JAKOBIHO ITERAČNÁ METÓDA

SÚSTAVU $A\cdot\bar{x}=\bar{b}$ PREPÍŠEME NA TVAR $\bar{X}=\underbrace{\alpha\bar{X}+\bar{\beta}}_{\varphi(\bar{X})}$

VYTVORÍME ITERAČNÝ PROCES

$\bar{X}^{(n+1)}=\alpha\cdot\bar{X}^{(n)}+\bar{\beta}$ (♡)

TENTO PROCES BUDE KONVERGOVAŤ, AK $\varphi(\bar{X})$ BUDE KONTRAKTÍVNE.
ZOBRAZENIE $\varphi(\bar{X})$ BUDE KONTRAKTÍVNE, $\boxed{\text{AK } \|\alpha\|<1.}$

PLATÍ: NECH $\|\alpha\|<1$. POTOM SÚSTAVA $\bar{x}=\alpha\bar{x}+\bar{\beta}$ MÁ PRÁVE 1 RIEŠENIE $\bar{x}^*$, PRE KTORÉ PLATÍ ITERAČNÝ PROCES (♡). TENTO PROCES KONVERGUJE K VEKTORU $\bar{x}^*$ NEZÁVISLE OD VOĽBY ZAČIATOČNEJ APROXIMÁCIE $\bar{x}^{(0)}$.
AK $\bar{x}^{(n)}$ JE n-TÁ APROXIMÁCIA RIEŠENIA, POTOM ODHAD ABSOL. CHYBY JE:

$$\|\bar{x}^{(n)}-\bar{x}^*\|\leq\frac{\|\alpha\|}{1-\|\alpha\|}\cdot\|\bar{x}^{(n)}-\bar{x}^{(n-1)}\| \quad ; n=1,2,\dots$$

PLATÍ: AK MATICA A V SÚSTAVE (*) JE DIAGONÁLNE DOMINANTNÁ, POTOM ITERAČNÝ PROCES (♡) KONVERGUJE ($\|\alpha\|<1$).

PRÍKLAD 3: RIEŠME SÚSTAVU ROVNÍC. UROBME 2 KROKY A ODHADNIME CHYBU.

$$\begin{aligned} x+8y-z&=-2\\ 10x+y+z&=-9\\ -x-y+8z&=9\end{aligned} \longrightarrow A=\begin{pmatrix}1&8&-1\\10&1&1\\-1&-1&8\end{pmatrix} \rightarrow \text{NIE JE DIAG. DOM.}$$

$1>8+|-1|$
$1>10+1$
$8>|-1|+|-1|$ ✓

1) SÚSTAVU UPRAVÍME TAK, ABY MATICA A BOLA DIAGONÁLNE DOMINANTNÁ (STAČÍ VZÁJOMNÁ VÝMENA RIADKOV)

$$\begin{aligned} 10x+y+z&=-9\\ x+8y-z&=-2\\ -x-y+8z&=9\end{aligned} \qquad A=\begin{pmatrix}10&1&1\\1&8&-1\\-1&-1&8\end{pmatrix}$$

2) VYTVORÍME ITERAČNÝ PROCES

$$\begin{aligned} x^{(n+1)}&=-0{,}1y^{(n)}-0{,}1z^{(n)}-0{,}9\\ y^{(n+1)}&=-0{,}125x^{(n)}+0{,}125z^{(n)}-0{,}25\\ z^{(n+1)}&=0{,}125x^{(n)}+0{,}125y^{(n)}+1{,}125\end{aligned}$$

$10x+y+z=-9$
$10x=-y-z-9 \quad /\frac{1}{10}$
$x=-0{,}1y-0{,}1z-0{,}9$

$\bar{x}^{(n+1)}=\varphi(\bar{x}^{(n)})$

$\bar{x}=\alpha\cdot\bar{x}+\bar{\beta}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-0{,}1&-0{,}1\\-0{,}125&0&0{,}125\\0{,}125&0{,}125&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0{,}9\\-0{,}25\\1{,}125\end{pmatrix}$$

$$\|\alpha\|_r=\max\{0+|-0{,}1|+|-0{,}1|;|-0{,}125|+0+0{,}125;0{,}125+0{,}125+0\}=$$
$$=\max\{0{,}2;0{,}25;0{,}25\}=0{,}25<1$$

3) VYPOČÍTAME $\|\alpha\|_r=0{,}25<1$

4) VYTVORÍME TABUĽKU (ZA NULTÚ APROXIMÁCIU VEZMEME VEKTOR $\bar{\beta}$)

n	$x^{(n)}$	$y^{(n)}$	$z^{(n)}$
0	−0,9	−0,25	+1,125
1	−0,9875	0,003125	0,98125
2	−0,9984375	−0,00390625	1,001953125

$$\|\bar{x}^{(2)}-x^{(1)}\|=\max\{|x^{(2)}-x^{(1)}|;|y^{(2)}-y^{(1)}|;|z^{(2)}-z^{(1)}|\}=$$
$$\max\{|-0{,}9984375+0{,}9875|;|-0{,}00390625-0{,}003125|;|1{,}001953125-0{,}98125|\}=$$
$$=\max\{0{,}0109375;0{,}0070312;0{,}0207031\}=0{,}0207031$$

5) ODHADNEME CHYBU, KTOREJ SME SA DOPUSTILI, KEĎ SME SKONČILI V 2. KROKU

$$\|\bar{x}^{(2)}-\bar{x}^*\|\leq\frac{\|\alpha\|}{1-\|\alpha\|}\cdot\|\bar{x}^{(2)}-\bar{x}^{(1)}\|=\frac{0{,}25}{1-0{,}25}\cdot0{,}0207031\doteq0{,}006901\doteq7\cdot10^{-3}$$

$\Rightarrow$ ZÁVER: $\bar{x}^*\approx\begin{pmatrix}-0{,}9984375\\-0{,}0039062\\1{,}0019531\end{pmatrix}\pm7\cdot10^{-3}$

PRÍKLAD 4: S PRESNOSŤOU $\varepsilon=10^{-2}$ RIEŠME SÚSTAVU Z PRÍKLADU 3.

1) ZABEZPEČIŤ, ABY MATICA A BOLA DIAGON. DOMIN. (PRÍKLAD 3)
2) VYROBIŤ ITERAČNÝ PROCES
3) VYPOČÍTAŤ $\|\alpha\|$
$\|\alpha\|_r=0{,}25$
4) ZISTIŤ, KEDY VÝPOČET UKONČIŤ ($\|\bar{x}^{(n)}-\bar{x}^*\|<\varepsilon$)

$$\|\bar{x}^{(n)}-\bar{x}^*\|\leq\frac{\|\alpha\|}{1-\|\alpha\|}\cdot\|\bar{x}^{(n)}-\bar{x}^{(n-1)}\|<\varepsilon$$

KONČÍME, AK $\|\bar{x}^{(n)}-\bar{x}^{(n-1)}\|<\boxed{\frac{1-\|\alpha\|}{\|\alpha\|}\cdot\varepsilon}=\frac{1-0{,}25}{0{,}25}\cdot0{,}01=0{,}03$

5) VYTVORENIE TABUĽKY

n	$x^{(n)}$	$y^{(n)}$	$z^{(n)}$	$\|\bar{x}^{(n)}-\bar{x}^{(n-1)}\|<0{,}03$
0	−0,9	−0,25	1,25	
1	−0,9875	0,003125	0,98125	$\max\{0{,}08..;\ ;\ \}\not<0{,}03$
2	−0,9984375	−0,0039062	1,0019531	$\max\{0{,}01..;0{,}007..;0{,}02..\}=0{,}02<0{,}03$

$$\bar{x}^*\approx\begin{pmatrix}-0{,}9984375\\-0{,}0039062\\1{,}0019531\end{pmatrix}\pm10^{-2}$$