEOVU VETU (MAT1):

VNÚTRI INTERVALU $\langle x_n; \alpha \rangle$ $\exists$ ČÍSLO ξ, PRE KTORÉ PLATÍ:

$\boxed{f(x_n) - f(\alpha) = f'(\xi) \cdot (x_n - \alpha)}$; f - SPOJITÁ A MÁ 1. DERIVÁCIU

$f(\alpha)$ = 0, LEBO α JE KOREŇ ROVNICE $f(x)=0$

CELÝ VÝRAZ ZAPÍŠEM POMOCOU ABSOLÚTNYCH HODNÔT

$$|f(x_n)| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - \alpha| \Rightarrow |x_n - \alpha| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(\xi)|}$$

$|f(x_n)|$ -> JE ZNÁMA

$|f'(\xi)|$???

$|x_n - \alpha|$ - ABSOLÚTNA CHYBA

$|x_n - \alpha| \leq$ ZLOMOK S ČO NAJVÄČŠOU HODNOTOU => MENOVATEĽ MUSÍ BYŤ ČO NAJMENŠÍ

$$|f'(\xi)| \to \min_{\langle a,b \rangle} |f'(x)| = m$$

POTOM ODHAD ABSOLÚTNEJ CHYBY JE V TVARE

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$$

PŘÍKLAD 9: UROBME ODHAD CHYBY, KTOREJ SME SA DOPUSTILI V PRÍKLADE 6, AK SME PROCES UKONČILI 4-TOU ITERÁCIOU.

$\overbrace{x^3 - x - 1}^{f} = 0$

$c_4 = 1{,}328125$, $c_4 = x_4$

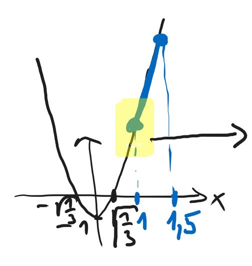
$\alpha \in \langle \underset{a}{1} ; \underset{b}{1{,}5} \rangle$

$f(x_4) = f(c_4) = 0{,}0145759$

$$m = \min_{\langle a,b \rangle} |f'(x)|$$

$f(x) = x^3 - x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 1$ $\longrightarrow$



$\longrightarrow$ MIN HODNOTA F-CIE $f'(x)$ NA $\langle 1; 1{,}5 \rangle$

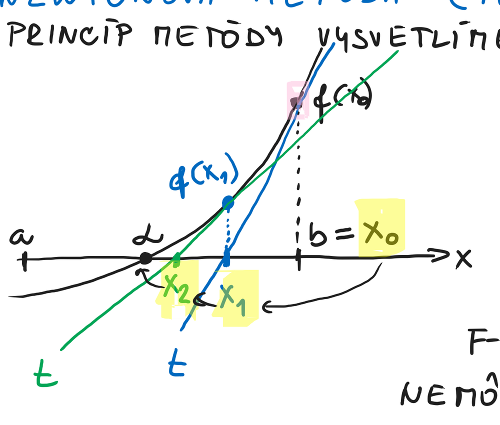
$$m = \min_{\langle 1; 1{,}5 \rangle} |f'(x)| = f'(1) = [3x^2 - 1]_{x=1} = \underline{\underline{2}}$$

ODHAD ABSOL. CHYBY JE

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(c_n)|}{m} = \frac{0{,}0145759}{2} = 0{,}0072879 \doteq 7{,}3 \cdot 10^{-3}$$

NEWTONOVA METÓDA (METÓDA DOTYČNÍC)

PRINCÍP METÓDY VYSVETLÍME NA OBRÁZKU



RIEŠIME ROVNICU $f(x)=0$
BUDEM VYTVÁRAŤ POSTUPNOSŤ ČÍSEL $x_0; x_1; x_2; \dots; x_n$, KTORÉ KONVERGUJÚ KU KOREŇU α

F-CIA $f(x)$ NA SEPAR. INTERVALE $\langle a, b \rangle$ NEMÔŽE BYŤ ĽUBOVOĽNÁ. ABY TÁTO METÓDA FUNGOVALA, F-CIA MUSÍ SPĹŇAŤ URČITÉ PODMIENKY (DOPLNÍME NESKÔR -> VETA 3)

HĽADÁME POSTUPNOSŤ $x_0, x_1, \dots, x_n$, KTOROU SA PRIBLÍŽIME KU KOREŇU α. VYTVORÍME ROVNICU DOTYČNICE KU GRAFU FCIE $f(x)$ V BODE $[x_0; f(x_0)]$ A BUDEME HĽADAŤ BOD x_1, V KTOROM DOTYČNICA PRETNE o_x ($y=0$).

$t: \; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$o_x: \; y = 0$

$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$-f(x_0) = \underline{\underline{x}} \cdot f'(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)$

$x \cdot f'(x_0) = x_0 \cdot f'(x_0) - f(x_0) \quad / \frac{1}{f'(x_0)}$

$x = \frac{x_0 \cdot \cancel{f'(x_0)}}{\cancel{f'(x_0)}} - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$; $\underline{\underline{f'(x_0) \neq 0}}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ZOVŠEOBECNENIE: $\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$

VETA 3: NECH $f(x)$ je SPOJITÁ NA $\langle a, b \rangle$ A SPĹŇA PODMIENKY:

1) $f(a) \cdot f(b) < 0$
2) $f'(x)$ a $f''(x)$ MUSIA BYŤ SPOJITÉ NA $\langle a, b \rangle$ A NESMÚ NA $\langle a, b \rangle$ MENIŤ ZNAMIENKO
3) $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$; x_0 JE NULTÁ APROXIMÁCIA KOREŇA x_0 - ŠTARTOVACÍ BOD

POTOM ITERAČNÝ PROCES $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ KONVERGUJE PRE $x_0 \in \langle a, b \rangle$ KU KOREŇU α.

POZNÁMKA: AK JE V ÚLOHE DANÉ ε => VÝPOČET UKONČÍME, AK PLATÍ $f(x_n - \varepsilon) \cdot f(x_n + \varepsilon) < 0$

AK ε NEPOZNÁME A UROBÍME $\underline{\underline{n}}$ ITERÁCIÍ, ODHAD ABSOLÚTNEJ CHYBY MÔŽEME UROBIŤ TAKTO: $|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$

$m - \min_{\langle a,b \rangle} |f'(x)|$

ZHRNUTIE:

1) SEPARÁCIA KOREŇOV => $\langle a, b \rangle$
2) OVERENIE PODMIENOK KONVERGENCIE $\left\{ \begin{array}{l} f' \text{ a } f'' \text{ na } \langle a, b \rangle \\ \text{NESMÚ MENIŤ ZNAM.} \end{array} \right\}$
AK ÁNO => SKÚSIME ZÚŽENIE $\langle a, b \rangle$
AK TO NEPOMÔŽE => METÓDU NEMÔŽEME POUŽIŤ
3) VOĽBA ŠTART. BODU x_0 $\{ f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \}$
4) VYTVORÍM ITERAČNÝ PROCES $\left\{ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right\}$
5) AK ε - DANÉ => KONČÍM, AK $f(x_n - \varepsilon) \cdot f(x_n + \varepsilon) < 0$
AK n - ITERÁCIÍ => ODHAD ABS. CHYBY $|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$

PRÍKLAD 10: S PRESNOSŤOU $\varepsilon = 10^{-2} = 0{,}01$ NÁJDIME KOREŇ ROVNICE $x^3 - x - 1 = 0$

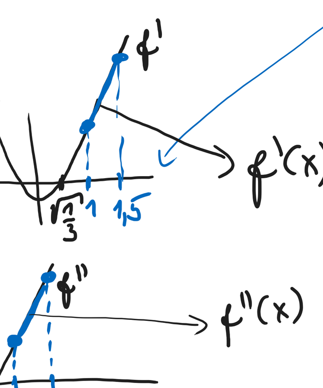
1) SEPARÁCIA KOREŇOV (PRÍKLAD 3) => $\alpha \in \langle 1; 1{,}5 \rangle$

$f(1) = -$
$f(1{,}5) = +$

2) OVEROVANIE PODMIENOK

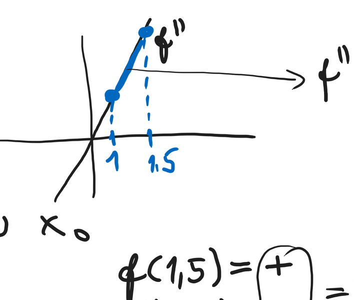
$f(x) = x^3 - x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 1$ $\longrightarrow$



$\longrightarrow$ $f'(x) > 0$ na $\langle 1; 1{,}5 \rangle$ -> NEMENÍ ZNAMIENKO

$f''(x) = 6x$ $\longrightarrow$



$\longrightarrow$ $f''(x) > 0$ na $\langle 1; 1{,}5 \rangle$ -> NEMENÍ ZNAMIENKO

3) VOĽBA ŠTART. BODU x_0

$\left. \begin{array}{l} f(1) = - \\ f''(1) = + \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 \neq 1$

$\begin{array}{l} f(1{,}5) = + \\ f''(1{,}5) = + \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{x_0 = 1{,}5}}$

4) TABUĽKA (ITER. PROCES)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[(x_n)^3 - x_n - 1]}{[3(x_n)^2 - 1]}$$

n	x_n	$f(x_n - \overset{0{,}01}{\varepsilon}) \cdot f(x_n + \varepsilon) < 0$
0	1,5	$\underset{+}{f(1{,}49)} \cdot \underset{+}{f(1{,}51)}$
1	1,347826	$\underset{+}{f(1{,}337\dots)} \cdot \underset{+}{f(1{,}3578\dots)}$
2	1,3252004	$-$ $+$ KONČÍME

$\alpha \approx 1{,}3252004 \pm 10^{-2}$

PRÍKLAD 11: UROBTE ODHAD CHYBY PO 2. ITERÁCII ($n=2$) Z PRÍKLADU 10.

$$|x_2 - \alpha| \leq \frac{|f(x_2)|}{m} \qquad m = \min_{\langle 1; 1{,}5 \rangle} |f'(x)| = 2 \text{ (Z PRÍKLADU 9)}$$

$$|x_2 - \alpha| \leq \frac{|(1{,}3252004)^3 - 1{,}3252004 - 1|}{2} = 0{,}0010291 \doteq 1{,}03 \cdot 10^{-3}$$