

Numerické metódy riešenia

A. V nasledujúcich úlohách separujte všetky reálne korene a Newtonovou alebo iteračnou metódou (podľa zadania) vypočítajte daný koreň s presnosťou ε .

po zaokruhlení

- | | | |
|---|---------------------------------------|--------|
| 1. $4x^3 - x^2 + 1 = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$; najmenší koreň | [1 koreň, $\alpha \approx -0,55682$] | -0,557 |
| 2. $2x^4 + 4x - 3 = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$; najväčší koreň | [2 korene, $\alpha \approx 0,65694$] | 0,657 |
| 3. $e^{2x} + 3x - 3 = 0$, $\varepsilon = 10^{-2}$; najväčší koreň | [1 koreň, $\alpha \approx 0,3416$] | 0,34 |
| 4. $\ln x + 2x - 4 = 0$, $\varepsilon = 10^{-2}$; najväčší koreň | [1 koreň, $\alpha \approx 1,727$] | 1,73 |
| 5. $e^x + x - 2 = 0$, $\varepsilon = 10^{-2}$; najväčší koreň | [1 koreň, $\alpha \approx 0,443$] | 0,44 |
| 6. $x^3 - 7x - 7 = 0$, $\varepsilon = 10^{-2}$; najväčší koreň | [1 koreň, $\alpha \approx 3,0491$] | 3,05 |
| 7. $x^4 - 7x - 7 = 0$, $\varepsilon = 10^{-2}$; najväčší koreň | [2 korene, $\alpha \approx 2,17075$] | 2,17 |
| 8. $x^4 + 2x - 4 = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$; najmenší koreň | [2 korene, $\alpha \approx -1,6430$] | -1,643 |
| 9. $x^4 - 5x^2 + 3 = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$; najväčší koreň | [4 korene, $\alpha \approx 2,07488$] | 2,075 |
| 10. $x^4 + 6x - 3 = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$; najväčší koreň | [2 korene, $\alpha \approx 0,49035$] | 0,490 |

B. Newtonovou metódou riešte danú sústavu rovníc z daného počiatočného bodu. Urobte dve iterácie.

1.
$$\begin{cases} x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases} \quad (x^{(0)}, y^{(0)}) = (2, 1); \quad [(x^{(1)}, y^{(1)}) = (1,6129; 1,6774), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}) = (1,5139, 1,5610)]$$
2.
$$\begin{cases} 9x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ 2xy + 4y - 5 = 0 \end{cases} \quad (x^{(0)}, y^{(0)}) = (1; 0,5); [(x^{(1)}, y^{(1)}) = (1,02336; 0,82944), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}) = (1,01728, 0,82857)]$$
3.
$$\begin{cases} 5xy + 4y^2 - 3 = 0 \\ x^2y + x - y = 0 \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (0, 2); [(x^{(1)}, y^{(1)}) = (0,73077; 0,73077), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}) = (0,51769, 0,62259)]$$
4.
$$\begin{cases} xy^2 - x + 1 = 0 \\ xy^3 - 3x^2y + 9 = 0 \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (2, 1); \quad [(x^{(1)}, y^{(1)}) = (2,0455; 0,75), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}) = (2,1209, 0,7265)]$$
5.
$$\begin{cases} x^2y - xy + 1 = 0 \\ y^3 - 3xy + 5 = 0 \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (2, 1). \quad [(x^{(1)}, y^{(1)}) = (-1, 4), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}) = (-0,495, 2,53)]$$

C. Pre hodnoty zadané tabuľkou nájdite Lagrangeov interpolačný polynóm a vypočítajte hodnotu funkcie v danom bode.

1.

x	-1	0	1	3
y	-14	-6	-8	6

; $x = 2$. [$2x^3 - 5x^2 + x - 6$; $f(2) \approx -8$]
2.

x	-2	-1	1	2
y	-6	6	6	30

; $x = 0$; [$3x^3 + 2x^2 - 3x + 4$; $f(0) \approx 4$]
3.

x_i	-1	0	1	3
y_i	6	1	0	10

; $x = 0,5$. [$2x^2 - 3x + 1$; $f(0,5) \approx 0$]
4.

x	-2	0	3
y	26	6	21

; $x = 1$. [$3x^2 - 4x + 6$; $f(1) \approx 5$]
5.

x	-2	-1	1
y	23	11	-1

; $x = 0,5$. [$2x^2 - 6x + 3$; $f(0,5) \approx 0,5$]
6.

x	-1	1	3
y	-8	0	32

; $x = 2$. [$3x^2 + 4x - 7$; $f(2) \approx 13$]

D. Pre hodnoty zadané tabuľkou určte metódou najmenších štvorcov optimálne koeficienty a_0 a a_1 v danej závislosti.

1.

x	1	3	4	6
y	2,0	15,3	18,5	27,8

 v závislosti $y(x) = a_0 \cdot x + a_1 \cdot x^2$; [$y = 4,546x + 0,0223x^2$]
2.

x	0	1	2	3	4
y	2,1	3,5	5	6,7	8

 v závislosti $y(x) = a_0 + a_1 \cdot x$; [$y = 2,06 + 1,5x$]
3.

x	1	3	4
y	6	2	1

 v závislosti $y = a_0 \cdot \frac{1}{x} + a_1 \cdot x$; [$y = 6,1278 \cdot \frac{1}{x} - 0,0917x$]

$$4. \frac{x}{y} \left\| \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline -2 & 22 & 70 & 103 \end{array} \right. \text{ v závislosti } y(x) = a_0 \cdot x^2 + a_1 \quad [y = 3x^2 - 5];$$

$$5. \frac{x}{y} \left\| \begin{array}{c|c|c|c} 0,78 & 1,56 & 2,34 & 3,12 \\ \hline 2,5 & 1,2 & 1,12 & 2,25 \end{array} \right. \text{ v závislosti } y = a_0 + a_1 \cdot x \cos 2x. \quad [y = 1,689 + 0,2107 \cdot x \cos 2x]$$

$$6. \frac{x}{y} \left\| \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline -5,0 & 3,7 & 10,2 & 13,3 \end{array} \right. \text{ v závislosti } y(x) = a_0 + a_1 \cdot e^x. \quad [y = 0,29994 + 0,036544 \cdot e^x]$$

$$7. \frac{x}{y} \left\| \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 2,0 & 2,7 & 2,9 & 3,6 \end{array} \right. \text{ v závislosti } y(x) = a_0 \cdot \sqrt{x} + a_1. \quad [y = 1,07232 \cdot \sqrt{x} + 0,87476]$$

$$8. \frac{x}{y} \left\| \begin{array}{c|c|c|c} -2 & -1 & 1 & 3 \\ \hline 8,1 & 5,5 & 3,5 & 6,5 \end{array} \right. \text{ v závislosti } y(x) = a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x. \quad [y = 1,3112x^2 - 1,5742x]$$

E. Lichobežníkovou metodou vypočítajte nasledujúce integrály pre daný počet delení a odhadnite chybu výpočtu.

$$1. \int_0^{1,5} e^{\frac{x^2}{2}} dx, \quad n = 6; \quad [L(6) = 2,340677; R_L(6) = 0,0782];$$

$$2. \int_1^3 x \cdot \ln x dx, \quad n = 8; \quad [L(8) = 2,94947; R_L(8) = 0,0104];$$

$$3. \int_1^2 x^2 \cdot \ln x dx, \quad n = 5; \quad [L(5) = 1,08319; R_L(5) = 0,01462];$$

$$4. \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx, \quad n = 4 \quad [L(4) = 0,26916; R_L(4) = 0,0104];$$

$$5. \int_1^3 \frac{1}{(1+3x)^2} dx, \quad n = 5; \quad [L(5) = 0,060323; R_L(5) = 0,0189];$$

F. Lichobežníkovou metodou vypočítajte nasledujúce integrály s danou presnosťou ε .

$$1. \int_1^3 \frac{1}{(1+2x)^2} dx, \quad \varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}; \quad [n = 8; L(8) = 0,09596]$$

$$2. \int_1^4 \frac{1}{(1+x)^2} dx, \quad \varepsilon = 0,02; \quad [n = 6; L(6) = 0,30408]$$

$$3. \int_1^5 \frac{1}{1+5x} dx, \quad \varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}; \quad [n = 8; L(8) = 0,29596]$$

$$4. \int_0^1 e^{x^2} dx, \quad \varepsilon = 0,05; \quad [n = 6; L(6) = 1,4752]$$

$$5. \int_1^4 \sqrt{1+3x} dx, \quad \varepsilon = 0,01; \quad [n = 8; L(8) = 8,63435]$$

G. Simpsonovou metodou vypočítajte nasledujúce integrály pre daný počet delení a odhadnite chybu výpočtu.

$$1. \int_0^1 e^{2x} dx, \quad n = 8 \quad [S(8) = 3,19459; R_S(8) = 0,0016]$$

$$2. \int_1^3 x \cdot \ln x dx, \quad n = 8; \quad [S(8) = 2,94377; R_S(8) = 8,68 \cdot 10^{-5}]$$

$$3. \int_1^3 x^2 \cdot \ln x dx, \quad n = 8; \quad [S(8) = 6,99868; R_S(8) = 8,68 \cdot 10^{-5}]$$

$$4. \int_1^3 \sqrt{1+2x} dx, \quad n = 8; \quad [S(8) = 6,66286; R_S(8) = 1,4 \cdot 10^{-5}]$$

$$5. \int_2^4 \ln(x+2) dx, \quad n = 10; \quad [S(10) = 3,20533; R_S(10) = 1,67 \cdot 10^{-6}]$$