ITERAČNÁ METÓDA PRE RIEŠENIE SÚSTAV LINEÁR. ROVNÍC

RIEŠIME SÚSTAVU $\underline{\underline{n}}$ LINEÁRNYCH ROVNÍC S $\underline{\underline{n}}$ NEZNÁMYMI

$$A\cdot\vec{x}=\vec{b} \iff \begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \dots + a_{nn}\cdot x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (*)$$

A – ŠTVORCOVÁ MATICA KOEFICIENTOV
$\bar{x}$ – STĹPCOVÝ VEKTOR NEZNÁMYCH
$\bar{b}$ – STĹPCOVÝ VEKTOR PRAVÝCH STRÁN

UKÁŽEME POSTUP RIEŠENIA SÚSTAVY POMOCOU JAKOBIHO ITERAČNEJ METÓDY, PRIČOM BUDEME PREDPOKLADAŤ, ŽE MATICA A JE REGULÁRNA $\Rightarrow$ SÚSTAVA MÁ PRÁVE 1 RIEŠENIE.

ZÁKLADNÉ POJMY

DEF 1: NECH C JE MATICA TYPU (n,p). NEZÁPORNÉ ČÍSLO $\|C\|_r = \max\limits_{i=1,2,\dots n} \sum\limits_{j=1}^{p} |c_{ij}|$ NAZÝVAME RIADKOVÁ NORMA MATICE C.

NEZÁPORNÉ ČÍSLO $\|C\|_s = \max\limits_{j=1,2,\dots p} \sum\limits_{i=1}^{n} |c_{ij}|$ NAZÝVAME STĹPCOVÁ NORMA.

PRÍKLAD 1: MÁME DANÚ MATICU $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. URČME RIADKOVÚ AJ STĹPCOVÚ NORMU MATICE C.

$$\|C\|_r = \max\{|1|+|2|+|-3|\,;\,0+|2|+|-1|\,;\,|-1|+0+|4|\} = \max\{6\,;\,3\,;\,5\} = 6$$

$$\|C\|_s = \max\{1+0+|-1|\,;\,2+2+0\,;\,|-3|+|-1|+4\} = \max\{2\,;\,4\,;\,8\} = 8$$

DEF 2: MATICU A (→ ŠTVORCOVÁ) NAZÝVAME DIAGONÁLNE DOMINANTNOU, KEĎ JE SPLNENÁ ASPOŇ 1 Z NASLEDUJÚCICH PODMIENOK:

a) PRE KAŽDÉ $i=1,2,\dots n$ JE $\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ (CEZ RIADKY)

b) PRE KAŽDÉ $j=1,2,\dots n$ JE $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}|$ (CEZ STĹPCE)

PRÍKLAD 2: OVERME, ČI JE MATICA $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ RIADKOVO ALEBO STĹPCOVO DOMINANTNÁ.

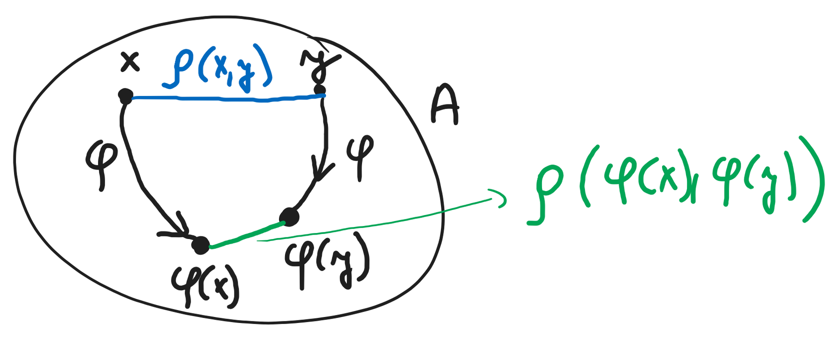
RIADKOVO:
$|2|+|-3| < |7| \Rightarrow 5<7$ ✓
$0+|-1| < |2| \Rightarrow 1<2$ ✓
$|-1|+0 < |-4| \Rightarrow 1<4$ ✓
} MATICA JE RIADKOVO DIAGONÁLNE DOMIN.

STĹPCOVO:
$0+|-1| < |7| \Rightarrow 1<7$ ✓
$|2|+0 < |2| \Rightarrow 2 \not< 2$?!
} MATICA NIE JE STĹPCOVO DIAG. DOM.

SKÔR NEŽ PREJDEME K ITERAČNEJ METÓDE RIEŠENIA SÚSTAV ROVNÍC, OBJASNÍME ĎALŠIE POJMY V ZJEDNODUŠENEJ PODOBE (PLATNÉ PRE JEDNU ROVNICU)

DEF 3: NECH (X,ρ) JE METRICKÝ PRIESTOR.
X – NEJAKÁ MNOŽINA
ρ – METRIKA = NEJAKÁ VZDIALENOSŤ

HOVORÍME, ŽE ZOBRAZENIE $\varphi: X \to X$ JE KONTRAKTÍVNE NA MNOŽINE $A\subset X$, AK $\exists$ ČÍSLO $\lambda\in(0,1)$ TAKÉ, ŽE PLATÍ: $\forall\, x,y\in A$ JE $\rho(\varphi(x);\varphi(y)) \le \lambda\cdot\rho(x,y)$



VETA 1 (BANACHOVA VETA O PEVNOM BODE)
NECH (X,ρ) JE ÚPLNÝ METRICKÝ PRIESTOR A NECH ZOBRAZENIE $\varphi: X\to X$ JE KONTRAKTÍVNE NA MNOŽINE X. POTOM $\exists$ PRÁVE JEDEN PEVNÝ BOD $\alpha\in X$ ZOBRAZENIA φ.
TENTO BOD α MÔŽEME URČIŤ TAKTO:
1) ZVOLÍME ĽUBOVOĽNÉ $x_0 \in X$
2) DEFINUJEME POSTUPNOSŤ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ BODOV $x_n\in X$ VZORCOM

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad \text{PRE } n=0,1,2,\dots$$

POTOM PLATÍ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

VETA 2: AK φ JE KONTRAKTÍVNE ZOBRAZENIE S KONŠTANTOU $\lambda\in(0,1)$, PLATÍ TAKÝTO ODHAD:

$$\rho(x_n,\alpha) \le \frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\rho(x_n;x_{n-1})$$

V INOM TVARE:

$$|x_n-\alpha| \le \frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot|x_n-x_{n-1}| \quad ; \quad |\varphi'(x)| < \lambda < 1$$

TOTO PREDSTAVUJE ĎALŠÍ (INÝ) VZŤAH PRE ODHAD CHYBY PRI ITERAČNEJ METÓDE (PLATÍ PRE 1 ROVNICU)

MY IDEME RIEŠIŤ SÚSTAVU ROVNÍC $\Rightarrow$ VYŠŠIE UVEDENÉ POZNATKY VYUŽIJEME V MODIFIKOVANEJ PODOBE PRI RIEŠENÍ SÚSTAV.