Numerické metódy, pravdepodobnosť a matematická štatistika

Ján BUŠA — Viktor PIRČ — Štefan SCHRÖTTER

Košice 2006

RECENZOVALI: Prof. RNDr. Jozef Doboš, CSc.
Doc. RNDr. Vladimír Penjak, CSc.

Prvé vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.
Spracované programom pdfeTEX.

ISBN 80-8073-633-2

Obsah

Úvod

Táto vysokoškolská učebnica je určená pre potreby vyučovania predmetu Numerická matematika, pravdepodobnosť a matematická štatistika v druhom ročníku bakalárskeho štúdia Fakulty elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach.

Učebnica nadväzuje na obsah matematických predmetov prvého ročníka.

Obsah učebnice je určený osnovami predmetu, ktoré boli vypracované na základe požiadaviek odborných katedier. Cieľom je uviesť základné metódy, potrebné pre ďalšie štúdium odborných predmetov. Autori sa zamerali aj na použitie výpočtovej techniky ako v časti numerickej matematiky, tak aj v pravdepodobnosti a štatistike.

Pre názornejší výklad jednotlivých metód sú riešené jednoduchšie príklady. Okrem toho sú v závere každej kapitoly uvedené úlohy na samostatné riešenie.

Vhodným doplnkom na precvičenie látky sú aj ďalšie materiály, prístupné na www stránke Katedry matematiky FEI TU `http://www.tuke.sk/fei-km/` v časti Predmety/ /Výučba. Prílohu tvoria ukážky riešenia úloh v systéme MATLAB, ktorý sa používa vo výučbe na FEI TU. Namiesto MATLABu je možné použiť programy s otvoreným zdrojovým kódom (Open source), napríklad Octave (Buša, 2006), Pylab (Kaukič, 2006) alebo Scilab (Pribiš, 2006).

Touto cestou sa chceme poďakovať recenzentom Prof. RNDr. Jozefovi Dobošovi, CSc. a Doc. RNDr. Vladimírovi Penjakovi, CSc. za starostlivé prečítanie učebného textu a za cenné pripomienky, ktoré prispeli ku jeho skvalitneniu.

Autori

1. Numerické riešenie nelineárnych rovníc

V tejto kapitole uvádzame najjednoduchšie metódy riešenia jednej nelineárnej rovnice. Banachova veta o pevnom bode je základom na riešenie mnohých, nielen numerických, úloh. Pri riešení jednej rovnice vedie k metóde jednoduchej iterácie, ktorú porovnáme s Newtonovou metódou dotyčníc.

1.1. Formulácia úlohy

V tejto kapitole sa budeme zaoberať určovaním reálnych koreňov rovnice

$$f(x) = 0, \tag{1.1}$$

kde f je reálna funkcia reálnej premennej.

Číslo α, pre ktoré $f(\alpha) = 0$, nazývame koreňom rovnice $f(x) = 0$. Ak je funkcia f polynómom, nazývame rovnicu $f(x) = 0$ algebrickou rovnicou.

Na riešenie algebrických rovníc sú vypracované špeciálne metódy. U väčšiny rovníc dokážeme vypočítať iba približnú hodnotu koreňa α. Ak

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0,$$

potom hovoríme, že α je k-násobným koreňom rovnice (1.1).

Pri riešení rovnice (1.1) je vhodný nasledujúci postup:

1. Určíme interval (a, b), v ktorom ležia všetky jej reálne korene.
2. Určíme počet koreňov ležiacich v intervale (a, b).
3. Nájdeme intervaly (a_i, b_i) také, že $f(\alpha_i) = 0$ (separujeme korene), pričom $\alpha_i \in (a_i, b_i)$ a pre každé $x \in (a_i, b_i) : f(x) \neq 0$ pre $x \neq \alpha_i$.
4. Použijeme približné metódy na výpočet koreňov.

5. Urobíme odhad absolútnej chyby vypočítaného koreňa.

Pri separácii koreňov je možné použiť známu vetu z matematickej analýzy:

Veta 1.1 (Bolzanova). Nech funkcia $f : \mathbb{R} \supset A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle \subset A$ a platí $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje aspoň jedno číslo $c \in (a, b)$ také, že $f(c) = 0$.

Dôsledok. Nech pre x_n platí

$$f(x_n - \varepsilon) \cdot f(x_n + \varepsilon) < 0.$$

Potom sa v intervale $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$ nachádza koreň α, teda x_n je riešenie úlohy s presnosťou ε. Tento test obyčajne nazývame $\pm\varepsilon$-test.

Poznámka 1.1. Rovnica $f(x) = 0$ môže mať v intervale (a, b) nulový bod aj v prípade, keď $f(a)f(b) > 0$.

Príklad 1.1. Rovnica $x^2 - 4 = 0$ má v intervale $(-3; 3)$ korene -2, 2, hoci $f(-3) \cdot f(3) >$ > 0.

Na odhad absolútnej chyby približnej hodnoty koreňa môžeme použiť aj túto vetu:

Veta 1.2. Nech α je presná hodnota a x_k približná hodnota koreňa rovnice (1.1). Nech obe tieto hodnoty ležia v intervale (a, b) a $|f'(x)| \geqq m > 0$ pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$. Potom platí odhad

$$|\alpha - x_k| \leqq \frac{|f(x_k)|}{m}. \tag{1.2}$$

Dôkaz. Podľa vety o strednej hodnote a vzhľadom na predpoklady vety, existuje $c \in (a, b)$, pre ktoré platí

$$f(x_k) - f(\alpha) = f'(c)(x_k - \alpha).$$

Pretože α je koreňom rovnice $f(x) = 0$ je $f(\alpha) = 0$. Nakoľko na intervale $\langle a, b\rangle$ je $|f'(x)| \geqq m > 0$ po úprave dostaneme vzťah (1.2). □

Príklad 1.2. Nech $x_k = 1{,}22$ je približná hodnota koreňa α rovnice

$$f(x) = x^4 - x - 1 = 0.$$

Odhadnime absolútnu chybu tejto aproximácie.

Riešenie. Funkcia $f'(x) = 4x^3 - 1$ je kladná a rastúca na intervale $\langle 1{,}22; 1{,}23\rangle$. Pretože je súčin $f(1{,}22)f(1{,}23) < 0$, presná hodnota koreňa α leží v intervale $(1{,}22; 1{,}23)$ a najmenšia hodnota prvej derivácie v tomto intervale je $m = 4(1{,}22)^3 - 1 > 6{,}263$. Potom platí

$$|\alpha - 1{,}22| \leqq \frac{f(1{,}22)}{m} \leqq \frac{0{,}0047}{6{,}263} \approx 7 \cdot 10^{-4}.$$

1.2. Grafický odhad riešenia rovníc

Reálne korene rovnice $f(x) = 0$ môžeme približne určiť graficky ako x-ové súradnice priesečníka grafu funkcie $y = f(x)$ s osou x. Ak rovnicu $f(x) = 0$ nahradíme ekvivalentnou rovnicou $g(x) = h(x)$, kde $g(x)$ a $h(x)$ sú jednoduchšie funkcie, než je funkcia $f(x)$, potom približné hodnoty reálnych koreňov rovnice $f(x) = 0$ nájdeme ako x-ové súradnice priesečníkov grafov funkcií $y = g(x)$ a $y = h(x)$.

Príklad 1.3. Určme približné hodnoty koreňov rovnice $e^x - x - 2 = 0$.

Riešenie. Približné hodnoty reálnych koreňov určíme pomocou grafov funkcií $g(x) = e^x$, $h(x) = x + 2$. Je zrejmé, že daná rovnica má dva reálne korene $x_1 \in (-2; -1)$, $x_2 \in (1; 2)$.

1.3. Metóda polovičného delenia intervalu (bisekcie)

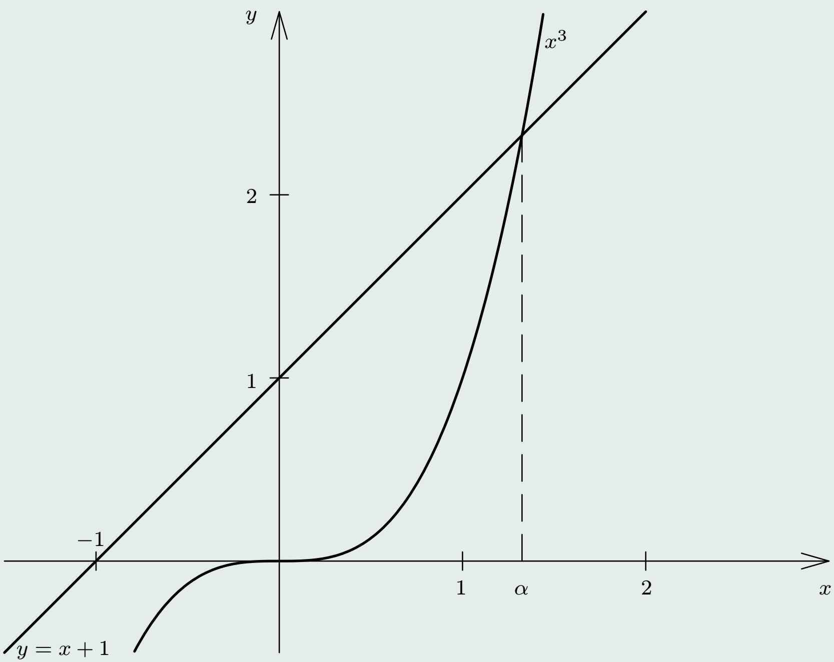
Predpokladajme, že rovnica $f(x) = 0$ má práve jeden koreň α v intervale (a, b). Definujme postupnosť intervalov $\langle a_n, b_n\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$ predpisom:

1. $\langle a_1, b_1\rangle = \langle a, b\rangle$.
2. Nech je definovaný interval $\langle a_n, b_n\rangle$, pričom $f(a_n)f(b_n) < 0$. Nech
$$c_n = (a_n + b_n)/2. \tag{1.3}$$
3. Ak je $f(c_n) = 0$, potom je c_n koreňom rovnice. Ak je $f(c_n) \neq 0$ a $f(a_n)f(c_n) < 0$ položíme $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$, ak platí opačná nerovnosť, t. j. $f(a_n)f(c_n) > 0$ položíme $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$. Ak má postupnosť (c_n) konečný počet členov, je posledný člen koreňom rovnice $f(x) = 0$. Ak je postupnosť (c_n) nekonečná, potom má limitu a platí
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha.$$
Pre odhad absolútnej chyby koreňa α platí
$$|c_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^{n+1}}. \tag{1.4}$$

Ak máme vypočítať koreň α s presnosťou $\varepsilon > 0$, ukončíme proces delenia intervalu, ak $|b_n - a_n| < 2\varepsilon$ a za aproximáciu koreňa α vezmeme číslo $(a_n + b_n)/2$.

Príklad 1.4. Metódou polovičného delenia intervalu, s presnosťou 0,005, vypočítajme reálny koreň rovnice $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

Riešenie. Naprv uskutočníme grafický odhad koreňov. Nech $h(x) = x + 1$, $g(x) = x^3$. Grafy týchto funkcií majú jeden spoločný bod, ktorého x-ová súradnica je z intervalu



Obr. 1.1: Grafický odhad koreňov

$(1; 1{,}5)$ (pozri obrázok 1.1). Skutočne $f(1) \cdot f(1{,}5) < 0$, čo znamená, že v tomto intervale leží reálny koreň danej rovnice. Potom $a_1 = 1$, $b_1 = 1{,}5$. Ďalšie hodnoty, zaokrúhlené na štyri desatinné miesta, sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

k	a_k	b_k	c_k	$f(a_k)f(c_k)$
0	1	1,5	1,25	$+$
1	1,25	1,5	1,375	$-$
2	1,25	1,375	1,3125	$+$
3	1,3125	1,375	1,3438	$-$
4	1,3125	1,3438	1,3282	$-$
5	1,3125	1,3282	1,3204	$+$
6	1,3204	1,3282		

Pretože $(1{,}3282 - 1{,}3204) < 2 \cdot 0{,}005$ a $f(1{,}3282)f(1{,}3204) < 0$, môžeme aproximovať koreň pomocou $\bar{x} = (1{,}3204 + 1{,}3282)/2 = 1{,}3243$.

1.4. Banachova veta o pevnom bode

Pri riešení niektorých typov rovníc sa môžeme stretnúť s úlohou nájsť riešenie rovnice $T(p) = p$, kde $T : P \to P$ a P je úplný, normovaný, lineárny priestor (Banachov priestor). Bod $p^* \in P$, pre ktorý platí $T(p^*) = p^*$, sa nazýva pevný bod zobrazenia T. Efektívnou metódou určenia pevného bodu je metóda postupných aproximácií.

Predpokladajme, že $T : P \supset A \to P$. Zvoľme $p_0 \in A$ (p_0 je začiatočná hodnota aproximácie) a nájdeme postupne hodnoty

$$p_1 = T(p_0), \quad p_2 = T(p_1), \quad \dots, \quad p_{n+1} = T(p_n), \ \dots .$$

Ak postupnosť aproximácií $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $p^* \in A$ a ak je zobrazenie T spojité na A, tak limitným prechodom v iteračnej rovnici

$$p_{n+1} = T(p_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

pre $n \to \infty$ dostávame

$$T(p^*) = p^*.$$

V tomto prípade hovoríme, že prostý iteračný proces konverguje.

Skôr, než uvedieme vetu, ktorá zaručuje konvergenciu postupnosti $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, zavedieme pojem kontraktívneho zobrazenia.

Definícia 1.1. Nech (P, ρ) je metrický priestor. Hovoríme, že zobrazenie $T : P \to P$ je kontraktívne na množine $A \subset P$, ak existuje $\lambda \in (0, 1)$ také, že platí

$$p, q \in A \;\Rightarrow \rho(T(p), T(q)) \leqq \lambda \rho(p, q). \tag{1.5}$$

Veta 1.3 (Banachova veta o pevnom bode). Nech (P, ρ) je úplný metrický priestor a nech $T : P \to P$ je na P kontraktívne. Potom existuje práve jeden pevný bod $p^* \in P$ zobrazenia T.
Tento bod môžeme určiť takto: Zvolíme ľubovoľne $p_0 \in P$ a definujeme postupnosť $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ bodov $p_n \in P$ vzorcom

$$p_{n+1} = T(p_n) \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, \dots . \tag{1.6}$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p^*.$$

Ak je T kontraktívne zobrazenie s konštantou $\lambda \in (0, 1)$, platí odhad

$$\rho(p^*, p_n) \leqq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(p_0, p_1). \tag{1.7}$$

Dôkaz. Dokážeme, že postupnosť $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a konverguje k pevnému bodu zobrazenia T. Pre $n \in N$, $m \in N$ odhadneme $\rho(p_{n+m}, p_n)$. Vzhľadom na kontraktívnosť zobrazenia T dostávame

$$\rho(p_2, p_1) = \rho(T(p_1), T(p_0)) \leqq \lambda\rho(p_1, p_0),$$

$$\rho(p_3, p_2) = \rho(T(p_2), T(p_1)) \leqq \lambda\rho(p_2, p_1) \leqq \lambda^2\rho(p_1, p_0).$$

Indukciou dostávame

$$\rho(p_{i+1}, p_i) \leqq \lambda^i\rho(p_1, p_0) \quad \text{pre} \quad i = 0, 1, \dots .$$

Použitím trojuholníkovej nerovnosti dostávame

$$\rho(p_{n+m}, p_n) \leqq \rho(p_n, p_{n+1}) + \dots + \rho(p_{n+m-1}, p_{n+m}) \leqq$$

$$\leqq \lambda^n(1 + \lambda + \dots + \lambda^{m-1})\rho(p_1, p_0) = \lambda^n\frac{1-\lambda^m}{1-\lambda}\rho(p_1, p_0) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(p_1, p_0),$$

a takto pre $\lambda \in (0, 1)$ je pre $n \to \infty$ $\rho(p_{n+m}, p_n) \to 0$.

To znamená, že postupnosť $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a pretože priestor P je úplný, konverguje k bodu $p^* \in P$, t. j. pre $m \to \infty$, n pevné a $\lambda \in (0,1)$ dostávame

$$\rho(p^*, p_n) \leqq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(p_1, p_0),$$

čo je odhad (1.7).

Dokážeme, že p^* je pevný bod zobrazenia T. Podľa trojuholníkovej nerovnosti platí

$$\rho(p^*, T(p^*)) \leqq \rho(p^*, p_n) + \rho(p_n, T(p^*)) =$$
$$= \rho(p^*, p_n) + \rho(T(p_{n-1}), T(p^*)) \leqq \rho(p^*, p_n) + \lambda\rho(p_{n-1}, p^*) \to 0$$

pre $n \to \infty$, pretože $p_n \to p^*$. Odtiaľ dostávame $\rho(p^*, T(p^*)) = 0$, čiže platí $T(p^*) = p^*$.

Ďalej ukážeme, že T má jediný pevný bod. Predpokladajme, že p^*, q^* sú dva rôzne pevné body zobrazenia T. Potom je

$$0 < \rho(p^*, q^*) = \rho(T(p^*), T(q^*)) \leqq \lambda\rho(p^*, q^*) < \rho(p^*, q^*),$$

čo je spor. Teda zobrazenie T má jediný pevný bod p^*. □

Poznámka 1.2. Namiesto odhadu (1.7) používame odhad v tvare

$$\rho(p^*, p_n) \leqq \frac{\lambda}{1-\lambda}\rho(p_n, p_{n-1}), \tag{1.8}$$

ktorý vyplýva z nerovností: $\rho(p^*, p_n) \leqq \lambda\,\rho(p^*, p_{n-1}) \leqq \lambda\,(\rho(p^*, p_n) + \rho(p_n, p_{n-1}))$.

1.5. Metóda prostej iterácie

Táto metóda je založená na konštrukcii postupnosti iterácií rovnakým spôsobom ako v Banachovej vete.

Hľadáme koreň rovnice $f(x) = 0$, ktorý leží v intervale $\langle a, b\rangle$. Rovnicu

$$f(x) = 0$$

vieme vždy prepísať na tvar

$$x = \varphi(x)$$

tak, aby $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ bola kontraktívna funkcia na $\langle a, b\rangle$, t. j.

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqq \lambda|x - y| = \lambda\rho(x, y)$$

pre $x, y \in \langle a, b\rangle$ a zároveň $\varphi(x)$, $\varphi(y) \in \langle a, b\rangle$.

Poznámka 1.3. Rovnica $x = \varphi(x)$ vo všeobecnosti nie je vždy ekvivalentná s pôvodnou rovnicou. Platí, že každé riešenie rovnice $x = \varphi(x)$ je riešením rovnice $f(x) = 0$, ale nie naopak! Napríklad rovnicu $x^2 - x - 2 = 0$ môžeme prepísať na tvar $x = -\sqrt{x + 2}$, ktorá má však len jeden koreň $x = -1$.

Nech funkcia φ je na $\langle a, b\rangle$ diferencovateľná. Potom podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote existuje $\xi \in (a, b)$ také, že

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y).$$

Ak existuje kladné číslo M také, že

$$M = \sup |\varphi'(x)| \quad \text{pre} \quad x \in \langle a, b\rangle,$$

tak je

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqq M|x - y|.$$

Ak je číslo $M < 1$, môžeme ho zobrať za koeficient kontraktívnosti, teda $\lambda = M$ a z Banachovej vety o pevnom bode vyplýva tvrdenie nasledujúcej vety.

Veta 1.4. Nech $\varphi : \langle a, b\rangle \to \langle a, b\rangle$ je spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$. Nech existuje spojitá derivácia φ' v (a, b) a číslo λ, $0 \leqq \lambda < 1$ také, že $|\varphi'(x)| \leqq \lambda$ pre ľubovoľné $x \in (a, b)$. Potom iteračný proces

$$x_{i+1} = \varphi(x_i) \quad \text{pre} \quad i = 0, 1, \ldots$$

konverguje k jedinému koreňu α rovnice $x = \varphi(x)$ a platia odhady

$$|x_n - \alpha| \leqq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1 - x_0|, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.9}$$

$$|x_n - \alpha| \leqq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_n - x_{n-1}|, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.10}$$

Poznámka 1.4. Ak koeficient kontraktívnosti $\lambda \in (0; 0,5\rangle$ potom zo vzťahu (1.8) dostávame

$$|x_n - \alpha| \leqq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_n - x_{n-1}| \leqq |x_n - x_{n-1}|.$$

Teda iteračný proces môžeme ukončiť, ak absolútna hodnota rozdielu po sebe idúcich aproximácií je menšia než presnosť, s akou máme vypočítať hodnotu koreňa α rovnice $x = \varphi(x)$.

Poznámka 1.5. Funkciu φ môžeme zvoliť nasledujúcim spôsobom. Predpokladajme, že v rovnici $f(x) = 0$ je funkcia f diferencovateľná na $\langle a, b\rangle$, pričom $\forall x \in \langle a, b\rangle : |1 - k\, f'(x)| \leqq \leqq \lambda < 1$. Potom $\varphi(x) = x - kf(x)$, kde $k \in \mathbb{R}$ a pre členy postupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dostávame rekurentný vzorec

$$x_{n+1} = x_n - kf(x_n) \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Pri použití iteračnej metódy môžeme zvoliť postup, uvedený v nasledujúcom algoritme.

Algoritmus iteračnej metódy na riešenie rovnice $x = \varphi(x)$:

Vstup: x_0, FI(x), EPS, LAMBDA, NMAX
$i = 1$
$x_1 =$ FI(x_0)
DELTA = LAMBDA/(1-LAMBDA)*EPS;
Opakuj, pokiaľ: $|x_1 - x_0| >$ DELTA a $i <$ NMAX,
$x_0 = x_1$
$x_1 =$ FI(x_0)
$i = i + 1$
Ak $|x_1 - x_0| <$ DELTA,
Výstup: x_1 je koreňom rovnice s presnosťou EPS.
Počet iterácií bol i.
inak
Výstup: Dosiahnutý maximálny počet iterácií NMAX!

alebo s použitím $\pm\varepsilon$-testu:

Vstup: x_0, FI(x), EPS, NMAX
$i = 0$
Opakuj, pokiaľ: $f(x_0 + \text{EPS})f(x_0 - \text{EPS}) > 0$ a $i <$ NMAX,
$x_0 =$ FI(x_0)
$i = i + 1$
Ak $f(x_0 + \text{EPS})f(x_0 - \text{EPS}) < 0$,
Výstup: x_0 je koreňom rovnice s presnosťou EPS.
Počet iterácií bol i.
inak
Výstup: Dosiahnutý maximálny počet iterácií NMAX!

Príklad 1.5. Prostou iteračnou metódou vypočítajme reálny koreň rovnice $x^3 - x - - 1 = 0$ s presnosťou 0,005.

Riešenie. Približnú hodnotu koreňa rovnice určíme pomocou grafickej metódy. Z obrázku 1.1 vidíme, že existuje iba jeden spoločný bod grafov funkcií $y = x^3$, $y = x + 1$, $M = [\alpha, \cdot]$, pričom $\alpha \in (1, 2)$. Teda rovnica $x^3 - x - 1 = 0$ má jediný reálny koreň $\alpha \in (1; 2)$. Danú rovnicu môžeme zapísať v tvare

$$x = \sqrt[3]{x + 1},$$

pričom funkcia $\varphi(x) = \sqrt[3]{x + 1}$ spĺňa podmienky vety 2.3. Pre každé $x \in (1, 2)$ platí

$$|\varphi'(x)| = 3^{-1}(x + 1)^{-2/3} < 1/3 = \lambda$$

a

$$\sqrt[3]{x + 1} \in \langle \sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{3} \rangle \subset \langle 1; 2 \rangle.$$

Na určenie približnej hodnoty koreňa α použijeme iteračný proces

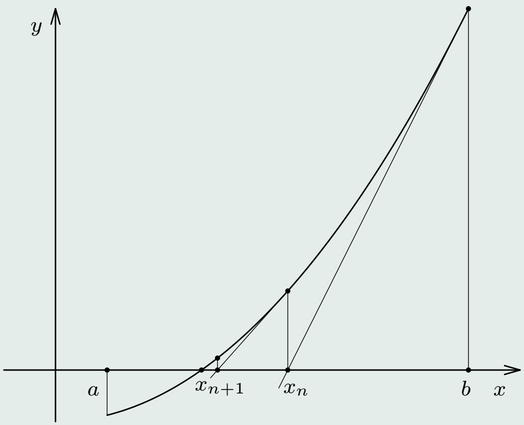
$$x_{i+1} = \sqrt[3]{x_i + 1}, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Za začiatočnú hodnotu zvoľme napríklad $x_0 = 1{,}5$. Potom postupne dostávame tieto hodnoty iterácií:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}35720881, \\ x_2 &= 1{,}33086096, \\ x_3 &= 1{,}32588377, \\ x_4 &= 1{,}32493936, \\ x_5 &= 1{,}32476001, \\ x_6 &= 1{,}32472594. \end{aligned}$$

Pretože $\lambda \in (0; 0{,}5\rangle$ a $|x_3 - x_2| < 0{,}005$ môžeme s presnosťou aspoň 0,005 aproximovať koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ pomocou x_3. Keďže $\dfrac{\lambda}{1-\lambda}|x_6 - x_5| = \dfrac{0{,}00003407}{2} < 0{,}000018$ platí, že $|\alpha - x_6| < 0{,}000018$. Vidíme, že na dosiahnutie rovnakej presnosti ako v metóde bisekcie sme potrebovali polovičný počet iterácií a po šiestich iteráciách sme dosiahli presnosť o viac ako 2 rády lepšiu. Treba si však uvedomiť, že výpočet jednej iterácie bude pre 3. odmocninu v tomto prípade trvať „omnoho“ dlhšie, ako v prípade bisekcie.

1.6. Newtonova metóda



Obr. 1.2: Newtonova metóda dotyčníc

Newtonovu metódu, nazývanú tiež metóda dotyčníc (pozri obr. 1.2), môžeme použiť na riešenie rovnice $f(x) = 0$ ak je funkcia dvakrát diferencovateľná a funkcia $f''(x)$ v intervale

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Späť
Celá strana
Zatvoriť
Koniec

$\langle a, b\rangle$ nemení znamienko (je nenulová), pričom zároveň platí $f(a)f(b) < 0$ ($\langle a, b\rangle$ je interval separácie).

Napíšme rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v bode x_n:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Ďalšiu aproximáciu koreňa α — x_{n+1} — určíme ako priesečník dotyčnice s osou x (pri dosadení x_{n+1} za x položíme súčasne y rovné 0). To znamená, že dostávame rekurentný vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.11}$$

Pre $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$ definuje (1.11) iteračnú metódu, metódy sa odlišujú spôsobom overenia podmienok konvergencie.

Veta 1.5. Nech na intervale $\langle a, b\rangle$ sú splnené nasledujúce podmienky:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. $|f''(x)| > 0$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$.
3. $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$.

Potom postupnosť (1.11) konverguje ku koreňu α rovnice $f(x) = 0$, teda platí $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.
Ak navyše platí podmienka

4. $|f'(x)| > 0$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$,

môžeme na odhad presnosti používať vzťah (1.2).

Dôkaz neuvádzame. Newtonova metóda sa v blízkosti koreňa vyznačuje tzv. kvadratickou rýchlosťou konvergencie, čo je kvalitatívne rýchlejšia konvergencia ako, napríklad, pri metóde prostej iterácie.

Príklad 1.6. Newtonovou iteračnou metódou vypočítajme reálny koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ s presnosťou 0,005.

Riešenie. Vyššie sme ukázali, že pre danú úlohu je $\langle 1; 1{,}5\rangle$ intervalom separácie. Keďže $f'(x) = 3\,x^2 - 1$, na intervale separácie je $m = \min\limits_{x\in\langle 1;1{,}5\rangle} |f'(x)| = 2$. Pretože $f''(x) = 6\,x > 0$ na uvažovanom intervale a $f(1{,}5) > 0$, bude Newtonova metóda konvergovať k riešeniu rovnice z bodu $x_0 = 1{,}5$.

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1{,}34782609,\\
x_2 &= 1{,}32520040,\\
x_3 &= 1{,}32471817,\\
x_4 &= 1{,}32471795,\\
x_5 &= 1{,}32471795.
\end{aligned}$$

Na základe odhadu (1.2) môžeme tvrdiť, že už

$$|\alpha - x_2| \leqq \frac{|f(x_2)|}{m} < \frac{0{,}0021}{2} = 0{,}00105.$$

Teda už po druhom kroku sme dosiahli požadovanú presnosť. Využime na tomto základe fakt, že novým intervalom separácie môžeme zvoliť, napríklad, interval $\langle 1{,}3; 1{,}5\rangle$, pre ktorý už môžeme použiť hodnotu $m = 4$. Dostaneme presnejší odhad $|\alpha - x_2| < 0{,}00053$, čo je už o rád lepšie, ako požadovaná presnosť. Pri tejto metóde je už po 4. kroku nepresnosť menšia ako 10^{-13}, čo je neporovnateľne lepšie, ako v metóde bisekcie aj v prostej iteračnej metóde.

Poznámka 1.6. V tomto príklade je rýchlosť jednej iterácie Newtonovej metódy porovnateľná s rýchlosťou jednej iterácie metódy bisekcie. Hodnotu $f(x_n)$, používanú v odhade (1.2), môžeme využiť aj na výpočet ďalšej iterácie. Newtonova metóda je teda veľmi efektívna ako z hľadiska rýchlosti konvergencie, tak aj z hľadiska jednoduchosti použitia. Navyše, ak sa na výpočet derivácie $f'(x_n)$ použije približná numerická metóda, tak na riešenie úlohy stačí v programe zmeniť funkciu $f(x)$ podobne, ako v metóde bisekcie.

Príklad 1.7. Pomocou Newtonovej metódy s presnosťou 0,001 vypočítajme najmenší kladný koreň rovnice

$$f(x) = 2(\pi - x)\sin x - \cos x = 0.$$

Riešenie. Pomocou grafickej metódy, zostrojením grafov funkcií

$$g(x) = 2(\pi - x), \quad h(x) = \operatorname{cotg} x$$

zistíme, že koreň danej rovnice leží v intervale $(0; 0{,}5)$. Vhodným delením intervalu zúžime interval na interval $(0{,}1; 0{,}2)$. Začiatočná aproximácia $x_0 = 0{,}1$ spĺňa podmienku $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Funkcia f'' je na intervale $(0{,}1; 0{,}2)$ rôzna od nuly. Použitím vzťahu (1.11) dostávame ďalšie členy postupnosti (x_n), a to $x_1 = 0{,}1651$, $x_2 = 0{,}1665$. Pretože $f(x_2 - 10^{-3}) \cdot f(x_2 + 10^{-3}) < 0$, môžeme s danou presnosťou aproximovať hľadaný koreň rovnice pomocou x_2.

Otázky k prebranej tematike:

- Aké metódy približného výpočtu reálnych koreňov rovnice $f(x) = 0$ poznáte?
- Čo je to interval separácie? Ako sa využíva pri $\pm\varepsilon$-teste?
- Ako je možné odhadnúť nepresnosť približného koreňa?
- Ako sa využije Banachova veta pri prostej iteračnej metóde?
- V čom spočíva metóda polovičného delenia?
- Aké sú postačujúce podmienky konvergencie Newtonovej metódy?
- Viete napísať algoritmy riešenia úloh pre jednotlivé metódy?

Úlohy

V nasledujúcich úlohách vypočítajte **všetky reálne** korene (ak nie je uvedené ináč) s danou presnosťou:

1.1. $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 0$ najmenší koreň s presnosťou 0,005. [$-2{,}791$]
1.2. $x^3 + 0{,}9x^2 + 1{,}1x - 7{,}8 = 0$ najväčší koreň s presnosťou 0,005. [1,568]
1.3. $x^3 - 12x + 1 = 0$ najmenší koreň s presnosťou 0,000001. [$-3{,}505040$]
1.4. $2x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 10x - 3 = 0$, presnosť 0,000001. [0,539692]
1.5. $2x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 0{,}5 = 0$ kladný koreň s presnosťou 0,0001. [0,27162]
1.6. $\sin x + 2x - 2 = 0$ s presnosťou 0,000001. [0,6840]
1.7. $2x \ln x - 4x + 5{,}3 = 0$ s presnosťou 0,00001. [2,132218; 3,349918]
1.8. $x^3 - 8x + 15 = 0$ s presnosťou 0,0001. [$-3{,}5043$]
1.9. $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ s presnosťou 0,001. [$-2{,}5321$; $-1{,}3473$; 0,87939]
1.10. $5x^3 + 2x^2 - 15x - 6 = 0$ najväčší koreň s presnosťou 0,0001. [1,7321]
1.11. $x^3 - 7x - 7 = 0$ s presnosťou 0,001. [$-1{,}6920$; $-1{,}3569$; 3,0489]
1.12. $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ s presnosťou 0,001. [0,3177]
1.13. $x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$ s presnosťou 0,0001. [1,2663]
1.14. $x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$ záporný koreň s presnosťou 0,0001. [$-1{,}4305$]
1.15. $x - \sin x = 0{,}25$ s presnosťou 0,00001. [1,17123]
1.16. $2{,}2x - 2^x = 0$ s presnosťou 0,00001. [0,78112 ; 2,40135]
1.17. $2 \ln x - 1/x = 0$ s presnosťou 0,00001. [1,42153]
1.18. $\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 2 = 0$ s presnosťou 0,00001. [$-0{,}53727$; 1,31597]
1.19. $\mathrm{e}^{x} + x^2 - 2 = 0$ s presnosťou 0,00001. [$-1{,}31597$]
1.20. $2x - \log x - 7 = 0, \quad x > 3$ s presnosťou 0,00001. [3,78928]
1.21. $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x} = 4, \quad$ kladné korene s presnosťou 0,00001. [1,38233]

2. Iteračná metóda riešenia sústav lineárnych rovníc

V tejto kapitole úkážeme, ako sa dá použiť Banachova veta o pevnom bode na riešenie sústav lineárnych algebrických rovníc (SLAR) iteračnými metódami. Z veľkého počtu metód sme zvolili najjednoduchšiu – Jacobiho metódu.

2.1. Úvod

Budeme sa zaoberať riešením sústavy n lineárnych rovníc o n neznámych

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

s maticovým zápisom

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

kde $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, i, $j = 1, \dots, n$ je štvorcová matica koeficientov, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$ je stĺpec pravých strán, $\boldsymbol{x}$ je stĺpcový vektor riešenia sústavy.

Na riešenie sústav linernych algebrických rovníc sa používa celá škála metód, ako priamych, tak aj iteračných. Ďalej sa v tejto učebnici budeme zaoberať len *Jacobiho iteračnou metódou*, stručný popis ďalších metód nájdete, napríklad, v (Pirč a Buša, 2002).

Najskôr zavedieme niektoré základné pojmy:

Nech $\boldsymbol{\alpha}$ je matica typu (n, p). Definujme pre maticu $\boldsymbol{\alpha}$ nezáporné reálne číslo $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ niektorým z nasledujúcich najčastejšie používaných predpisov

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty = \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathrm{r}} = \max_{i=1,2,\dots,n} \sum_{j=1}^{p} |\alpha_{ij}| \qquad \text{tzv. riadková norma,}$$

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_1 = \|\boldsymbol{\alpha}\|_s = \max_{j=1,2,\dots,p} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| \qquad \text{tzv. stĺpcová norma.}$$

Pre normy matice $\boldsymbol{A}$ a vektora $\boldsymbol{x}$ platí $\|\boldsymbol{Ax}\| \leqq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$. Pre *súhlasné* normy (v tomto prípade obidve) navyše platí:

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \frac{\|\boldsymbol{Ax}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}.$$

Definícia 2.1. Maticu $\boldsymbol{A}$ nazývame *diagonálne dominantnou*, keď je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:

a) pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ je $\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$, (*riadkovo*),

b) pre každé $j = 1, 2, \dots, n$ je $\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}|$, (*stĺpcovo*).

Poznámka 2.1. Lineárny normovaný priestor $\mathbb{R}^n$ aritmetických vektorov je úplným priestorom. To znamená, že v ňom môžeme použiť Banachovu vetu o pevnom bode.

2.2. Jacobiho iteračná metóda

Nech koeficienty $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Prepíšeme sústavu

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{2.1}$$

na tvar

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha x} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \tag{2.2}$$

nasledujúcim spôsobom. Nech

$$\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}),$$

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D} + \boldsymbol{D})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Odtiaľ dostávame

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b},$$

teda

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}), \qquad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Riešením rovnice (2.2) je pevný bod zobrazenia $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ak pre $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$, potom zobrazenie $\boldsymbol{\varphi}$ bude kontraktívne, ak

$$\rho\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\big) \leqq \lambda\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad \lambda \in (0; 1),$$

teda

$$\rho\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\big) = \|(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}) - (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta})\| \leqq$$

$$\leqq \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{\alpha}\|\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

To znamená, že zobrazenie $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}$ bude kontraktívne, ak $\|\boldsymbol{\alpha}\| < 1$.

Pre postupnosť aproximácii

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\beta} \tag{2.3}$$

platí nasledujúca veta.

Veta 2.1. Nech $\|\boldsymbol{\alpha}\| < 1$. Potom sústava rovníc $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}$ má práve jedno riešenie $\bar{\boldsymbol{x}}$, pre ktoré platí

a) iteračný proces

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\beta}$$

konverguje ku $\bar{\boldsymbol{x}}$ nezávisle od voľby začiatočnej aproximácie $\boldsymbol{x}^{(0)}$,

b) ak $\boldsymbol{x}^{(k)}$ je k-ta aproximácia riešenia, potom

$$\|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(k)}\| \leqq \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|}{1 - \|\boldsymbol{\alpha}\|}\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|, \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{2.4}$$

Tvrdenie tejto vety vyplýva priamo z Banachovej vety o pevnom bode.

Veta 2.2. Nech matica $\boldsymbol{A}$ v sústave (2.1) je riadkovo diagonálne dominantná a $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})$. Potom je riadková norma $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty < 1$.

Poznámka 2.2. Ak je teda matica $\boldsymbol{A}$ v sústave (2.1) riadkovo diagonálne dominantná, potom iteračný proces (2.3) konverguje.

Popísaná iteračná metóda sa nazýva *Jacobiho metóda*. Podmienky vety 3.1 sú postačujúce (nie nutné) na konvergenciu uvedenej metódy.

Poznámka 2.3. Pri riešení sústav rovníc bez použitia počítačov je niekedy výhodnejšie vyjadriť sústavu (2.1) v tvare (2.2) tak, že nie je nutné, aby $\alpha_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Napríklad, ak by prvá rovnica mala tvar

$$9x_1 - x_2 - x_3 = 7,$$

môžeme ju prepísať takto

$$10x_1 - x_1 - x_2 - x_3 = 7,$$

potom

$$x_1 = 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}7.$$

Dostaneme jednoduchšie koeficienty, je však potrebné, aby $\|\boldsymbol{\alpha}\| < 1$.

Príklad 2.1. S presnosťou 0,001 riešme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x_1 - 9x_2 + x_3 &= -7, \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= 9, \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Riešenie. V danej sústave vymeníme prvú a druhú rovnicu tak, aby sústava bola diagonálne dominantná

$$\begin{aligned} 9x_1 - x_2 + x_3 &= 9, \\ x_1 - 9x_2 + x_3 &= -7, \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 &= 8, \end{aligned}$$

ktorú prepíšeme na tvar:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_2 - x_3 + 9}{9}, \\ x_2 &= \frac{x_1 + x_3 + 7}{9}, \\ x_3 &= \frac{x_1 + x_2 + 8}{10}, \end{aligned}$$

pričom matica $\boldsymbol{\alpha}$ na pravej strane má riadkovú normu

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty = \max[1/9 + 1/9; 1/9 + 1/9; 1/10 + 1/10] = 2/9 < 1.$$

Preto je uvedené vzorce možné použiť na iteračný proces.

Pri ručnom výpočte sústavu môžeme prepísať na tvar

$$\begin{aligned} 10\,x_1 &= x_1 + x_2 - x_3 + 9, \\ 10\,x_2 &= x_1 + x_2 + x_3 + 7, \\ 10\,x_3 &= x_1 + x_2 + 8, \end{aligned}$$

respektíve na tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 + 0{,}9\,, \\ x_2 &= 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}7\,, \\ x_3 &= 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 \qquad\qquad + 0{,}8\,. \end{aligned}$$

Nakoľko

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_m = \max[|0{,}1| + |0{,}1| + |-0{,}1|; |0{,}1| + |0{,}1| + |0{,}1|; |0{,}1| + |0{,}1|] = 0{,}3 < 1,$$

bude nasledujúci iteračný proces tiež konvergovať

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 0{,}1x_1^{(k)} + 0{,}1x_2^{(k)} - 0{,}1x_3^{(k)} + 0{,}9\,, \\ x_2^{(k+1)} &= 0{,}1x_1^{(k)} + 0{,}1x_2^{(k)} + 0{,}1x_3^{(k)} + 0{,}7\,, \qquad (2.5) \\ x_3^{(k+1)} &= 0{,}1x_1^{(k)} + 0{,}1x_2^{(k)} \qquad\qquad + 0{,}8\,. \end{aligned}$$

(2.6)

Za aproximáciu $\boldsymbol{x}^{(0)}$ môžeme zvoliť vektor $\boldsymbol{\beta}$ t. j. $x_1^{(0)} = 0{,}9$; $x_2^{(0)} = 0{,}7$; $x_3^{(0)} = 0{,}8$. Výpočtom podľa vzťahov (2.5) dostávame:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0,9	0,7	0,8
1	0,95	0,94	0,96
2	0,993	0,985	0,989
3	0,9983	0,9967	0,9978
4	0,9997	0,9993	0,9995
5	1,0000	0,9998	0,9999

Pretože

$$\max[|1{,}0000 - 0{,}9997|; |0{,}9998 - 0{,}9993|; |0{,}9999 - 0{,}9995|] =$$
$$= \|\boldsymbol{x}^{(5)} - \boldsymbol{x}^{(4)}\| < 0{,}001$$

a $\|\boldsymbol{\alpha}\| < 0{,}5$, môžeme s presnosťou aspoň 0,001 nahradiť riešenie danej sústavy pomocou $\boldsymbol{x}^{(5)}$. Presné hodnoty sú $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

2.3. Podmienenosť sústav

Koeficienty sústavy rovníc niekedy získame meraním, t. j. nepoznáme presné hodnoty koeficientov. Závislosť chyby výsledku na presnosti vstupných hodnôt je vlastnosťou danej sústavy.

O vplyve nepresnosti vstupných hodnôt na výsledok riešenia sústavy môžeme rozhodnúť pomocou koeficientu podmienenosti sústavy. Označujeme ho $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$, pričom

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \qquad \text{a} \qquad \mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) \geqq 1.$$

Pri malých hodnotách hovoríme o dobrej podmienenosti sústavy. Ak je sústava zle podmienená, nemôžeme obyčajne bez doplňujúcich podmienok pomocou žiadnej numerickej metódy dosiahnuť uspokojivé výsledky.

Príkladom zle podmienenej sústavy je sústava rovníc

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0, \\ x + ay &= -0{,}01, \end{aligned}$$

kde pre $a = -2{,}0001$ je riešením sústavy $x = 200$, $y = 100$. Pre $a = -1{,}9999$ je riešením sústavy $x = -200$, $y = -100$. Vidíme, že „malá“ zmena koeficienta môže mať za následok „veľkú“ zmenu výsledkov riešenia sústavy.

V učebnici (Pirč a Buša, 2002) je okrem Gaussovej eliminačnej metódy a metódy LU rozkladu popísaný aj postup riešenia sústav lineárnych algebrických rovníc v zmysle minimalizácie kvadratickej odchýlky $\|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2$. Tento postup vedie k pojmom *pseudoriešenie* a *pseudoinverzná matica*. Pseudoinverzná matica $\boldsymbol{A}^+$ je zovšeobecnením pojmu inverzná matica a vždy existuje. Ak inverzná matica existuje, platí $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^{-1}$. V MATLABe môžeme pri riešení sústav použiť popri príkaze `inv(A)` aj príkaz `pinv(A)`, ktorý vypočíta pseudoinverznú maticu. Okrem toho je užitočný tzv. *singulárny rozklad matice* $\boldsymbol{A}$ – `svd(A)`. Tento rozklad sa okrem iného dá použiť na konštrukciu inverznej i pseudoinverznej matice.

Otázky k prebranej tematike:

- Ako sú definované riadková a stĺpcová norma matice?
- Dokážete zadefinovať riadkovú dominantnosť matice $\boldsymbol{A}$?
- Ako na využije Banachova veta pri iteračnom riešení sústav lineárnych algebrických rovníc?
- Môžete popísať algoritmus riešenia SLAR Jacobiho iteračnou metódou? Ako sa odhadne chyba aktuálnej aproximácie riešenia?

Úlohy

Nasledujúce sústavy riešte s presnosťou 0,001:

2.1.
$$\begin{aligned} 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 5, \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= -2, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 6, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 &= 7. \end{aligned}$$

[$x_1 = -35{,}5$; $x_2 = -2{,}4$; $x_3 = 9{,}1$; $x_4 = 23{,}1$]

2.2.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= -7, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 6. \end{aligned}$$

[$x_1 = 1{,}7503$; $x_2 = 0{,}2080$; $x_3 = -0{,}5903$; $x_4 = -1{,}1195$]

2.3.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 12x_4 &= -4, \\ 9x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6, \\ -9x_1 + 10x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2, \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 - x_4 &= 5. \end{aligned}$$

[$x_1 = 0{,}3771$; $x_2 = 0{,}2146$; $x_3 = 0{,}6180$; $x_4 = 0{,}4835$]

2.4.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 12x_4 &= 24, \\ x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 8, \\ 13x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 + x_4 &= -7. \end{aligned}$$

[$x_1 = -1{,}0795$; $x_2 = 1{,}7109$; $x_3 = 0{,}1179$; $x_4 = -2{,}5978$]

2.5.
$$\begin{aligned} 15x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 10, \\ x_1 + 12x_2 - x_3 + 2x_4 &= -13, \\ 2x_1 - x_2 + 17x_3 - 3x_4 &= 12, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 13x_4 &= 14. \end{aligned}$$

[$x_1 = 0{,}6399$; $x_2 = -0{,}9003$; $x_3 = 0{,}3591$; $x_4 = -1{,}2386$]

3. Riešenie sústav nelineárnych rovníc

V tejto kapitole uvedieme ďalšie použitie Banachovej vety na riešenie sústav nelineárnych rovníc. Newtonova metóda linearizácie sa ukazuje ako veľmi efektívna aj pri riešení sústav nelineárnych rovníc.

3.1. Formulácia problému

Budeme sa zaoberať niektorými numerickými metódami riešenia sústavy n nelineárnych rovníc o n neznámych

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, \tag{3.1}$$

kde $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ je vektorová funkcia n nezávislých premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$. Túto sústavu môžeme v zložkách zapísať v tvare

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Budeme predpokladať, že vektorová funkcia $\boldsymbol{f}$ je definovaná na neprázdnej množine $G \subset \mathbb{R}^n$. Riešiť sústavu (3.1) znamená nájsť všetky také body $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \in G$, pre ktoré platí $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}$. Bod $\bar{\boldsymbol{x}}$ nazývame riešením uvedenej sústavy.

Separáciou vektora $\bar{\boldsymbol{x}}$ rozumieme určenie takej ohraničenej, uzavretej oblasti $D \subset G$, do ktorej patrí jediné riešenie $\bar{\boldsymbol{x}}$. Pre $n = 2$ približnú hodnotu bodu $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ určujeme obyčajne graficky ako súradnice priesečníkov rovinných kriviek $f_1(x_1, x_2) = 0$, $f_2(x_1, x_2) = 0$. Nech ďalej D je oblasť separácie.

3.2. Iteračná metóda

Sústavu (3.1) upravíme na sústavu tvaru

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \tag{3.2}$$

kde $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)^T$ a $\boldsymbol{x}$ je súčasne riešením sústav (3.2) aj (3.1). Vektorový zápis odpovedá zápisu v zložkách

$$x_i = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Metóda je založená na konštrukcii postupnosti $(\boldsymbol{x}^{(k)})$, kde $\boldsymbol{x}^{(0)} \in D \subset G$ a ďalšie členy postupnosti počítame podľa vzorca

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

t. j.

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & g_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} & = & g_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} & = & g_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}). \end{array} \tag{3.3}$$

Nech množina D je konvexná, t. j. pre ľubovoľné $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ patria do D tiež všetky vektory $\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$, $t \in (0, 1)$.

Označme $\boldsymbol{g}'$ tzv. Jacobiovu maticu zobrazenia $\boldsymbol{g}$, potom

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial g_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial g_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial g_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Budeme uvažovať nasledujúce normy matice a vektora pre:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{je} \quad \|\mathbf{A}\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\boldsymbol{x} = (x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{je} \quad \|\boldsymbol{x}\| = \max_i |x_i|.$$

Platí táto veta:

Veta 3.1. Nech $D \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna uzavretá, ohraničená a konvexná množina. Nech vektorová funkcia $\boldsymbol{g} : D \to D$ a funkcie $g_i : D \to D$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$ majú v D spojité parciálne derivácie prvého rádu podľa všetkých premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nech ďalej existuje konštanta q, $0 \leqq q < 1$ taká, že $\|\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\| \leqq q$, $\boldsymbol{x} \in D$.
Potom sústava rovníc (3.3) má práve jedno riešenie $\bar{\boldsymbol{x}} \in D$ a pri ľubovoľnej voľbe $\boldsymbol{x}^{(0)} \in D$ postupnosť aproximácii $(\boldsymbol{x}^{(k)})$, získaná pomocou vzťahov

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}),$$

konverguje k presnému riešeniu $\bar{\boldsymbol{x}}$ sústavy (3.3) t. j. $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \bar{\boldsymbol{x}}$ a platia nasledujúce odhady

$$\|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(k)}\| \leqq \frac{q}{1-q}\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(k)}\| \leqq \frac{q^k}{1-q}\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Tvrdenie tejto vety vyplýva z Banachovej vety o pevnom bode, pričom

$$\lambda = q, \quad \rho(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}^{(k)}) = \|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(k)}\|, \quad \rho(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(k-1)}) = \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|.$$

Poznámka 3.1. Majme sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych

$$f_1(x_1, x_2) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Funkcie g_1, g_2 môžeme zvoliť v tvare

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 + c_1 f_1(x_1, x_2) + c_2 f_2(x_1, x_2),$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_2 + d_1 f_1(x_1, x_2) + d_2 f_2(x_1, x_2),$$

pričom konštanty c_1, c_2, d_1, d_2 zvolíme tak, aby boli splnené podmienky vety 3.1.

Príklad 3.1. Riešme sústavu rovníc v prvom kvadrante.

$$f_1(x, y) = x^2 + 4x - y^2 - 2y - 1 = 0,$$

$$f_2(x, y) = x^2 + 5y - 4 = 0.$$

Riešenie. Nultú aproximáciu môžeme zvoliť ako približné súradnice priesečníkov grafov kriviek $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ a to $x^{(0)} = 0{,}5$, $y^{(0)} = 0{,}5$. Vzhľadom na poznámku 3.1 môžeme nájsť funkcie

$$g_1(x, y) = x + c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y),$$

$$g_2(x, y) = y + d_1 f_1(x, y) + d_2 f_2(x, y).$$

Konštanty $c_1 = -0{,}2$, $c_2 = -0{,}1$, $d_1 = 0{,}04$, $d_2 = -0{,}2$ zvolíme ako približné riešenie sústavy rovníc

$$\frac{\partial g_i(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial g_i(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Potom ďalšie aproximácie, uvedené v tabuľke 3.1, dostaneme pomocou rekurentných vzorcov

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 0{,}2\, f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) - 0{,}1\, f_2(x^{(k)}, y^{(k)}),$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + 0{,}04\, f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) - 0{,}2\, f_2(x^{(k)}, y^{(k)}).$$

Tabuľka 3.1: Riešenie sústavy nelineárnych rovníc iteračnou metódou

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	0,5	0,5
1	0,625	0,75
2	0,6453	0,715
3	0,6349	0,7190
4	0,6375	0,7189
5	0,6370	0,7188

3.3. Newtonova metóda

Uvažujme opäť sústavu rovníc

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

Predpokladajme, že $\boldsymbol{x}^{(k)}$ je „dobrá“ aproximácia riešenia $\bar{\boldsymbol{x}}$ rovnice $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.

Ak pre každé $\boldsymbol{x} \in D$, je $\det(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})) \neq 0$, má daná sústava rovníc jediné riešenie. Ďalšiu aproximáciu môžeme vypočítať podľa vzorca

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - [\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^{(k)})]^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\Delta x}^{(k)}.$$

Newtonova metóda je teda metóda, kde

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - [\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})]^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Pre názornosť uvedieme postup konštrukcie funkcie $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ pre $n = 2$. Riešme túto sústavu rovníc

$$f_1(x_1, x_2) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Nech $\boldsymbol{x}^{(k)} = ({x_1}^{(k)}, {x_2}^{(k)})$. Použitím Taylorovej vety dostávame

$$f_i(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}) = f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})+$$

$$+\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_1}(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}) + \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_2}(x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}) + R_i,$$

kde $i = 1, 2$.

Ďalšiu aproximáciu dostaneme riešením sústavy lineárnych rovníc

$$\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_1}(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}) + \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_2}(x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}) = -f_1(\boldsymbol{x}^{(k)}),$$

$$\frac{\partial f_2(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_1}(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}) + \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_2}(x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}) = -f_2(\boldsymbol{x}^{(k)}),$$

odkiaľ dostávame

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - W^{-1}\begin{vmatrix} f_1(\boldsymbol{x}^{(k)}) & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_2} \\ f_2(\boldsymbol{x}^{(k)}) & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - W^{-1}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_1} & f_1(\boldsymbol{x}^{(k)}) \\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_1} & f_2(\boldsymbol{x}^{(k)}) \end{vmatrix},$$

kde

$$W = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_2} \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Pre „dobrú" začiatočnú hodnotu konverguje Newtonova metóda obyčajne veľmi rýchlo k riešeniu $\bar{\boldsymbol{x}}$. Podmienky konvergencie Newtonovej metódy sú uvedené napríklad v (Demidovič a Maron, 1966).

Príklad 3.2. Riešme sústavu rovníc z príkladu 3.1 pomocou Newtonovej metódy.

Riešenie. Jednotlivé priblíženia vypočítame pomocou vzťahov (3.4), pričom

$$W(x, y) = \begin{vmatrix} 2x + 4 & -2y - 2 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}.$$

Ďalšie aproximácie pre $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 0$, sú uvedené v tabuľke 3.2. Ako vidieť, Newtonova metóda už po dvoch iteráciách dosiahla presnosť iteračnej metódy po piatich iteráciách. Na dosiahnutie väčšej presnosti by sme tu (obyčajnou) iteračnou metódou potrebovali vykonať ešte veľa iterácií, pri Newtonovej metóde by sme po ďalšej iterácii dosiahli počítačovú presnosť `double` (rádovo 10^{-15}).

Poznámka 3.2. V prípade $n > 2$ je výhodnejšie pri riešení sústav lineárnych algebrických rovníc v Newtonovej metóde namiesto Cramerovho pravidla použiť eliminačnú metódu. Vektor $\boldsymbol{\Delta x}^{(k)}$ získame riešením sústavy

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^{(k)}) \cdot \boldsymbol{\Delta x}^{(k)} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}).$$

a ďalšiu aproximáciu riešenia získame z vyššie uvedeného vzťahu

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\Delta x}^{(k)}.$$

Tabuľka 3.2: Riešenie sústavy nelineárnych rovníc Newtonovou metódou

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	0,5	0,5
1	0,6339	0,7232
2	0,6371	0,7188
3	0,6371	0,7188

Otázky k prebranej tematike:

- Ako sa riešia nelineárne sústavy iteračnou metódou?
- Ako sa aplikuje Banachova veta pri iteračnej metóde riešenia nelineárnych sústav?
- Aký je algoritmus riešenia nelineárnych sústav Newtonovou metódou?

Úlohy

S presnosťou 0,01 riešte sústavy rovníc v $R \times R$.

3.1. $x^2y^2 - 3x^3 - 6y^3 + 8 = 0,$
$x^4 - 9y + 2 = 0.$ $[(-2{,}00; 2{,}00);\ (1{,}3508; 0{,}59214)]$

3.2. $\sin x - y = 1{,}32,$
$\cos y - x = -0{,}85.$ $[(1{,}7913; -0{,}34422)]$

3.3. $(x-1{,}2)^2 + (y-0{,}6)^2 = 1,$
$4{,}2x^2 + 8{,}8y^2 = 1{,}42.$

$[(0{,}22684; 0, 36987);\ (0{,}53912; -0{,}15049)]$

3.4. $x^3 - y^2 - 1 = 0,$
$xy^3 - y - 4 = 0.$

$[(1{,}5020; 1{,}5456)]$

3.5. $\mathrm{e}^{xy} - x^2 + y = 0,$
$x^2 + y^2 = 4.$

$$\begin{bmatrix} (-1{,}8437; -0{,}7750); & (-1{,}2910; 1{,}5275); \\ (-0{,}3797; -1{,}9636); & (1{,}9121; 0{,}5865) \end{bmatrix}$$

4. Aproximácia funkcií

V tejto kapitole uvedieme dve jednoduché metódy, používané na aproximáciu daných údajov (vrátane experimentálnych) pomocou teoretických závislostí.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať aproximáciou, t. j. náhradou funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ pomocou funkcie $g : A \subset B \to \mathbb{R}$. Funkciu g zvolíme podľa toho, čo vieme o funkcii f. Funkcia f môže byť zadaná napríklad funkčnými hodnotami v $n+1$ bodoch alebo je príliš zložitá a na riešenie danej úlohy (napríklad výpočet určitého integrálu) nevhodná. Funkciu g obyčajne hľadáme v tvare

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot g_i(x).$$

Za funkcie g_i, $i = 0, 1, \dots, n$ berieme väčšinou funkcie 1, x, x^2, x^3, ..., alebo funkcie 1, $\cos \frac{\pi x}{l}$, $\sin \frac{\pi x}{l}$, ..., $\cos \frac{n\pi x}{l}$, $\sin \frac{n\pi x}{l}$. Koeficienty c_i určujeme na základe nejakého vhodného kritéria. Podľa voľby kritéria dostávame určitý typ aproximácie.

Napríklad:

a) Interpolačná aproximácia alebo stručne interpolácia (napr. pomocou Lagrangeovho, Čebyševovych polynómov, pomocou splajnov a pod.).

b) Aproximácia metódou najmenších štvorcov (lineárna aj nelineárna).

4.1. Interpolácia

Nech funkcia f je zadaná svojimi funkčnými hodnotami v $n+1$ bodoch, t. j. tabuľkou hodnôt

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Späť
Celá strana
Zatvoriť
Koniec

Základnou úlohou interpolácie pomocou polynómov je určiť polynóm P najmenšieho možného stupňa tak, aby pre $i = 0, 1, \ldots, n$ platilo

$$f^{(j)}(x_i) = P^{(j)}(x_i), \quad j = 0, 1, \ldots, r_i - 1.$$

Budeme sa zaoberať aproximáciami, kde $r_i = 1$ pre $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, t. j. hľadáme polynóm P najviac n-tého stupňa s vlastnosťou

$$f(x_i) = P(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.1}$$

Aproximácie pri $r_i \geqq 2$ sú stručne popísané v učebnici (Pirč a Buša, 2002) a samozrejme v množstve ďalšej odbornej literatúry.

Poznámka 4.1. Použitiu interpolačných vzorcov na aproximáciu funkčnej hodnoty v bode, ktorý neleží v intervale $\langle x_0, x_n \rangle$ sa hovorí extrapolácia. Extrapolácia vo všeobecnosti je menej presná ako interpolácia a preto je potrebné ju používať veľmi opatrne.

4.2. Lagrangeov interpolačný polynóm

Funkciu f zadanú v $n + 1$ bodoch aproximujeme pomocou polynómu tvaru

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot g_i(x) \tag{4.2}$$

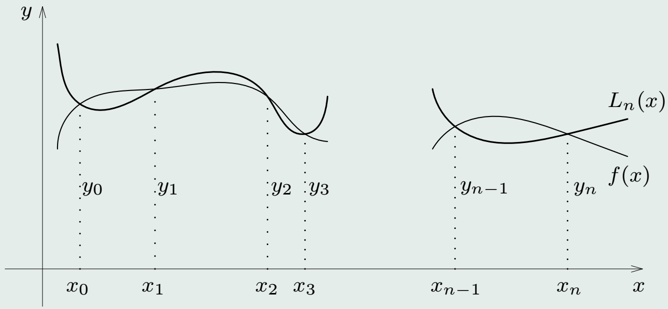
tak, aby

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Body x_i nazývame uzlovými bodmi.

Ak funkcie g_i zvolíme tak, aby platilo

$$g_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{pre } i = j, \\ 0, & \text{pre } i \neq j, \end{cases} \tag{4.4}$$



Obr. 4.1: Interpolačné podmienky

bude podmienka (4.3) splnená.

Je zrejmé, že polynómy g_i nadobúdajú nulové hodnoty v bodoch x_0, x_1, x_2, …, x_{i-1}, x_{i+1}, …, x_n a preto ich môžeme zapísať v tvare

$$g_i(x) = C_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n),$$

kde C_i je reálna konštanta.

Konštantu C_i vypočítame z podmienky $g_i(x_i) = 1$, t. j.

$$g_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

pre $i = 0, 1, \dots, n$. Potom polynóm $L_n(x)$ má tvar

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} f(x_i),$$

čo môžeme zapísať tiež takto

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i). \tag{4.5}$$

Ak $x \in (x_0, x_n)$, potom $f(x)$ môžeme vypočítať pomocou nasledujúceho algoritmu:

Vstup: n, x, x_0, x_1, $\ldots$, x_n, $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\ldots$, $f(x_n)$
 $L_n = 0$;
 Pre $i = 0, 1, \ldots, n$
  $G = 1$;
  Pre $j = 0, 1, \ldots, n$
   Ak $i \neq j$, $G = G \cdot (x - x_j)/(x_i - x_j)$
  $L_n = L_n + G \cdot f(x_i)$;
Výstup: $f(x) = L_n(x)$

Príklad 4.1. Nech sú zadané hodnoty funkcie $f : \langle 1, 4\rangle \to \mathbb{R}$ tabuľkou:

x	1	2	4
$f(x)$	1	4	16

.

Nahraďme funkciu pomocou polynómu $L_2(x)$ a vypočítajme približnú hodnotu funkcie f v bode $x = 3$ pomocou $L_2(3)$.

Riešenie. Pre $n = 2$ máme

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \cdot f(x_2).$$

Vzhľadom na zadané hodnoty dostávame

$$L_2(3) = \frac{(3-2)(3-4)}{(1-2)(1-4)} \cdot 1 + \frac{(3-1)(3-4)}{(2-1)(2-4)} \cdot 4 + \frac{(3-1)(3-2)}{(4-1)(4-2)} \cdot 16 = 9.$$

Zadané hodnoty funkcie $f(x)$ môžu byť napríklad hodnoty funkcie $f(x) = x^2$, v takom prípade je $L_2(3)$ presnou hodnotou funkcie f v bode $x = 3$.

Lagrangeov interpolačný polynóm použijeme, napríklad, ak chceme pre nejakú hodnotu x^*, ktorá sa nachádza medzi uzlovými bodmi x_i, určiť jej odpovedajúcu „rozumnú“ hodnotu y^*. Možný je aj opačný prípad, ak pre nejakú hodnotu y^*, ktorá sa nachádza medzi uzlovými hodnotami y_i chceme určiť odpovedajúcu hodnotu x^*. Teda vlastne chceme riešiť rovnicu $f(x) = y^*$, pre „hypotetickú závislosť“ danú funkciou $f(x)$. Pomocou inverznej funkcie f^{-1} (ak by existovala), by sme dostali $x^* = f^{-1}(y^*)$. V tejto situácii sú možné dva prístupy k určeniu hodnoty x^*, ktoré môžu viesť k rôznym výsledkom:

1. Určíme Lagrangeov interpolačný polynóm $L_n(x)$, a potom namiesto rovnice $f(x) = y^*$ riešime algebrickú rovnicu $L_n(x) = y^*$.
2. Inverznú funkciu $f^{-1}(y)$ interpolujeme pomocou tzv. *inverzného Lagrangeovho polynómu*, ktorý označíme $L_n^{-1}(y)$ a približnú hodnotu x^* určíme ako $x^* = L_n^{-1}(y^*)$. Tento postup je často jednoduchší. Vzorec pre inverzný Lagrangeov polynóm získame jednoduchou výmenou premenných x a y vo vzorci (4.5):

$$L_n^{-1}(y) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(y - y_j)}{(y_i - y_j)} \cdot x_i. \tag{4.6}$$

Príklad 4.2. Vypočítajme približnú hodnotu x, pre ktorú funkcia daná tabuľkou

x	-3	-2	0	1
y	4	3	-1	-5

nadobúda hodnotu -3 (príklad je uvedený v (Bača, Doboš, Knežo a Schusterová, 2003)).

Riešenie.

$$x^* = L_3^{-1}(-3) = -3 \cdot \frac{(-3-3)(-3+1)(-3+5)}{(4-3)(4+1)(4+5)} -$$

$$-2 \cdot \frac{(-3-4)(-3+1)(-3+5)}{(3-4)(3+1)(3+5)} + 0 \cdot \frac{(-3-4)(-3-3)(-3+5)}{(-1-4)(-1-3)(-1+5)} +$$

$$+1 \cdot \frac{(-3-4)(-3-3)(-3+1)}{(-5-4)(-5-3)(-5+1)} \approx 0{,}841666.$$

Poznámka 4.2. Inverzný Lagrangeov interpolačný polynóm $L_n^{-1}(y)$ nie je inverzná funkcia ku funkcii $L_n(x)$, ktorá najčastejšie nie je rovná polynómu!

4.3. Chyba aproximácie funkcie pomocou Lagrangeovho interpolačného polynómu

Nech $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sú uzlové body interpolácie v intervale I a funkcia $f : I \to \mathbb{R}$ má v každom bode intervalu I deriváciu rádu $n+1$. Urobíme odhad rozdielu $f(x) - L_n(x)$, $x \in (x_0, x_n)$, kde L_n je Lagrangeov interpolačný polynóm, odpovedajúci funkcii f a uzlovým bodom x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Zavedieme nasledujúce označenie

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x), \qquad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Z vlastností polynómu $L_n(x)$ dostávame

$$R_n(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Určme $K(x)$ tak, aby $R_n(x) = K(x)\omega_{n+1}(x)$. Nech funkcia $F : I \to \mathbb{R}$ je zadaná vzťahom

$$F(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)\omega_{n+1}(t).$$

Polynóm $L_n(t)$ je najviac n-tého stupňa, teda $L_n^{(n+1)}(t) = 0$. Polynóm $\omega_{n+1}(t)$ je stupňa $n+1$ s koeficientom 1 pri najvyššej mocnine, teda $\omega_{n+1}^{(n+1)}(t) = (n+1)!$ a ďalej vzhľadom na vlastnosti funkcie f dostávame

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K(x) \cdot (n+1)!.$$

Pretože $F(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ existuje taký bod $\xi \in (x_0, x_n)$, že $F^{(n+1)}(\xi) = 0$, t. j.

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - K(x) \cdot (n+1)!.$$

Odtiaľ dostávame

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Potom

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x).$$

Nech $f^{(n+1)}(x)$ je ohraničená na I, t. j. existuje konštanta $M_{n+1} \in \mathbb{R}$ taká, že

$$M_{n+1} = \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Potom, ako to vyplýva z vyššie uvedeného, môžeme odhadnúť veľkosť absolútnej chyby, ktorej sa dopustíme, ak nahradíme funkčnú hodnotu f v bode x hodnotou interpolačného polynómu v tom istom bode pre ľubovoľné $x \in (x_0, x_n)$ takto:

$$|f(x) - L_n(x)| \leqq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|.$$

Poznámka 4.3. Všimnime si, že výberom uzlových bodov $x_0, x_1, \dots, x_n$ môžeme ovplyvniť $\max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |\omega_{n+1}(x)|$. Touto úlohou sa v 19. storočí zaoberal Čebyšev. Optimálne uzly pre rôzne n sú nulové body Čebyševovych polynómov.

4.4. Metóda najmenších štvorcov

Aproximácia pomocou interpolačných polynómov má niektoré výhody (ľahko sa dajú zkonštruovať a je určitá možnosť odhadu chyby aproximácie), avšak hodnoty aproximovanej funkcie $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ musia byť zadané s vysokou presnosťou. Ak hodnoty boli získané napríklad experimentálne, môžu byť zaťažené väčšími chybami, ako sú chyby zo zaokrúhľovania. Okrem toho pri experimente môžeme merania opakovať pre tú istú hodnotu premennej x. Je zrejmé, že v tomto prípade obyčajne nemôžeme zaručiť, aby boli splnené podmienky interpolácie. V tejto časti nebudeme predpokladať, že aproximujúca funkcia v bodoch x_i, $i = 0, 1, \dots, n$ nadobúda presné hodnoty $f(x_i)$.

Nech namerané tabuľkové hodnoty (x_i, y_i), $i = 0, 1, \dots, n$ sú vyjadrením závislosti x a y, kde x_i sú zvolené hodnoty pri ktorých sme robili merania a y_i je nameraná hodnota funkcie $f(x)$ v bode x_i, $i = 0, 1, \dots, n$. O závislosti medzi x a y predpokladajme, že je lineárna. Aproximujúcu funkciu budeme hľadať v tvare

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x,$$

kde a_0, $a_1 \in \mathbb{R}$ sú neznáme konštanty.

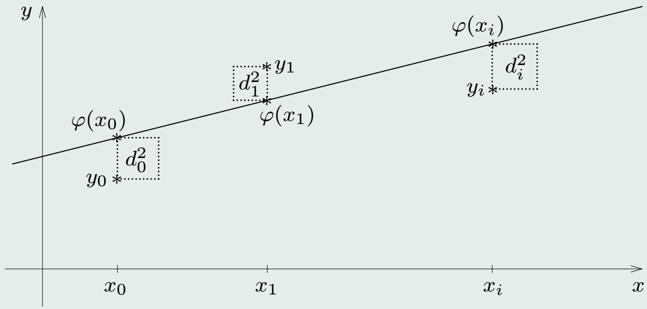
Z množiny všetkých lineárnych funkcií

$$V_1 = \{a_0 + a_1 x |\, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1\},$$

chceme nájsť tú, ktorá najpresnejšie aproximuje funkciu zadanú pomocou tabuľky jej nameraných hodnôt.

Predpokladajme, že hodnoty $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ boli namerané s „približne“ rovnakou presnosťou. Koeficienty a_0^*, a_1^* vypočítame tak, aby súčet štvorcov d_i^2, $i = 0, 1, \dots, n$ bol najmenší, t. j.

$$S(a_0^*, a_1^*) = \sum_{i=0}^{n} [a_0^* + a_1^* x_i - y_i]^2 = \min S(a_0, a_1),$$



Obr. 4.2: Aproximácia pomocou lineárnej funkcie

kde

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} [a_0 + a_1 x_i - y_i]^2.$$

Ostré lokálne minimum funkcie S môže nastať v bode (a_0, a_1), v ktorom sú nulové parciálne derivácie $\dfrac{\partial S}{\partial a_0}$, $\dfrac{\partial S}{\partial a_1}$, t. j.

$$2\sum_{i=0}^{n} [a_0 + a_1 x_i - y_i] \cdot 1 = 0, \qquad 2\sum_{i=0}^{n} [a_0 + a_1 x_i - y_i] \cdot x_i = 0.$$

Po úprave dostávame sústavu rovníc, ktorej riešením sú a_0^*, a_1^*, t. j.

$$a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i, \quad a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i.$$

Dá sa ukázať, že v bode a_0^*, a_1^* funkcia $S(a_0, a_1)$ nadobúda ostré lokálne minimum.

Predpokladajme, že presnosť experimentu pre všetky hodnoty x_i, $i = 0, \ldots, n$ nie je rovnaká. Každej hodnote y_i priradíme v závislosti na presnosti určitú váhu $v_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Ak sú známe rozptyly merania v bodoch x_i je vhodné voliť váhy v_i ako prevrátené hodnoty týchto rozptylov. Hodnoty v_i môžeme určiť tiež na základe skúsenosti s presnosťou meracej aparatúry pre rôzne hodnoty premennej x, pričom hodnotám y_i nameraným s väčšou presnosťou sa priradí väčšia váha, obyčajne $v_i > 1$ a ostatným $v_i = 1$. V prípade, ak sa zaujímame o najmenšiu relatívnu odchýlku, môžeme použiť váhy $v_i = 1/y_i^2$.

Postup, ktorý sme ukázali pre lineárnu závislosť hodnôt x a y, teraz zovšeobecníme.

Označme $M = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Nech k je celé číslo a $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_k(x)$ je systém lineárne nezávislých funkcií na množine M. Za triedu V_k aproximujúcich funkcií vezmeme množinu ich lineárnych kombinácií, t. j.

$$V_k = \{a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x) |\, a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \ldots, k\}\,.$$

Úloha aproximovať funkciu f funkciou

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j\varphi_j(x) \qquad \text{pre} \quad x \in I = \langle x_0, x_n\rangle$$

metódou najmenších štvorcov spočíva v určení takých reálnych koeficientov a_0^*, a_1^*, $\ldots$, a_k^*, ktoré minimalizujú funkciu

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 v_i = \delta^2(\varphi),$$

kde $\delta(\varphi)$ je tzv. kvadratická odchýlka.

Koeficienty a_0^*, a_1^*, $\ldots$, a_k^* môžeme určiť podobne ako pri aproximácii pomocou lineárnej funkcie, t. j. riešením sústavy rovníc

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Odvodíme sústavu rovníc pre prípad $k = 2$:

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{n} v_i \cdot [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i]^2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n} v_i \cdot [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i] \cdot \varphi_0(x_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n} v_i \cdot [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i] \cdot \varphi_1(x_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{i=0}^{n} v_i \cdot [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i] \cdot \varphi_2(x_i).$$

Tieto parciálne derivácie sa rovnajú nule práve vtedy, ak platí:

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} v_i\varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} v_i\varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i) + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} v_i\varphi_2(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} v_i y_i\varphi_0(x_i),$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} v_i\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} v_i\varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} v_i\varphi_2(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=0}^{n} v_i y_i\varphi_1(x_i),$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} v_i\varphi_0(x_i)\varphi_2(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} v_i\varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i) + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} v_i\varphi_2(x_i)\varphi_2(x_i) = \sum_{i=0}^{n} v_i y_i\varphi_2(x_i).$$

Ak použijeme tzv. diskrétny skalárny súčin reálnych funkcií s váhami v_i na množine M:

$$(f, g) = (f, g)_v = \sum_{i=0}^{n} v_i\, f(x_i)\, g(x_i),$$

tak sa získaný systém dá zapísať jednoduchšie (usporiadanú n-ticu hodnôt y_i označíme y):

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) \\ (\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y,\varphi_0) \\ (y,\varphi_1) \\ (y,\varphi_2) \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Vidíme, že „optimálne koeficienty“ a_0^*, a_1^* a a_2^* určíme riešením sústavy lineárnych rovníc (4.7). Je to dôsledok toho, že závislosť funkcie $\varphi(x)$ od koeficientov a_0, a_1 a a_2 je lineárna. V tomto prípade hovoríme o *lineárnej metóde najmenších štvorcov*. Ak je spomínaná závislosť nelineárna, podmienky nulovosti parciálnych derivácií odchýlky vedú na systém nelineárnych rovníc.

Najčastejšie sa v praxi používajú aproximácie pomocou systémov

$$1,\ x,\ \ldots,\ x^n, \tag{4.8}$$

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{4.9}$$

a $v \equiv 1$. Vďaka jednoduchosti polynómov x^i sa sústava rovníc (4.7) dá ľahko zostaviť. Riešenie takejto sústavy pre veľké k je však dosť pracné, naviac je matica sústavy (4.7) zle podmienená a výsledky môžu byť zaťažené neúnosne veľkými chybami. Aby sme sa čiastočne vyhli spomenutým ťažkostiam, je výhodné uvažovať ortogonálny systém funkcií $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ vzhľadom na váhovú funkciu v. Napríklad systém (4.9) je ortogonálny na intervale $\langle -l, l\rangle$ pre váhovú funkciu $v \equiv 1$. Ak $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_k$ je ľubovoľná lineárne nezávislá $(k+1)$-tica polynómov, môžeme z nej utvoriť $(k+1)$-ticu ortogonálnych polynómov, napríklad pomocou Schmidtovho ortogonalizačného procesu. Pre rôzne intervaly a isté váhové funkcie môžeme zkonštruovať napríklad: Čebyševove, Legendreove, Laguerrove, Hermitove, Grammove polynómy.

Príklad 4.3. Funkciu, danú tabuľkou

x_i	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	1	1,1
y_i	3,45	3,54	4,1	4,35	4,6	5,05	5,14

aproximujme, v zmysle metódy najmenších štvorcov, polynómom prvého a druhého stupňa.

Riešenie. Uvažujme najprv aproximáciu pomocou lineárnej funkcie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x.$$

Za bázu priestoru V_1 môžeme vziať funkcie 1, x a váhovú funkciu $v \equiv 1$. Sústava normálnych rovníc (4.7) má tvar

$$\begin{aligned} a_0(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_0, \varphi_1) &= (\varphi_0, y), \\ a_0(\varphi_1, \varphi_0) + a_1(\varphi_1, \varphi_1) &= (\varphi_1, y), \end{aligned} \tag{4.10}$$

kde $\varphi_0 \equiv 1$, $\varphi_1 = x$. Niektoré kalkulačky majú už priamo zabudovaný výpočet koeficientov a_0, a_1. Ak nemáme takúto výpočtovú techniku, potom je vhodné použiť schému, uvedenú v tabuľke 4.1. Vzhľadom na hodnoty uvedené v tabuľke, sústava (4.10) bude mať tvar

$$7a_0 + 4{,}6a_1 = 30{,}23,$$

$$4{,}6a_0 + 3{,}72a_1 = 21{,}231.$$

Riešením tejto sústavy dostávame a_0^*, a_1^*, teda

$$\varphi^* = 3{,}03135 + 1{,}9588x.$$

Podobne postupujeme pri aproximácii pomocou funkcie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Tabuľka 4.1: Pomocné hodnoty pri výpočte matice sústavy

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$\varphi^*(x_i)$	$(\varphi^*(x_i) - y_i)^2$
0	0,2	3,45	0,04	0,690	3,423	0,001
1	0,3	3,54	0,09	1,062	3,619	0,006
2	0,5	4,10	0,25	2,050	4,011	0,008
3	0,7	4,35	0,49	3,045	4,403	0,003
4	0,8	4,60	0,64	3,680	4,598	0,000
5	1,0	5,05	1,00	5,050	4,990	0,004
6	1,1	5,14	1,21	5,654	5,186	0,002
	4,6	30,23	3,72	21,231		

Uvažujeme

$$\varphi_0 \equiv 1,\ \varphi_1 = x,\ \varphi_2 = x^2, \quad v \equiv 1.$$

Zo sústavy (4.7) dostávame sústavu rovníc

$$a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i.$$

Potom pre zadané tabuľkové hodnoty dostávame

$$7a_0 + 4{,}6a_1 + 3{,}72a_2 = 30{,}23,$$

$$4{,}6a_0 + 3{,}72a_1 + 3{,}42a_2 = 21{,}231,$$

$$3{,}72a_0 + 3{,}42a_1 + 3{,}186a_2 = 17{,}8265.$$

Riešením sústavy dostávame $a_0^* = 3{,}4033$, $a_1^* = 0{,}61756$, $a_2^* = 0{,}9586$.

Potom

$$\varphi(x) = 3{,}4033 + 0{,}61756x + 0{,}9586x^2.$$

Poznámka 4.4. Postup, uvedený vyššie, môžeme použiť aj pre nelineárne funkčné závislosti, ktoré sa dajú vhodnou formou pretransformovať na lineárne. Pre funkčnú závislosť zadanú tabuľkou jej hodnôt (x_i, ψ_i) a aproximujúcu funkciu

$$\psi = A \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}$$

konštanty A, α určíme takto:

Logaritmovaním dostávame

$$\ln \psi = \ln A \; + \alpha x.$$

Ak označíme $y_i = \ln \psi_i$, $\ln A = a_0$, $\alpha = a_1$, môžeme na výpočet koeficientov a_0, a_1 použiť sústavu rovníc (4.10). Potom $A = \mathrm{e}^{a_0}$.

Poznámka 4.5. Je potrebné si uvedomiť, že hoci linearizáciou dostávame rozumnú aproximáciu, nemusí to byť optimálna aproximácia v zmysle pôvodnej nelineárnej závislosti.

Otázky k prebranej tematike:

- V čom spočíva úloha interpolácie pomocou polynómov?
- Aký tvar má Lagrangeov interpolačný polynóm pre štvoricu bodov (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) a (x_4, y_4)?
- Aký je vzorec na odhad chyby Lagrangeovej interpolácie pre známu funkciu $f(x)$?
- Na akom princípe je založená metóda najmenších štvorcov?
- Aký tvar má sústava lineárnych algebrických rovníc v prípade lineárnej metódy najmenších štvorcov?

Úlohy

4.1. Určte Lagrangeov interpolačný polynóm pre funkciu danú tabuľkou

x_i	0	2	3	5
y_i	1	3	2	5

$[3x^3/10 - 13x^2/6 + 62x/15 + 1]$

4.2. Zostrojte inverzný Lagrangeov interpolačný polynóm pre tabuľku

x_i	1	2	4
y_i	1	4	16

$[(-y^2 + 35y + 56)/90]$

4.3. Pomocou metódy najmenších štvorcov aproximujte funkciu f (danú tabuľkou), polynómom najviac k-teho stupňa:

a)

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	0	-2	-2	2	15	25

, $k = 2$.

b)

x_i	-2	-1	-1	0	1	1
y_i	$21{,}8$	$13{,}9$	$14{,}3$	$5{,}9$	$-1{,}9$	$-2{,}2$

, $k = 1$.

c)

x_i	$-1{,}5$	$-0{,}7$	$-0{,}2$	$0{,}4$	$0{,}9$	$1{,}3$	$1{,}8$
y_i	$25{,}52$	$7{,}83$	$3{,}39$	$4{,}62$	$11{,}11$	$19{,}91$	$35{,}45$

, $k = 2$.

[a) $2x^2 + 3{,}1428571x - 1{,}571428$; b) $-7{,}9954x + 5{,}96818$; c) $10{,}0156x^2 + 0{,}0113x + 2{,}9817$]

4.4. Metódou najmenších štvorcov aproximujte polynómom najviac druhého stupňa funkciu f danú tabuľkou

x_i	$0{,}5$	1	3	6	12
y_i	$0{,}4$	$-1{,}8$	$-3{,}9$	$-24{,}1$	$-83{,}4$

.

[$1{,}08 - 1{,}28x - 0{,}33x^2$]

5. Numerický výpočet určitého integrálu

Približný výpočet integrálov patrí medzi štandardné úlohy numerickej matematiky, používa sa ako čiastková úloha pri riešení iných úloh. Uvedieme len najjednoduchšie metódy. V literatúre sú popísané mnohé ďalšie, omnoho efektívnejšie najmä pre špeciálne triedy funkcií. Opísané metódy umožnia čitateľovi lepšie pochopiť základy numerického riešenia diferenciálnych rovníc.

Budeme sa zaoberať numerickými metódami výpočtu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a < b$ sú reálne čísla (pričom ide o Riemanov integrál) a predpokladáme, že funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$.

Interval $I = \langle a, b\rangle$ rozdelíme na n intervalov rovnakej dĺžky uzlovými bodmi

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

kde $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = 0, 1, \ldots, n$ a $h = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{b-a}{n}$ je konštantný krok.

Nech pre prirodzené čísla s a n_1 platí $n = s \cdot n_1$. Budeme uvažovať len prípady $s = 1$, $n = n_1$ a $s = 2$, $n = 2\,n_1$. Z vlastností určitého integrálu dostávame

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+sh} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+sh}^{x_0+2sh} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_0+(n_1-1)sh}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.1}$$

Budeme sa venovať len približnému výpočtu $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+sh} f(x)\,\mathrm{d}x$, pričom uvedieme tzv. elementárne vzorce, vzťahujúce sa na interval $\langle x_0, x_0 + sh\rangle$. Vzorce sa dajú získať napríklad integrovaním interpolačných polynómov.

Uvažujme najprv prípad $s = 1$, a teda interval $\langle x_0, x_0 + h\rangle = \langle x_0, x_1\rangle$. Ak na tomto intervale budeme aproximovať funkciu $f(x)$ Lagrangeovým polynómom *prvého* stupňa s krajnými uzlovými bodmi x_0 a x_1, dostaneme približnú hodnotu

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_1} L_1(x; x_0, x_1) = \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_1)] = L.$$

Toto je elementárne pravidlo (vzorec) tzv. *lichobežníkovej* metódy.

V prípade $s = 2$ bude interval $\langle x_0, x_0 + 2h\rangle = \langle x_0, x_2\rangle$. Ak na tomto intervale budeme aproximovať funkciu $f(x)$ Lagrangeovým polynómom *druhého* stupňa s uzlovými bodmi x_0, x_1 a x_2, dostaneme približnú hodnotu

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x; x_0, x_1, x_2) = \frac{h}{3} \cdot [f(x_0) + 4\,f(x_1) + f(x_2)] = S.$$

Toto je elementárne pravidlo (vzorec) tzv. *Simpsonovej* metódy.

Poznámka 5.1. Podobne sa dá postupovať pri zvyšovaní čísla s použitím interpolačných polynómov vyššieho stupňa. Presnosť sa dá zvyšovať aj vhodnejšou voľbou uzlových bodov, ako je ich rovnomerné rozloženie — optimálne rozloženie sa dosahuje pri tzv. *Gaussovych* kvadratúrach.

Označme M_2 a M_4 horné odhady druhej a štvrtej derivácie na intervale $\langle a, b\rangle$:

$$M_2 \geqq \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f^{(2)}(x)|, \qquad M_4 \geqq \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f^{(4)}(x)|.$$

Ďalej označíme $L(n)$ a $S(n)$ (v tomto prípade musí byť $n \geqq 4$ párne) vzorce, ktoré vzniknú súčtom vyššie uvedených základných vzorcov na základe vzťahu (5.1). Môžeme napísať:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx L(n) = h \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right], \tag{5.2}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S(n) = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right]. \tag{5.3}$$

Chyby jednotlivých metód pri počte delení n označíme

$$R_L(n) = L(n) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$R_S(n) = S(n) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pomocou vzorcov na odhad chyby Lagrangeovej, resp. Jacobiovej interpolácie sa dajú odvodiť *horné odhady chýb* uvažovaných metód:

a) pre lichobežníkovú metódu pre krok h, resp. pre počet delení n

$$|R_L(n)| \leqq \frac{b-a}{12} M_2 h^2, \quad \text{resp.} \quad |R_L(n)| \leqq \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2}, \tag{5.4}$$

b) pre Simpsonovu metódu pre krok h, resp. pre (párny) počet delení n

$$|R_S(n)| \leqq \frac{b-a}{180} M_4 h^4, \quad \text{resp.} \quad |R_S(n)| \leqq \frac{(b-a)^5 M_4}{180n^4}. \tag{5.5}$$

Vidíme, že *v prípade hladkých funkcií* môžeme zvyšovaním počtu delení n ľubovoľne zmenšovať horný odhad chyby, a teda *môžeme zabezpečiť ľubovoľnú presnosť numerického výpočtu integrálov* (samozrejme, za predpokladu presného výpočtu funkčných hodnôt a vzorcov).

V prípade, ak zadáme požadovanú presnosť výpočtu ε, zvolíme pre použitú metódu také veľké n, aby bol horný odhad chyby menší ako ε. Tým automaticky zabezpečíme, že aj chyba danej metódy bude menšia ako ε, teda zabezpečíme požadovanú presnosť.

Na výpočet integrálu pomocou Simpsonovej metódy môžeme použiť napríklad tento algoritmus:

Vstup: a, b, $f(x)$, N-párne
$h = (b - a)/N$
$S = f(a) + f(b)$
$i = 1$, $x = a$
Pre $j = 1, 2, \ldots, N - 1$
$x = x + h$
$S = S + (3 + i)f(x)$
$i = -i$
$S = hS/3$
Výstup: *integrál* $= S$.

Príklad 5.1. Vypočítajme pomocou lichobežníkovej metódy a Simpsonovej metódy, s presnosťou $\varepsilon = 0{,}01$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie. Na určenie kroku h (počtu delení n) použijeme vzťahy (5.4), resp. (5.5). Pre $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ je

$$\max_{0 \leqq x \leqq 1} |f''(x)| \leqq 6\mathrm{e} = M_2, \quad \text{resp.} \quad \max_{0 \leqq x \leqq 1} |f^{(4)}(x)| \leqq 76\mathrm{e} = M_4.$$

Po dosadení do vzťahov pre horné odhady a po porovnaní s presnosťou ε dostávame pre lichobežníkovú metódu $h < 0{,}086$ ($n > 11{,}66$), resp. $h < 0{,}31$ ($n > 3{,}27$) pre Simpsonovu metódu.

Teda pre lichobežníkovú metódu môžeme zvoliť $n = 12$, čiže $h = 1/12$. Dostávame

$$L(12) = \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{12}\Big[\frac{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1}{2} + \mathrm{e}^{(1/12)^2} + \cdots + \mathrm{e}^{(11/12)^2}\Big] \approx 1{,}4658.$$

Pre Simpsonovu metódu pri $n = 4$, $h = 0{,}25$ dostávame hodnotu

$$S(4) = \frac{0{,}25}{3}\big[\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1 + 4(\mathrm{e}^{(0{,}25)^2} + \mathrm{e}^{(0{,}75)^2}) + 2\mathrm{e}^{(0{,}5)^2}\big] \approx 1{,}4637.$$

Otázky k prebranej tematike:

- Aký je vzorec lichobežníkovej metódy a ako odhadneme jej chybu, ak interval rozdelíme na n častí rovnakej dĺžky?
- Aký je vzorec Simpsonovej metódy a ako odhadneme jej chybu, ak interval rozdelíme na n častí rovnakej dĺžky?
- Ako postupujeme pri numerickom výpočte určitého integrálu, ak máme zadanú požadovanú presnosť výpočtu?

Úlohy

V úlohách 6.1 – 6.3 vypočítajte $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lichobežníkovou metódou a odhadnite chybu výpočtu:

5.1. $\displaystyle\int_{0,7}^{1,3} \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+0,3)^{1/2}}, \quad n = 17.$ [0,40419]

5.2. $\displaystyle\int_{0,2}^{1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad n = 10.$ [0,746402]

5.3. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos^2 x)^{1/2}\,\mathrm{d}x, \quad n = 10.$ [1,9101]

V úlohách 5.4 – 5.6 vypočítajte $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ Simpsonovou metódou a odhadnite chybu výpočtu:

5.4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \mathrm{e}^{1/x}\,\mathrm{d}x, \quad n = 4.$ [2,0207]

5.5. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x, \quad n = 4.$ [0,8285]

5.6. $\displaystyle\int_{0}^{1,2} \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x, \quad n = 6.$ [0,4225]

V úlohách 5.7 – 5.9 s danou presnosťou vypočítajte $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
a) lichobežníkovou metódou
b) Simpsonovou metódou.

5.7. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}, \quad \varepsilon = 0{,}0005.$ [a) $n = 12$; 0,83521; b) $n = 4$; 0,83579]

5.8. $\displaystyle\int_{1}^{10} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \quad \varepsilon = 0{,}05.$ [a) $n = 18$; 20,408093; b) $n = 10$; 20,414311]

5.9. $\displaystyle\int_{0}^{1} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x, \quad \varepsilon = 0{,}005.$ [a) $n = 9$; 0,90279277; b) $n = 4$; 0,90450127]

6. Numerické riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc a ich sústav

Mnohé fyzikálne a technické problémy sa riešia pomocou diferencálnych rovníc. V základnom kurze matematickej analýzy sme študovali niektoré špeciálne triedy diferenciálnych rovníc, ktoré vieme riešiť pomocou elementárnych funkcií. Len pomerne málo diferenciálnych rovníc je takých, pre ktoré vieme nájsť presné riešenie. Preto je veľmi často nutné nájsť ich približné riešenie. V tejto kapitole stručne popíšeme len najjednoduchšie metódy, medzi nimi často používanú Rungeho-Kuttovu metódu 4. rádu.

6.1. Formulácia začiatočných úloh

V tejto kapitole sa budeme zaoberať problematikou numerického riešenia úloh so začiatočnými podmienkami pre obyčajné diferenciálne rovnice. Takou úlohou pre sústavu n diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$
\begin{aligned}
&y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n),\\
&y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n),\\
&x \in \langle a, b\rangle,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

budeme rozumieť hľadanie n funkcií $y_1, y_2, \dots, y_n$ premennej x definovaných, spojitých a spojite diferencovateľných v intervale $\langle a, b\rangle$, ktoré vyhovujú rovniciam (6.1) a doplňujúcim *začiatočným (tzv. Cauchyho) podmienkam*

$$
y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0},
\tag{6.2}
$$

kde $\boldsymbol{y} = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})^T$ je daný n-rozmerný vektor a x_0 je pevne zvolený bod z intervalu $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 6.1. Často sa vyskytujú úlohy nájsť riešenie sústavy (6.1), ktoré vyhovuje doplňujúcim podmienkam vo viacerých bodoch intervalu $\langle a, b\rangle$. V tomto prípade hovoríme o *okrajových podmienkach.*

Aplikácie vedú často ku *Cauchyho úlohe pre diferenciálnu rovnicu n-tého rádu tvaru*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

so začiatočnými podmienkami

$$y^{(i)}(x_0) = y_{i0}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Tento poblém môžeme pretransformovať na úlohu (6.1), (6.2). Zavedením nových funkcií predpisom $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, $\ldots$, $y_n = y^{(n-1)}$ dostávame sústavu diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2,\\
y_2' &= y_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
y_{n-1}' &= y_n,\\
y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),
\end{aligned}$$

so začiatočnými podmienkami

$$y_1(x_0) = y_{00}, \quad y_2(x_0) = y_{10}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_{n-1,0}.$$

Pri popise jednotlivých metód sa budeme zaoberať obyčajne jednou diferenciálnou rovnicou

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \tag{6.3}$$

so začiatočnou podmienkou

$$y(x_0) = y_0. \tag{6.4}$$

Ak prejdeme vo vzťahoch (6.1), (6.2) k vektorovému vyjadreniu a ak zavedieme označenie

$$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T, \quad \boldsymbol{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}),$$

$$\boldsymbol{y}_0 = [y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}]^T,$$

môžeme sústavu (6.1) so začiatočnými podmienkami (6.2) zapísať v tvare

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{f}\big(x, \boldsymbol{y}(x)\big), \qquad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0. \tag{6.5}$$

Poznámka 6.2. K preneseniu výsledkov, ktoré budú formulované pre úlohu (6.3), (6.4), na úlohu (6.5) stačí obyčajne od označení y a f prejsť k vektorovým označeniam $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{f}$.

Z matematickej analýzy vieme, že ak funkcia f je spojitá v obdĺžniku

$$D = \{(x, y) |\ x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a,\ y_0 - b \leqq y \leqq y_0 + b\}$$

(teda existuje taká konštanta M, že platí $|f(x, y)| \leqq M$ pre $(x, y) \in D$) a funkcia f spĺňa Lipschitzovu podmienku vzhľadom k y na oblasti D, teda existuje taká konštanta L, že platí

$$|f(x, v) - f(x, u)| \leqq L|v - u| \quad \text{pre všetky} \quad (x, u) \in D,\ (x, v) \in D,$$

potom existuje práve jedno riešenie diferenciálnej rovnice (6.3), ktoré spĺňa začiatočnú podmienku (6.4) a je definované na uzavretom intervale $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$, kde

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Poznámka 6.3. Podobne môžeme formulovať podmienky o existencii a jednoznačnosti riešenia sústavy diferenciálnych rovníc.

Poznámka 6.4. V prípade diferencovateľnosti funkcie f na D môžeme Lipschitzovu podmienku nahradiť silnejšou podmienkou ohraničenosti parciálnej derivácie

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < K$$

na D.

Pri numerickom riešení úlohy (6.3), (6.4) aproximujeme funkčné hodnoty riešenia v uzlových bodoch $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$. Pre jednoduchosť použijeme ekvidištantné hodnoty, t. j.

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \qquad i = 0, 1, \dots, n,$$

kde h je konštanta, ktorú nazývame integračným krokom.

Pre presné riešenie začiatočnej úlohy v bode x_i budeme používať označenie $y(x_i)$ a jej približnú hodnotu budeme označovať y_i.

Aproximácia y_{i+1} sa počíta z hodnôt približného riešenia, vypočítaných už v predchádzajúcich uzlových bodoch. Metóda, ktorá k tomuto výpočtu používa k hodnôt y_{i+1-k}, $\dots$, y_{i-1}, y_i sa nazýva k-kroková metóda. Ak je $k > 1$, je to *viackroková metóda*.

V priebehu výpočtu vznikajú dva druhy chýb. Sú to chyby metódy, tzv. diskretizačné a chyby zaokrúhľovacie. Diskretizačné chyby posudzujeme lokálne a globálne.

1. Nech $\bar{y}$ je riešenie Cauchyho úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_i) = y_i$. Ďalej nech y_{i+1} je hodnota, vypočítaná danou metódou v bode x_{i+1}. Potom *lokálnou diskretizačnou chybou* rozumieme

$$d_i = \bar{y}(x_{i+1}) - y_{i+1}.$$

2. *Globálnou diskretizačnou chybou* v uzle x_i nazývame

$$e_i = y(x_i) - y_i,$$

kde $y(x)$ je riešenie Cauchyho úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ a y_i je hodnota určená numerickou metódou po i-tom kroku.

Hovoríme, že numerická metóda na riešenie danej úlohy je *konvergentná*, ak pre $h \to 0^+$, $e_i \to 0$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$.

Rádom numerickej metódy na riešenie Cauchyho úlohy rozumieme najväčšie celé číslo p (údaj charakterizujúci kvalitu aproximácie presného riešenia), pre ktoré platí vzťah

$$|d_i| \leqq ch^{p+1}, \qquad \big(d_n = \mathcal{O}(h^{p+1})\big), \tag{6.6}$$

kde c je istá kladná konštanta.

Poznámka 6.5. Pre globálnu diskretizačnú chybu platí približný odhad

$$|e_i| \approx K\ h^p.$$

Ak použijeme tú istú metódu s polovičným krokom je

$$|e_i| \approx K\ \left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{1}{2^p} K\ h^p \tag{6.7}$$

(kde K je opäť istá kladná konštanta), teda globálna diskretizačná chyba sa zmenší 2^p krát. Presnejší odhad je uvedený napríklad v práci (Riečanová a kol., 1987).

Ak konštanty c, K vo vzorcoch (6.6), (6.7) poznáme, alebo vieme urobiť ich odhad, jedná sa o odhad chyby. Ak vieme iba, že také konštanty existujú, dáva vzorec (6.7) iba informáciu o rýchlosti konvergencie.

U konvergentných metód máme teoreticky zabezpečené, že pri voľbe malého kroku h budú aproximácie y_i, $i = 1, 2, \ldots,$ dostatočne blízko k presným hodnotám $y(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Pri zväčšovaní počtu deliacich bodov sa zväčšuje počet aritmetických operácií a tým sa zväčšuje zaokrúhľovacia chyba.

6.2. Integrálny tvar Cauchyho začiatočnej úlohy

Dá sa ukázať, že *presným riešením* Cauchyho začiatočnej úlohy je funkcia $y(x)$, pre ktorú platí

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, \mathrm{d}t.$$

Ak za začiatočný bod zvolíme x_i a bod x nahradíme bodom x_{i+1}, dostaneme *presný* vzorec

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\big(t, y(t)\big)\,\mathrm{d}t. \tag{6.8}$$

Integrál na pravej strane (6.8) teda predstavuje prírastok funkcie $y(x)$ na intervale $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$.

Približné riešenia y_i dostávame, ak vo vzorci (6.8): 1. nahradíme $y(x_i)$ a $y(x_{i+1})$ ich aproximáciami y_i a y_{i+1} a 2. integrál nahradíme nejakou približnou hodnotou (označme ju K_i):

$$y_{i+1} = y_i + K_i, \qquad i = 0,\ 1,\ \ldots$$

Tento postup teda v sebe zahŕňa dva zdroje chýb.

Poznámka 6.6. Ak označíme $F(x) = f\big(x, y(x)\big)$, tak našou úlohou je približný výpočet určitého integrálu $K_n \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)\,\mathrm{d}x$ *neznámej* funkcie $F(x)$.

6.3. Eulerova, implicitná a Heunova metóda

Ak si uvedomíme, že na intervale $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ poznáme na začiatku len hodnotu $F(x)$ v bode x_i, hodnotu určitého integrálu na pravej strane (6.8) nahradíme veľkosťou obdĺžnika so šírkou h a výškou $F(x_i)$ (*obdĺžnikovou metódou s uzlom* x_i). Označme teda

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i).$$

Použitím tejto aproximácie integrálu dostávame rekurentný vzorec *Eulerovej* metódy:

$$y_{i+1} = y_i + k_1, \qquad \text{alebo} \qquad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i). \tag{6.9}$$

Použitím *lichobežníkového pravidla* dostaneme

$$k_L = \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})],$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\big[f\big(x_i, y(x_i)\big) + f\big(x_{i+1}, y(x_{i+1})\big)\big]. \tag{6.10}$$

Je to tzv. *implicitná metóda*, pretože neznáma hodnota y_{i+1} nie je explicitne vyjadrená. Na jej určenie je vo všeobecnosti potrebné riešiť (v každom kroku) nelineárnu algebrickú rovnicu. Implicitné metódy sú známe ako stabilnejšie v porovnaní s explicitnými.

Použijeme hodnotu $x_{i+1} = x_i + h$ a nahradíme hodnotu $y(x_{i+1})$ vo vzťahu (6.10) hodnotou y_{i+1} vypočítanou pomocou Eulerovej metódy $y^E_{i+1} = y_i + k_1$ a zapíšeme

$$k_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_1).$$

Potom pre $i = 0, 1, \ldots,$ dostaneme

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + k_2}{2}. \tag{6.11}$$

Táto metóda sa nazýva *Heunova* alebo tiež *Cauchyho-Eulerova*. V každom kroku vypočítame najprv hodnoty k_1 a k_2 (reprezentujúce prírastky funkcie y) a potom ako prírastok použijeme ich priemer.

Poznámka 6.7. Vo vyššie uvedenom zápise sa už objavuje spôsob riešenia metódami Rungeho-Kuttovými.

Poznámka 6.8. Heunovu metódu môžeme tiež zaradiť medzi metódy *typu prediktor-korektor* (PC), v ktorých najprv vypočítame menej presnú hodnotu (prediktor) a túto potom použijeme na výpočet presnejšej (korigovanej) hodnoty. Túto myšlienku môžeme zopakovať a dostávame tzv. iteračné spresnenie metódy pomocou rekurentného vzorca

$$y^{(k+1)}_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^{(k)}_{i+1})], \tag{6.12}$$

kde

$$y^{(0)}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Podľa počtu „korekcií“ hovoríme o metóde PC, PC^2, PC^3 atď. (táto metóda konverguje ak $h < \frac{2}{L}$).

6.4. Rungeho-Kuttove metódy

Základom skupiny jednokrokových metód, ktoré sa často používajú, je vyjadrenie aproximácie y_{i+1} v tvare

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^{s} w_j\, k_j, \tag{6.13}$$

kde w_j sú vhodné konštanty a hodnoty k_j sú

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$k_j = h \cdot f\Big(x_i + \alpha_j\, h, y_i + \sum_{m=1}^{j-1} \beta_{j,m}\, k_m\Big), \quad j = 2, 3, \ldots, s.$$

Hodnoty k_j sú získané z funkčných hodnôt funkcie f vo vhodne zvolených bodoch, pričom metóda nevyžaduje konštantný krok. Konštanty w_j, α_j, $\beta_{j,m}$ pre $j = 1$, 2, ..., s, $m = 1$, 2, ..., $j-1$ určujeme tak, že požadujeme rovnosť medzi prvými $p+1$ členmi Taylorovho rozvoja ľavej a pravej strany vzťahu (6.13), kde $y(x)$ je presné riešenie. Tak dostaneme jednokrokovú metódu rádu p.

Pre rád $p = 2$ dostávame

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_1),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\, k_1 + \frac{1}{2}\, k_2,$$

čo je vyššie uvedená Heunova alebo Cauchyho-Eulerova metóda.

Ak na výpočet k_2 využijeme stredný bod intervalu a teda aj polovičný prírastok $k_1/2$ funkcie y, dostaneme:

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$\hat{k}_2 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_1/2),$$

$$y_{i+1} = y_i + \hat{k}_2.$$

Označme túto metódu jednoducho *Rungeho-Kuttova metóda 2. rádu.*

Poznámka 6.9. Koeficienty každej Rungeho-Kuttovej metódy, ktorá má mať maximálny dosiahnuteľný rád, sa určujú zo značne zložitých sústav nelineárnych algebrických rovníc (Bachvalov, Židkov a Kobeľkov, 1987; Pirč a Buša, 2002). Ak použijeme iné váhové koeficienty, zníži sa presnosť vypočítaných hodnôt.

Poznámka 6.10. Pri odvodení rovníc sa využívajú parciálne derivácie funkcie $f(x, y)$ podľa premenných x a y. Metódy vyššieho rádu si prirodzene vyžadujú spojitosť všetkých parciálnych derivácií vyšších rádov. Metódy rádu vyšieho ako štvrtého sa nepoužívajú veľmi často. Známe sú napríklad Nyströmova metóda piateho rádu, Huťova metóda šiesteho rádu. V MATLABe sa používa procedúra `ode45`, z ktorej názvu môžeme dedukovať, že sa jedná o kombináciu metód 4. a 5. rádu.

Najpoužívanejšiou metódou je metóda *Rungeho-Kuttova štvrtého rádu*:

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_2 &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_1/2), \\ k_3 &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_2/2), \\ k_4 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}, \end{aligned} \tag{6.14}$$

pričom $y(x_{n+1}) = y_{n+1} + \mathcal{O}(h^4)$.

Poznámka 6.11. Pozorný čitateľ si iste všimne podobnosť Rungeho-Kuttovej metódy 4. rádu so Simpsonovou metódou, ktorú môžeme chápať tak, že výsledok je vážený aritmetický priemer hodnôt získaných obdĺžnikovými metódami s výbermi bodov na krajoch a v strede intervalu. V tomto prípade používame obdĺžnikovú metódu v „strednom“ bode dvakrát a váha 4 sa rozdelí na dve váhy po 2.

Poznámka 6.12. Pre sústavu diferenciálnych rovníc použijeme okrem vektorov $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{f}$ aj vektory $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ a $\boldsymbol{k}_4$.

Poznámka 6.13. Na odhad chyby aproximácie pomocou Rungeho-Kuttovej metódy štvrtého rádu môžeme použiť metódu polovičného kroku, pričom platí približný odhad

$$e\left(x, \frac{h}{2}\right) \approx \frac{1}{15}\left[y\left(x, \frac{h}{2}\right) - y(x,h)\right].$$

Príklad 6.1. Určme približné riešenie Cauchyho začiatočnej úlohy

$$y'(x) = y(x), \qquad y(0) = 1,$$

v bode $x_n = 1$.

Riešenie. Presným riešením danej začiatočnej úlohy je exponenciálna funkcia $y(x) = \mathrm{e}^x$. Teda žiadaná hodnota je $y(1) = \mathrm{e} = 2{,}718281828459045\ldots$ V tomto prípade sa vďaka jednoduchosti a linearite funkcie $f(x,y)$ dajú rekurentné vzorce vyjadriť v tvare:

Eulerova metóda: $y_{i+1} = (1+h)\cdot y_i$,

Implicitná metóda: $y_{i+1} = (1+h/2)/(1-h/2)\cdot y_i$,

Heunova metóda: $y_{i+1} = (1+h+h^2/2)\cdot y_i$, Tabuľka 6.1: Porovnanie kvality rôznych metód, v tabuľke sú uvedené vypočítané hodnoty $\hat{y}(1)$ a absolútne hodnoty $|\hat{y}(1) - \mathrm{e}|$

	Eulerova	implicitná	Heunova	R-K 4. rádu
$h = 1$	2.00000000	3.00000000	2.50000000	2.7083333333
	0.7183	0.2817	0.2183	0.00995
$h = 0{,}1$	2.59374246	2.72055141	2.71408085	2.7182797441
	0.1245	0.00226	0.0042	$2{,}08 \times 10^{-6}$
$h = 0{,}01$	2.70481383	2.71830448	2.71823686	2.7182818282
	0.0135	$2{,}26 \times 10^{-5}$	$4{,}5 \times 10^{-5}$	$2{,}25 \times 10^{-10}$
$h = 0{,}001$	2.71692393	2.71828206	2.71828138	2.7182818285
	0.0014	$2{,}26 \times 10^{-7}$	$4{,}5 \times 10^{-7}$	1×10^{-13}

Rungeho-Kuttova metóda 4. rádu: $y_{i+1} = (1 + h + h^2/2 + h^3/6 + h^4/24) \cdot y_i$.

Vzorec pre Rungeho-Kuttovu metódu 2. rádu sa *v tomto prípade* zhoduje so vzorcom Heunovej metódy. Pozorný čitateľ vo vzorcoch iste postrehne členy rozvoja funkcie e^h do Taylorovho radu. V tabuľke 6.1 sú porovnané hodnoty $\hat{y}(1)$ určené metódami Eulerovou, implicitnou, Heunovou a Rungeho-Kuttovou 4. rádu pre štyri rôzne hodnoty kroku $h = 1$; 0,1; 0,01 a 0,001. V druhom riadku je vždy uvedená zaokrúhlená absolútna hodnota chyby $|\hat{y}(1) - \mathrm{e}|$. O ráde metódy sa môžeme presvedčiť podľa charakteru chyby. Pri desaťnásobnom zmenšení kroku sa v prípade Eulerovej metódy chyba zmenšuje rádovo desaťnásobne (teda o jeden rád), pre implicitnú a Heunovu metódu sa chyba zmenšuje o dva rády (prvá platná cifra chyby sa posúva o 2 desatinné miesta) a v prípade Rungeho-Kuttovej metódy sa chyba zmenšuje o štyri rády. Už pri kroku $h = 1$ dáva Rungeho-Kuttova metóda presnosť porovnateľnú s Eulerovou metódou pri $h = 0{,}01$. Pri Rungeho-Kuttovej metóde 4. rádu musíme počítať v každom kroku 4 funkčné hodnoty f a pri Eulerovej metóde len jednu; napriek tejto „nevýhode“ Rungeho-Kuttovej metódy bude táto omnoho efektívnejšia, čo sa ešte viac prejaví pri vyšších presnostiach. S výnimkou prípadu $h = 1$ sa implicitná metóda v tomto prípade prejavila ako presnejšia v porovnaní s Heunovou metódou.

Príklad 6.2. Určme približnú hodnotu $y(0{,}2)$, ak $y(x)$ je riešením začiatočnej úlohy pre diferenciálnu rovnicu

$$y' = x + y, \qquad y(0) = 1,$$

metódou Rungeho-Kuttovou s krokom $h = 0{,}2$.

Riešenie. Na výpočet koeficientov vo vzťahu (6.14) môžeme použiť túto schému

x	y	$k_i = hf(x,y)$	
x_0	y_0	$k_1 = hf(x_0, y_0)$	k_1
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1}{2}$	$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2})$	$2k_2$
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2}{2}$	$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2})$	$2k_3$
$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$	k_4
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + K$		$K = \frac{1}{6} \sum_j k_j$

pre $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $h = 0{,}2$; $f(x,y) = x + y$ dostávame

x	y	k_i	
0	1	0,2	0,2
0,1	1,1	0,24	0,48
0,1	1,12	0,244	0,488
0,2	1,244	0,2888	0,2888
$x_1 = 0{,}2$			$K = 1{,}4568/6$,

teda

$$y(0{,}2) \approx y(0) + K \; = 1{,}2428.$$

Na porovnanie riešením uvedenej úlohy je $y = 2\mathrm{e}^x - x - 1$, odkiaľ dostaneme $y(0{,}2) = = 1{,}2428055\ldots$.

Príklad 6.3. Pomocou metódy Rungeho-Kuttovej určme približnú hodnotu $y(0{,}1)$, ak $y(x)$ je riešením začiatočnej úlohy pre diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$y'' + 0{,}2\,y' + 10\,\sin y = 0, \qquad y(0) = 0{,}3; \qquad y'(0) = 0.$$

Riešenie. Uvedenú diferenciálnu rovnicu prepíšeme na sústavu diferenciálnych rovníc.

Položíme $y' = z$, potom $y'' = z'$ a dostávame sústavu diferenciálnych rovníc

$$y' = z,$$

$$z' = -0{,}2\,z - 10\,\sin y,$$

pričom

$$y(0) = 0{,}3 = y_0, \qquad z(0) = y'(0) = 0 = z_0.$$

Použijeme vektory $\boldsymbol{k}_j = (k_{jy}, k_{jz})$.

j	x	y	z	$k_{jy} = 0{,}1z$	$k_{jz} = (-0{,}2z - 10\sin y)\cdot 0{,}1$
1	0	0,3	0	0	−0,2955
2	0,05	0,3000	−0,1478	−0,0148	−0,2926
3	0,05	0,2926	−0,1463	−0,0146	−0,2855
4	0,1	0,2854	−0,2855	−0,0286	−0,2810

Potom

$$K_y = \tfrac{1}{6}[0 + 2(-0{,}0148) + 2(-0{,}0146) + (-0{,}0286)] = -0{,}0146,$$
$$K_z = \tfrac{1}{6}[(-0{,}2955) + 2(-0{,}2926) + 2(-0{,}2855) + (-0,2810)] = -0{,}2888$$

a

$$y(0{,}1) \approx 0{,}3 + (-0{,}146) = 0{,}2854.$$

Poznámka 6.14. Pomocou vzťahu $|(k_2 - k_3)/(k_1 - k_2)|$ môžeme pri uvedenej metóde testovať veľkosť kroku h. Ak je jeho hodnota $\approx 0{,}05$ ponecháme daný krok. Ak je jeho hodnota podstatne väčšia ako 0,05, zmenšíme krok h.

Otázky k prebranej tematike:

- Aká je formulácia Cauchyho začiatočnej úlohy pre diferenciálnu rovnicu 1. rádu?
- Aká je formulácia Cauchyho začiatočnej úlohy pre diferenciálnu rovnicu vyšších rádov?
- Aká je formulácia Cauchyho začiatočnej úlohy pre systém diferenciálnych rovníc 1. rádu?
- Ako pretransformujeme začiatočnú úlohu pre rovnicu vyššieho rádu na začiatočnú úlohu pre systém 1. rádu?
- V čom spočíva základný rozdiel medzi Eulerovou, implicitnou, Heunovou a Rungeho-Kuttovou metódou 4. rádu?
- Aký je algoritmus riešenia začiatočnej úlohy pre diferenciálnu rovnicu 1. rádu Rungeho-Kuttovou metódou 4. rádu s konštantným krokom h?

Úlohy

6.1. Určte riešenie Cauchyho úlohy $y' = \frac{x}{y}$, $y(0) = 1$
na intervale $\langle 0; 0{,}4 \rangle$
a) Eulerovou metódou s krokom $h = 0{,}05$
b) metódou R-K s krokom $h = 0{,}2$.

$$\left[\begin{array}{llllllll} \text{a)} & x & y & x & y & \text{b)} & x & y \\ & 0{,}05 & 1 & 0{,}25 & 1{,}0248 & & 0 & 1 \\ & 0{,}1 & 1{,}0025 & 0{,}3 & 1{,}0370 & & 0{,}2 & 1,0198 \\ & 0{,}15 & 1{,}0075 & 0{,}35 & 1{,}0151 & & 0{,}4 & 1,0770 \\ & 0{,}2 & 1{,}0149 & 0{,}4 & 1{,}0681 & & & \end{array}\right]$$

6.2. Určte približné riešenie Cauchyho úlohy

$$y' = \frac{2x(e^y - 1)}{(1 + x^2)e^y}, \quad y(1) = 1$$

na intervale $\langle 1; 1{,}3 \rangle$ s krokom $h = 0{,}1$

a) modifikovanou Eulerovou metódou

b) metódou R-K.

$$\left[\begin{array}{llllll} \text{a)} & x & y & \text{b)} & x & y \\ & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ & 1{,}1 & 1{,}0637 & & 1{,}1 & 1{,}0643 \\ & 1{,}2 & 1{,}1293 & & 1{,}2 & 1{,}1302 \\ & 1{,}3 & 1{,}1961 & & 1{,}3 & 1{,}1973 \end{array}\right]$$

6.3. Pomocou metódy R-K s krokom $h = 0{,}1$ vypočítajte $y(2)$, ak $y' = \dfrac{x(y-1)}{y + x^2}, \quad y(1) = 0.$

$[y(2) = -1{,}4998]$

6.4. Metódou R-K s krokom $h = 0{,}1$ vypočítajte $y(1)$, ak

$$y' = \frac{0{,}4 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + xy}, \quad y(0) = 0.$$

$[y(1) = 0{,}0919]$

6.5. Pomocou metódy R-K určte približné riešenie Cauchyho úlohy

$y' = -3y - z, \quad y(0) = 1,$

$z' = y - z, \quad z(0) = 1$

na intervale $\langle 0; 0{,}6 \rangle$ s krokom $h = 0{,}2$.

$$\left[\begin{array}{lll} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}4027 & 0{,}9381 \\ 0{,}4 & 0{,}0905 & 0{,}8084 \\ 0{,}6 & -0{,}0597 & 0{,}6623 \end{array}\right]$$

7. Náhodné javy a pravdepodobnosť

7.1. Pokus a jav

Základnými pojmami teórie pravdepodobnosti sú pojmy pokus a jav. Uvedieme ich intuitívne definície.

Nech je pevne stanovený istý systém podmienok (napr. majme pravidelnú hraciu kocku, ktorej steny sú označené číslami 1, 2, ..., 6). Proces (dej), ktorý môže nastať pri realizácii týchto podmienok (napr. hod touto hracou kockou) nazývame **pokusom**. Tu vyžadujeme, aby každý pokus mal tzv. **vlastnosť hromadnosti**, t. j. aby sme ho mohli za tých istých podmienok teoreticky ľubovoľnekrát opakovať. Výsledok tohto procesu nie je jednoznačný, je náhodný, a nazývame ho **javom** alebo **udalosťou** (padnutie šestky na vrchnej stene kocky). Jav je teda výsledok pokusu.

Z pohľadu možného nastatia delíme javy do troch základných skupín:

1. javy **isté** sú javy, ktoré po vykonaní daného pokusu vždy nastanú (napr. padnutie čísla menšieho než 10);
2. javy **nemožné** sú javy, ktoré po vykonaní daného pokusu nikdy nenastanú (napr. padnutie čísla 10);
3. javy **náhodné** sú javy, ktoré po vykonaní daného pokusu môžu, ale nemusia nastať (napr. padnutie párneho čísla).

Toto triedenie javov je silne viazané na konkrétny pokus, t. j. na konkrétny systém podmienok. Zmenou systému podmienok sa môže napr. nemožný jav stať náhodným alebo dokonca aj istým (napr. ak by sme všetky steny kocky označili číslom 10, tak padnutie čísla 10 by bol istý jav, hoci pri pôvodnej kocke to bol jav nemožný)

Javy budeme označovať veľkými písmenami A, B, C, ..., istému javu vyhradíme písmeno I a nemožnému javu znak $\emptyset$.

7.2. Základné poznatky o javoch

V tejto časti uvedieme základné relácie (vzťahy) a operácie s javmi, ktoré môžu byť výsledkom jedného, pevne daného, pokusu.

Definícia 7.1. Jav A nazývame **podjavom** javu B práve vtedy, keď z nastatia javu A vyplýva nastatie javu B, čo zapisujeme takto: $A \subset B$.

Napr. padnutie čísla 2 na hracej kocke je podjavom javu, že padne na nej párne číslo. Je zrejmé, že $A \subset A$ a ak $A \subset B$ a $B \subset C$, tak $A \subset C$.

Definícia 7.2. Javy A a B nazývame **ekvivalentné** (zapisujeme $A = B$) práve vtedy, keď $A \subset B$ a súčasne $B \subset A$.

V tomto prípade často hovoríme, že sa javy A a B rovnajú alebo že sú totožné.

Definícia 7.3. **Opačným javom** k javu A nazývame jav (označujeme ho $\overline{A}$), ktorý nastane práve vtedy, keď nenastane jav A.

Platí: $\overline{I} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = I$ a $\overline{(\overline{A})} = A$.

Definícia 7.4. Jav C nazývame **prienikom** (**súčinom**) javov A a B práve vtedy, keď nastane len za súčasného nastatia oboch javov A a B. Zapisujeme to takto: $C = A \cap B$.

Platí: $A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $\overline{A} \cap A = \emptyset$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap I = A$, $A \cap B \subset A$.

Definícia 7.5. Jav C nazývame **zjednotením** (**súčtom**) javov A a B práve vtedy, keď nastane len za predpokladu, že nastal aspoň jeden z javov A a B. Zapisujeme to takto: $C = A \cup B$.

Platí: $A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $\overline{A} \cup A = I$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup I = I$, $A \subset A \cup B$.

Taktiež platí: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (de Morganove pravidlá).

Definícia 7.6. Jav C nazývame **rozdielom** javov A a B (pozor na poradie javov) práve vtedy, keď nastane len za predpokladu, že nastal jav A a súčasne nenastal jav B. Zapisujeme to takto: $C = A - B$.

Evidentne platí: $A - B = A \cap \overline{B}$.

Príklad 7.1. Nech jav A spočíva v tom, že pri jednom hode bežnou hracou kockou padne na vrchnej stene nepárne číslo a nech jav B znamená padnutie čísla, ktoré je deliteľné číslom 3. Charakterizujme javy $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ a $(B - A) \cap A$.

Riešenie. Je zrejmé, že
jav $A \cup B$ nastane práve vtedy, keď padne niektoré číslo z množiny $\{1, 3, 5, 6\}$;
jav $A \cap B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo 3;
jav $A - B$ nastane práve vtedy, keď padne niektoré číslo z množiny $\{1, 5\}$;
jav $\overline{B}$ nastane práve vtedy, keď padne niektoré číslo z množiny $\{1, 2, 4, 5\}$;
jav $\overline{A} \cap B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo 6;
jav $(B - A) \cap A$ je jav nemožný.

Definícia 7.7. Javy A a B nazývame **disjunktnými** (tiež **nezlúčiteľnými**) práve vtedy, keď nemôžu súčasne nastať, t. j. keď $A \cap B = \emptyset$. Javy H_1, H_2, ..., H_n nazývame **disjunktnými** (**nezlúčiteľnými**) javmi práve vtedy, keď sú po ľubovoľných dvojiciach disjunktné t. j. keď $H_i \cap H_j = \emptyset$ pre každé $i \neq j$, i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.

Definícia 7.8. Disjunktný systém javov H_1, H_2, ..., H_n nazývame **úplným** práve vtedy, keď jeho zjednotením je istý jav.

Teda pre úplný disjunktný systém javov H_1, H_2, ..., H_n platí

$$H_i \cap H_j = \emptyset \text{ pre každé } i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{7.1}$$

$$H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \bigcup_{i=1}^{n} H_i = I \tag{7.2}$$

Takýto systém javov často nazývame **hypotézy**.

Príklad 7.2. Ak pod javom H_1 rozumieme padnutie párneho čísla na kocke a pod H_2 padnutie nepárneho čísla, tak tieto dva javy tvoria úplný systém disjunktných javov (hypotéz). Ak pod javom $\mathcal{H}_k$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, rozumieme padnutie čísla k na kocke, tak šesť javov $\mathcal{H}_k$ tvorí tiež úplný systém disjunktných javov.

Definícia 7.9. Jav A nazývame **zloženým** javom práve vtedy, keď sa dá vyjadriť ako zjednotenie dvoch javov A_1 a A_2, ktoré sa nerovnajú nemožnému javu a ani javu A.

Pre zložený jav A teda platí:

$$A = A_1 \cup A_2, \text{ pričom } A \neq A_1 \neq \emptyset \text{ a } A \neq A_2 \neq \emptyset.$$

Je prirodzené v tom prípade hovoriť, že **jav A je rozložený na javy A_1 a A_2**. Padnutie nepárneho čísla na kocke je zrejme zložený jav.

Definícia 7.10. Každý jav E, ktorý nie je zložený nazývame **elementárnym** javom.

Všimnime si základné vlastnosti elementárnych javov:

1. Jav E je elementárny práve vtedy, keď neexistuje taký jav $A \neq \emptyset$, že $A \subset E$.
2. Ku každému zloženému javu A existuje taký elementárny jav E, že $E \subset A$.
3. Ľubovoľné dva rôzne elementárne javy sú disjunktné.
4. Každému zloženému javu A môžeme jednoznačne priradiť takú množinu elementárnych javov (táto množina nemusí byť konečná), že jav A je zjednotením týchto elementárnych javov.

Pri hádzaní kockou množina elementárnych javov je šesťprvková, pozostáva z javov E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, kde elementárny jav E_k znamená padnutie čísla k.

Pri každom pokuse treba mať jasnú predstavu o množine elementárnych javov $\{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots\} = \gamma$, ktorá mu prislúcha (táto množina môže byť aj nekonečná). Podľa štvrtej vlastnosti elementárnych javov existuje vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi ľubovoľným javom a istou podmnožinou množiny γ, konkrétne množinou jemu prislúchajúcich elementárnych javov. Tento fakt nám umožňuje hovoriť o tzv. **množinovej interpretácii javov** a vyššie definované operácie a relácie s javmi prezentovať pomocou známych operácií a relácií s množinami. Môžeme pritom použiť známe Vennove diagramy, ktoré nám umožnia získať rad ďalších vlastností javov.

Pre exaktnejší výklad je osožný pojem javového poľa:

Definícia 7.11. Nech $\gamma = \{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots\}$ je ľubovoľná množina. Pod **javovým poľom** nad γ rozumieme taký systém τ podmnožín množiny γ, pre ktorý platí:

1. $\emptyset \in \tau$;
2. ak A, $B \in \tau$, tak $A \cap B \in \tau$, $A \cup B \in \tau$ a $\overline{A} \in \tau$;
3. pre každú postupnosť $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \tau$ je $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$ a $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$.

Prvky javového poľa nazývame **javmi**. Špeciálne: množinu γ nazývame množinou **elementárnych javov**.

Všimnime si, že z prvých dvoch požiadaviek vyplýva, že $\gamma \in \tau$, pričom γ reprezentuje istý jav I. Jav nemožný je reprezentovaný prázdnou množinou.

7.3. Pojem pravdepodobnosti javu

V tejto časti každému javu A priradíme podľa stanovených pravidiel isté číslo, ktoré bude vyjadrovať „mieru šance na to, že jav v danom pokuse nastane“. Toto číslo nazveme pravdepodobnosťou javu A a označíme ho zápisom $P(A)$.

Definícia 7.12. (**Klasická definícia pravdepodobnosti**) Nech $\gamma = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ je konečná množina elementárnych javov a nech každý elementárny jav je **„rovnako možný (očakávaný)"**. Pre ľubovoľný jav $A \in \tau$ definujeme jeho pravdepodobnosť predpisom

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{7.3}$$

kde m je počet rôznych elementárnych javov, na ktoré sa jav A rozkladá, t. j.

$$A = E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \ldots \cup E_{i_m}. \tag{7.4}$$

Komentár k definícii:

1. V definícii predpokladáme, že množina elementárnych javov je konečná, čo nie je splnené v každom pokuse. Naviac, je použitý intuitívny pojem „rovnako možný (očakávaný)".

2. Je potrebné správne porozumieť vyjadrenie (7.4): pre „dvojindexy" i_k platí

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

   Napr. ak je A jav, ktorý spočíva v padnutí nepárneho čísla na kocke, tak $n = 6$ a $A = E_1 \cup E_3 \cup E_5$, t. j. $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $i_3 = 5$ a $m = 3$.

3. Rovnosť (7.3) môžeme interpretovať aj takto:

$$P(A) = \frac{\text{počet všetkých možných priaznivých výsledkov javu } A}{\text{počet všetkých možných výsledkov pokusu}}.$$

Veta 7.1 (Základné vlastnosti klasickej pravdepodobnosti).

1. Pre každý jav $A \in \tau$ je $0 \leqq P(A) \leqq 1$.
2. Pre istý a nemožný jav je $P(I) = 1$ a $P(\emptyset) = 0$.
3. Pre opačný jav platí $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
4. Pre disjunktné javy : ak $A \cap B = \emptyset$, tak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dôkaz. Ak si pre ľubovoľný jav uvedomíme počet elementárnych javov, ktoré vystupujú v jeho vyjadrení (7.4), tak prvá a druhá časť vety je triviálna. Ak pre jav A v tretej časti platí (7.4), tak vo vyjadrení javu $\overline{A}$ v tvare (7.4) vystupujú všetky ostatné elementárne javy množiny γ, a tých je presne $n - m$. Takto

$$P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

4. Ak pre jav A platí (7.4) a pre B je $B = E_{j_1} \cup E_{j_2} \cup \ldots \cup E_{j_k}$ (teda $P(B) = \frac{k}{n}$), tak tieto vyjadrenia disjunktných javov A a B nemajú ani jeden elementárny jav spoločný, a preto $A \cup B$ obsahuje vo vyjadrení (7.4) presne $m + k$ rôznych elementárnych javov. Teda

$$P(A \cup B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

□

Príklad 7.3. Určme pravdepodobnosť toho, že pri jednom hode bežnou hracou kockou: a) padne číslo 6; b) padne nepárne číslo; c) nepadne číslo 4.

Riešenie. Pre bežnú hraciu kocku je $\gamma = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, kde elementárny jav E_k znamená padnutie čísla k. Zrejme $n = 6$. Nech A je jav, ktorého pravdepodobnosť chceme určiť. Potom

a) $A = E_6$, a teda $m = 1$ a $P(A) = \frac{1}{6}$.
b) $A = E_1 \cup E_3 \cup E_5$, a teda $m = 3$ a $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
c) Pre opačný jav $\overline{A} = E_4$ je $m = 1$ a $P(\overline{A}) = \frac{1}{6}$. Teda $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{5}{6}$.

Príklad 7.4. V sade $M = 100$ žiaroviek je $K = 24$ chybných (zvyšné sú dobré). Určme pravdepodobnosť toho, že medzi $N = 11$ náhodne vybranými žiarovkami budú práve $x = 2$ chybné.

Riešenie. Nech A je jav, ktorý spočíva v tom, že medzi 11 náhodne vybranými žiarovkami budú práve 2 chybné. 11 žiaroviek môžeme zo 100 žiaroviek vybrať $\binom{100}{11}$ spôsobmi (ide o výber bez opakovania, pri ktorom nezáleží na poradí). Toto kombinačné číslo určuje počet elementárnych javov E_i pre náš pokus. Teda $n = \binom{100}{11}$. Počet elementárnych javov, ktoré sú priaznivé javu A dostaneme ako súčin počtu možných výberov dvoch chybných žiaroviek z celkového počtu 24 chybných a počtu možných výberov deviatich dobrých žiaroviek z celkového počtu 76 dobrých, t. j. $m = \binom{24}{2}\binom{76}{9}$. Takto

$$P(A) = \frac{\binom{24}{2}\binom{76}{9}}{\binom{100}{11}} = 0{,}2776.$$

Vyčíslenie poslednej hodnoty je dosť prácne, ale v MATLABe výsledok dostaneme pomocou *hygepdf* $(2, 100, 24, 11)$.

Vo všeobecnom prípade bude

$$P(A) = \frac{\begin{pmatrix} K \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M-K \\ N-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}}, \tag{7.5}$$

čo v MATLABe dostaneme pomocou *hygepdf* (x, M, K, N).

Príklad 7.5. V krabici je 5 bielych, 6 modrých a 7 červených guliek. Náhodne z nej (bez vrátenia do krabice) vyberieme 9 guliek. Aká je pravdepodobnosť toho, že sme vybrali 2 biele, 3 modré a 4 červené guľky?

Riešenie. V krabici je spolu 18 guliek. Obdobnou úvahou ako v predchádzajúcom príklade dostaneme, že 9 guliek môžeme vybrať $n = \binom{18}{9}$ spôsobmi, pričom požadovaná konštelácia sa dá dosiahnuť $m = \binom{5}{2}\binom{6}{3}\binom{7}{4}$ spôsobmi. Preto hľadaná pravdepodobnosť je

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{6}{3}\binom{7}{4}}{\binom{18}{9}} = \frac{10 \cdot 20 \cdot 35}{48620} \approx 0{,}1440$$

Poznámka 7.1. Skúste zovšeobecniť tento príklad pre prípad, že by v krabici boli guľky s k farbami, resp. pre prípad, keď by sme mali daný istý súbor objektov s k rôznymi vlastnosťami.

V literatúre môžeme nájsť aj iné definície pravdepodobnosti (napr. tzv. **štatistickú definíciu** alebo **geometrickú definíciu**). Žiadna z nich však nie je dostatočne všeobecne aplikovateľná (napr. klasická definícia predpokladá konečný počet elementárnych javov). Tento nedostatok odstraňuje axiomatická (Kolmogorovova) definícia. Tá si ovšem vyžaduje pri jej exaktnom používaní pomerne náročný matematický aparát. Na takýto prístup nemáme dostatok priestoru, a preto niektoré naše ďalšie úvahy nebudú dostatočne všeobecné.

Definícia 7.13. (**Axiomatická definícia pravdepodobnosti**) Nech γ je množina elementárnych javov a nech τ je javové pole nad γ (t. j. τ je množina javov). Nech sú splnené tieto tri axiómy:

A_1 : každému javu $A \in \tau$ je priradené práve jedno nezáporné číslo $P(A)$, ktoré nazývame **pravdepodobnosťou javu** A;

A_2 : $P(I) = 1$;

A_3 : pre ľubovoľný systém disjunktných javov $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \tau$ platí

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots . \qquad (7.6)$$

Túto usporiadanú trojicu $[\gamma, \tau, P]$ nazývame **pravdepodobnostné pole**.

Tieto axiómy nešpecifikujú exaktný predpis na určenie pravdepodobnosti javu. V konkrétnych situáciách postupujeme tak, že použijeme klasickú definíciu, resp geometrickú alebo štatistickú definíciu pravdepodobnosti. Je zrejmé, že klasická definícia je v súlade s požadovanými axiómami $A_1 - A_3$. Z týchto troch axióm môžeme postupne dokázať tvrdenia nasledujúcej vety:

Veta 7.2. Ak $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole, tak:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. pre každý jav $A \in \tau$ platí $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
3. ak $A \subset B$, tak $P(A) \leqq P(B)$;
4. pre každý jav $A \in \tau$ je $0 \leqq P(A) \leqq 1$;
5. pre ľubovoľné javy $A, B \in \tau$ je $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$;
6. pre ľubovoľné javy $A, B \in \tau$ je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
7. pre ľubovoľné javy $A, B, C \in \tau$ je
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$
$- [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C)$;
8. zovšeobecnenie: pre ľubovoľné javy $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ platí

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Dôkaz. Na ukážku dokážeme prvé tvrdenie: z vlastností javového poľa vyplýva, že $\emptyset \in \tau$ a z A_1 dostaneme, že existuje $P(\emptyset)$. Keďže $I \in \tau$, tak $I \cup \emptyset \in \tau$ a opäť z A_1 dostaneme, že existuje $P(I \cup \emptyset)$. Javy I a $\emptyset$ sú disjunktné, a preto podľa A_3 $P(I \cup \emptyset) = P(I) + P(\emptyset)$. Zrejme

$I \cup \emptyset = I$, odtiaľ $P(I) = P(I) + P(\emptyset)$. Na základe A_2 je $P(I) = 1$ a teda $1 = 1 + P(\emptyset)$, čo znamená, že $P(\emptyset) = 0$.

Hlavná idea dôkazov zvyšných tvrdení vety, ale aj iných tvrdení, spočíva často v rozklade javu, ktorého pravdepodobnosť sa skúma, na zjednotenie disjunktných javov a následné použitie tretej axiómy. □

Príklad 7.6. V urne je 19 guličiek, z ktorých každá je očíslovaná práve jedným z čísel $1, 2, \ldots, 19$. Náhodne z nej vytiahneme jednu guľku. Určme pravdepodobnosť toho, že vytiahnutá guľka je označená číslom, ktoré je deliteľné dvoma alebo troma.

Riešenie. Nech A je jav, ktorý spočíva vo vytiahnutí guľky označenej číslom deliteľným dvoma a B je jav, ktorý spočíva vo vytiahnutí guľky označenej číslom deliteľným troma. Potom $P(A) = \frac{9}{19}$ a $P(B) = \frac{6}{19}$. Jav $A \cap B$ znamená vytiahnutie guľky, ktorej číslo je deliteľné dvoma aj troma, t. j. je deliteľné šiestimi. Zrejme $P(A \cap B) = \frac{3}{19}$. Je potrebné určiť pravdepodobnosť javu $A \cup B$.

Na základe šiestej časti poslednej vety máme

$$P(A \cup B) = \frac{9}{19} + \frac{6}{19} - \frac{3}{19} = \frac{12}{19}$$

7.4. Podmienená pravdepodobnosť a veta o úplnej pravdepodobnosti

Za istých okolností je užitočné skúmať pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že vieme o tom, že nastal jav B. Túto pravdepodobnosť budeme označovať $P(A|B)$ a čítať **pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B**, resp. **podmienená pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B**.

Definícia 7.14. (**Podmienená pravdepodobnosť**) Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. **Pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B** definujeme takto:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{7.7}$$

Pre $P(B) = 0$ pravdepodobnosť $P(A|B)$ z logických dôvodov nedefinujeme.

Príklad 7.7. Isté zariadenie je v bezporuchovej prevádzke aspoň dva roky s pravdepodobnosťou $0,8$ a aspoň tri roky s pravdepodobnosťou $0,5$. Je známe, že toto zariadenie bolo dva roky v bezporuchovej prevádzke. Určme pravdepodobnosť toho, že bude v bezporuchovej prevádzke ešte aspoň rok.

Riešenie. Nech B je jav, ktorý spočíva v tom, že zariadenie je v bezporuchovej prevádzke aspoň dva roky a nech A je jav, že zariadenie je v bezporuchovej prevádzke aspoň tri roky. V úlohe žiadame určiť pravdepodobnosť toho, že nastal jav A za predpokladu, že nastal jav B, t. j. $P(A|B)$. Všimnime si, že $A \subset B$ a teda $A \cap B = A$, čo znamená, že $P(A \cap B) = P(A)$. Z týchto poznatkov pre požadovanú podmienenú pravdepodobnosť dostaneme

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0,5}{0,8} = 0{,}625.$$

Poznámka 7.2. Jednoducho by sme mohli dokázať, že takto definovaná podmienená pravdepodobnosť spĺňa všetky tri požiadavky axiomatickej definície pravdepodobnosti. Všimnime si, že pre $P(A) \cdot P(B) \neq 0$ dvojnásobným použitím (7.7) dostaneme

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \qquad \text{a} \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Odtiaľ máme

$$P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A). \tag{7.8}$$

Zovšeobecnením týchto úvah je:

Veta 7.3. Ak $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole, tak pre javy $A_i \in \tau$, $i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \\ &\dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}). \end{aligned}$$

Súvislosť medzi hypotézami a podmienenou pravdepodobnosťou poskytuje nasledujúce tvrdenie:

Veta 7.4 (Veta o úplnej pravdepodobnosti). Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole a javy H_1, H_2, ..., H_n sú hypotézy (t. j. úplný systém disjunktných javov). Potom pre ľubovoľný jav A platí

$$\left.\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \cdots \\ &\cdots + P(H_n) \cdot P(A|H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i). \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

Dôkaz. Pre jav A máme (I je istý jav):

$$A = A \cap I = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n) = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n).$$

Keďže javy H_i sú disjunktné a $(A \cap H_i) \subset H_i$, tak aj javy $(A \cap H_1)$, $(A \cap H_2), \dots, (A \cap H_n)$ sú disjunktné a podľa tretej axiómy definície pravdepodobnosti je

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_n).$$

Ak si teraz uvedomíme rovnosť $P(A \cap H_i) = P(H_i) \cdot P(A|H_i)$, tak dostaneme požadované vyjadrenie (7.9).

□

Príklad 7.8. V krabici sú dve nové a tri už použité tenisové loptičky. K prvej hre si hráči náhodne z nej vyberú dve loptičky a s oboma si zahrajú. Po hre ich vrátia naspäť do krabice. K druhej hre si vyberú tri loptičky. Určme pravdepodobnosť toho, že to budú už použité loptičky.

Riešenie. Nech H_i, $i \in \{0, 1, 2\}$ je jav, ktorý spočíva v tom, že k prvej hre si hráči vybrali i nových loptičiek. Tieto javy tvoria hypotézy, pričom podľa (7.5) je

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}.$$

Nech A je jav, ktorý spočíva v tom, že k druhej hre budú vytiahnuté tri už použité loptičky. Potom (všimnite si konštelácie loptičiek v krabici pri jednotlivých hypotézach)

$$P(A|H_0) = \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}, \quad P(A|H_1) = \frac{\binom{4}{3}\binom{1}{0}}{\binom{5}{3}} = \frac{4}{10}, \quad P(A|H_2) = 1.$$

Podľa (7.9) je

$$P(A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{37}{100}.$$

Informáciu o pravdepodobnosti nastatia nejakej konkrétnej hypotézy za predpokladu, že nastal nejaký jav nám poskytuje toto tvrdenie:

Veta 7.5 (Bayesov vzorec). Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole, javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú hypotézy a $A \in \tau$ je ľubovoľný jav, pre ktorý je $P(A) \neq 0$. Potom pre každú hypotézu H_k je

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}. \tag{7.10}$$

Dôkaz. Ak aplikujeme (7.8) na jav A a hypotézu H_k, tak dostaneme $P(H_k) \cdot P(A|H_k) = P(A) \cdot P(H_k|A)$. To znamená, že

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Ak tu nahradíme $P(A)$ vyjadrením z vety o úplnej pravdepodobnosti, dostaneme požadovaný výsledok. □

V literatúre je často uvádzaný príklad takého typu:

Príklad 7.9. Je známe, že v Morseovej abecede pomer priemerného počtu vyslaných bodiek k počtu vyslaných čiarok je 5 : 3. Pri prenose sa skreslí v priemere päť percent bodiek (t. j. vyslaná bodka je prijatá ako čiarka) a skreslenie u čiarok je sedem percent. Určme pravdepodobnosť toho, že bola a) vyslaná čiarka, ak bola prijatá bodka; b) vyslaná bodka, ak bola prijatá bodka.

Riešenie. Nech H_{b}, resp. $H_{\text{č}}$ je jav spočívajúci v tom, že bola vyslaná bodka, resp. čiarka. Tieto javy zrejme tvoria hypotézy a vzhľadom na daný pomer počtov vysielaných bodiek a čiarok je $P(H_{\text{b}}) = \frac{5}{8}$ a $P(H_{\text{č}}) = \frac{3}{8}$. Nech A je označenie javu, že je prijatá bodka. Z formulácie príkladu vyplýva: $P(A|H_{\text{b}}) = 0,95$ (95 % vyslaných bodiek sa neskreslí) a $P(A|H_{\text{č}}) = 0{,}07$ (vyslaná čiarka sa skreslila). Z vety o úplnej pravdepodobnosti máme

$$P(A) = P(H_{\text{b}}) \cdot P(A|H_{\text{b}}) + P(H_{\text{č}}) \cdot P(A|H_{\text{č}}) = \frac{5}{8} \cdot 0{,}95 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}07 = 0{,}62.$$

a) Žiada sa určiť $P(H_{\text{č}}|A)$. Podľa (7.10) je

$$P(H_{\text{č}}|A) = \frac{P(H_{\text{č}}) \cdot P(A|H_{\text{č}})}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot 0{,}07}{0{,}62} = 0{,}0423.$$

b) Tu chceme určiť $P(H_{\mathrm{b}}|A)$. Je

$$P(H_{\mathrm{b}}|A) = \frac{P(H_{\mathrm{b}}) \cdot P(A|H_{\mathrm{b}})}{P(A)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot 0{,}95}{0{,}62} = 0{,}9577.$$

Všimnimi si, že v časti b) sme určovali pravdepodobnosť javu, ktorý je opačným javom k javu z časti a).

7.5. Nezávislé javy

Definícia 7.15. Dva javy A a B nazývame **vzájomne nezávislými** práve vtedy, keď pravdepodobnosť jedného z nich sa nemení nastatím druhého alebo keď pravdepodobnosť jedného z nich je nulová.

Túto „slovnú definíciu“ môžeme formulovať takto: dva javy A a B sú vzájomne nezávislými práve vtedy, keď nastane aspoň jeden z týchto štyroch prípadov:

$$P(A|B) = P(A) \quad \vee \quad P(B) = 0 \quad \vee \quad P(B|A) = P(B) \quad \vee \quad P(A) = 0. \tag{7.11}$$

V bežnom texte vynechávame prívlastok „vzájomne“ a hovoríme o nezávislých javoch.

Veta 7.6. Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. Javy $A, B \in \tau$ sú nezávislé práve vtedy, keď

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \tag{7.12}$$

t. j. keď pravdepodobnosť prieniku (súčinu) týchto javov sa rovná súčinu ich pravdepodobností.

Poznámka 7.3.

1. Táto veta poskytuje ekvivalentnú podmienku nezávislosti dvoch javov, a preto je často v literatúre nezávislosť definovaná pomocou podmienky (7.12).

2. Z nezávislosti javov A a B vyplýva aj nezávisloť týchto dvojíc javov:

$$\overline{A}\,\mathrm{a}\,B \qquad A\,\mathrm{a}\,\overline{B} \qquad \overline{A}\,\mathrm{a}\,\overline{B} \tag{7.13}$$

Definícia 7.16. Systém javov $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geqq 2$, nazývame **celkove nezávislým** práve vtedy, keď pravdepodobnosť nastatia ľubovoľného z nich sa nemení nastatím akejkoľvek skupiny z ostatných javov alebo keď pravdepodobnosť jedného z nich je nulová.

Skúste porozmýšľať nad obdobným zápisom tejto definície v tvare (7.11)!

Veta 7.7 (Pravdepodobosť prieniku celkove nezávislých javov). Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. Systém javov A_1 ,A_2, ..., A_n, $n \geqq 2$, je celkove nezávislým práve vtedy, keď je splnená jedna z týchto dvoch podmienok:

1. pre každé $k \leqq n$ platí

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right). \tag{7.14}$$

2.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) \tag{7.15}$$

Poznámka 7.4.

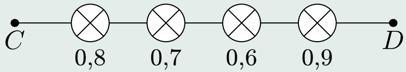
1. Táto veta poskytuje ekvivalentnú podmienku celkovej nezávislosti systému javov, a preto je často v literatúre celková nezávislosť definovaná pomocou podmienky (7.14), resp. (7.15).

2. Podmienky (7.14) a (7.15) sú ekvivalentné (pre $k = n$ podmienka (7.14) nadobúda tvar (7.15).

3. Ak ľubovoľná dvojica z javov $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geqq 2$, je disjunktná, tak je disjunktná aj ľubovoľná trojica, štvorica atď. týchto javov. Tento poznatok však vo všeobecnosti neplatí pre nezávislosť javov, t.j. z nezávislosti ľubovoľnej dvojice týchto javov nevyplýva ich celková nezávislosť, napr. môže existovať trojica javov, ktorá nebude celkove nezávislá.

4. Celková nezávislosť javov $A_1, A_2, \dots, A_n$ je ekvivalentná s celkovou nezávislosťou systému javov $B_1, B_2, \dots, B_n$, kde $B_k = A_k$ alebo $B_k = \overline{A}_k$ (pozri analógiu (7.13)).

Príklad 7.10. Určme pravdepodobnosť toho, že medzi C a D (obr. 7.1) preteká prúd, ak poznáme pravdepodobnosti toho, že jednotlivé žiarovky sú dobré.



Obr. 7.1: Sériové zapojenie

Riešenie. Nech A_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, znamená jav, že i-ta žiarovka je dobrá a A je jav, ktorý spočíva v tom, že medzi C a D preteká prúd. Máme sériové zapojenie žiaroviek, a preto $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$, kde $P(A_1) = 0{,}8$, $P(A_2) = 0{,}7$, $P(A_3) = 0{,}6$ a $P(A_4) = 0{,}9$. Podľa (7.15) je

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4)$$

a teda $P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}3024$.

Veta 7.8 (Pravdepodobosť zjednotenia celkove nezávislých javov). Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. Ak systém javov $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geqq 2$, je celkove nezávislým, tak

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\overline{A}_n). \tag{7.16}$$

Dôkaz. Nech A znamená jav, že nastane aspoň jeden z javov A_1, A_2, …, A_n, t. j. $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Pre opačný jav $\overline{A}$ podľa de Morganovho pravidla dostaneme

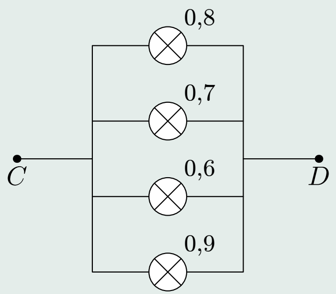
$$\overline{A} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n.$$

Z celkovej nezávislosti javov A_1, A_2, …, A_n vyplýva celková nezávislosť javov $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, …, $\overline{A}_n$, a preto podľa poslednej vety je

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \cdots \cdot P(\overline{A}_n).$$

Odtiaľ vzhľadom na $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ dostaneme (7.16). □

Príklad 7.11. Určme pravdepodobnosť toho, že medzi C a D preteká prúd, ak žiarovky z predchádzajúceho príkladu sú zapojené paralelne (obr. 7.2).



Obr. 7.2: Paralelné zapojenie

Riešenie. Ak B je jav, ktorý spočíva v tom, že medzi C a D preteká prúd, tak zrejme $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Na základe (7.16) je

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4)$$

a $P(B) = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,1 = 0,9976$.

7.6. Opakované nezávislé pokusy

Nech výsledkom nejakého pokusu je jav A. Opakujme za toho istého systému podmienok pokus n-krát, pričom predpokladáme, že tieto pokusy sú nezávislé, t. j. sú také, že výsledok každého z nich nemá vplyv na výsledok žiadneho predchádzajúceho pokusu a ani na výsledok žiadneho nasledujúceho pokusu. Ináč povedané, pravdepodobnosť nastatia javu A je v každom pokuse rovnaká.

Príklad 7.12. Určme pravdepodobnosť toho, že pri troch hodoch bežnou hracou kockou „padne šestka" práve dvakrát.

Riešenie. Nech jav A_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, znamená, že v i-tom hode padne šestka. Zrejme tieto javy sú nezávislé a $P(A_i) = \frac{1}{6}$ a $P(\overline{A}_i) = \frac{5}{6}$. Pri troch hodoch kockou má padnúť šestka práve dvakrát a práve raz nemá padnúť: to nastane len vtedy, keď šestka nepadne pri prvom alebo druhom alebo treťom hode. Tento jav C môžeme zapísať takto:

$$C = (\overbrace{\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3}^{B_1}) \cup (\overbrace{A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3}^{B_2}) \cup (\overbrace{A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3}^{B_3}).$$

„Zátvorkové javy" B_1, B_2, B_3 sú disjunktné, a preto

$$P(C) = P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3).$$

Z nezávislosti javov A_1, A_2 a A_3 plynie: $P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$, $P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) = = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$ a $P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$. Teda $P(C) = \frac{5}{216} + \frac{5}{216} + \frac{5}{216} = \frac{5}{72}$.

Veta 7.9 (Bernoulliho veta, resp. vzorec). Nech p je pravdepodobnosť toho, že pri danom pokuse nastane jav A a $P_n(k)$ je pravdepodobnosť toho, že pri n násobnom nezávislom opakovaní daného pokusu nastane jav A práve k-krát. Potom platí tzv. **Bernoulliho vzorec**:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{pre } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}. \tag{7.17}$$

Dôkaz. Nech jav A_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, označuje fakt, že jav A nastal v i-tom pokuse uvažovanej série n nezávislých pokusov. Zrejme je $P(A_i) = p$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ľahko nahliadneme, že jav, ktorý spočíva v tom, že v prvých k pokusoch jav A nastal a vo zvyšných $n-k$ pokusoch jav A nenastal, vieme vyjadriť v tvare

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \overline{A}_{k+2} \cap \ldots \cap \overline{A}_n = B.$$

Na základe celkovej nezávislosti systému javov A_i je $P(B) = p^k(1-p)^{n-k}$. Rovnaký záver dostaneme pre každé iné usporiadanie k javov typu A_i a $n-k$ javov typu $\overline{A}_i$ (pozri „zátvorkové javy“ v predchádzajúcom príklade). Takýchto rôznych usporiadaní je práve $\binom{n}{k}$. Pravdepodobnosť každého zátvorkového javu je rovnaká: $p^k(1-p)^{n-k}$. Keďže zátvorkové javy sú disjunktné, tak na základe tretej axiómy definície pravdepodobnosti dostaneme (7.17). □

Ak by sme v poslednom príklade použili Bernoulliho vetu, tak $n = 3$, A je jav, že pri jednom hode padne šestka, t. j. $P(A) = \frac{1}{6} = p$ a žiada sa určiť $P_3(2)$. Podľa (7.17) je

$$P_3(2) = \binom{3}{2} \cdot \left[\frac{1}{6}\right]^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{6}\right]^{(3-2)} = 3 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}.$$

Jednoducho môžeme takto získať ďalšie pravdepodobnosti pre všetky prípady počtu padnutých šestiek pri troch hodoch:
a) nepadne ani jedna šestka – k tomu určíme $P_3(0)$:

$$P_3(0) = \binom{3}{0} \cdot \left[\frac{1}{6}\right]^0 \cdot \left[1 - \frac{1}{6}\right]^{(3-0)} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{125}{216} = \frac{125}{216};$$

b) padne jedna šestka – k tomu určíme $P_3(1)$:

$$P_3(1) = \binom{3}{1} \cdot \left[\frac{1}{6}\right]^1 \cdot \left[1 - \frac{1}{6}\right]^{(3-1)} = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{72};$$

c) padnú tri šestky – k tomu určíme $P_3(3)$:

$$P_3(3) = \binom{3}{3} \cdot \left[\frac{1}{6}\right]^3 \cdot \left[1 - \frac{1}{6}\right]^{(3-3)} = 1 \cdot \frac{1}{216} \cdot 1 = \frac{1}{216}.$$

V prostredí MATLABu môžeme napr. pravdepodobnosť $P_3(2)$ získať pomocou funkcie *binopdf*$(2, 3, 1/6)$, pre $P_n(k)$ z (7.17) pomocou *binopdf*(k, n, p) a dokonca všetky pravdepodobnosti $P_3(k)$ pomocou *binopdf*$(0:3, 3, 1/6)$. Ľahko sa presvedčíme, že $P_3(0) + P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) = 1$. To sme mohli aj očakávať, lebo sme urobili súčet pravdepodobností štyroch hypotéz, t. j. štyroch javov, ktoré tvoria úplný systém disjunktných javov. Všeobecne môžeme obdobným spôsobom logicky zdôvodniť, že platí

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1. \tag{7.18}$$

Rovnosť (7.18) možno dokázať napr. použitím známeho binomického rozvoja výrazu $[p + (1-p)]^n$, ktorého hodnota je evidentne rovná jednej.

Poznámka 7.5. V literatúre sa často používa v Bernoulliho vzorci pre pravdepodobnosť opačného javu $\overline{A}$ k javu A označenie $P(\overline{A}) = 1 - p = q$ (v našom príklade je to pravdepodobnosť toho, že pri jednom hode kockou nepadne šestka, t. j. $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$). Takto (7.17) nadobúda tvar

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \text{pre } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

V praxi je často užitočné poznať najpravdepodobnejší počet k_0 výskytu skúmaného javu A v uvažovanej sérii n nezávislých pokusov. To nás vedie k nájdeniu najväčšej pravdepodobnosti zo všetkých hodnôt $P_n(k)$ (v našom príklade je to $P_3(0)$). Dá sa dokázať, že pre požadované k_0 platí:

$$k_0 \in \langle np - q,\ np + p \rangle. \tag{7.19}$$

Keby sme hádzali kockou napr. 12-krát ,tak $k_0 \in \langle 12 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6},\ 12 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \rangle = \langle \frac{7}{6},\ \frac{13}{6} \rangle$ a teda $k_0 = 2$, ale pri 23 hodoch dostaneme $k_0 \in \langle 3,\ 4 \rangle$, a teda $k_0 = 3$ alebo $k_0 = 4$. (zrejme potom $P_{23}(3) = P_{23}(4)$ – presvedčte sa o tom). Tieto rozdielne počty vyhovujúcich k_0 súvisia s tým, že uzavretý interval (7.19) je dĺžky jedna.

Príklad 7.13. V urne sú štyri čierne a šesť bielych guliek. Náhodne z nej vytiahneme 1) bez vrátenia; 2) s vrátením päť guliek. Určme a) pravdepodobnosť toho, že sme vytiahli práve štyri biele guľky; b) najpravdepodobnejší počet vytiahnutých čiernych guliek.

Riešenie. 1a) Zrejme ide o prípad (7.5), kde $M = 10$, $K = 6$, $N = 5$ a $x = 4$. Riešením je

$$\frac{\binom{6}{4}\binom{4}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{21} \approx 0{,}2381$$

1b) Medzi piatimi vytiahnutými guľkami môžu byť nula až štyri čierne guľky. Opäť použijeme (7.5), ale teraz je $K = 4$. Vyčíslime päť pravdepodobností:

$$P(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{6}{5-x}}{\binom{10}{5}} \qquad \text{pre } x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

a zistíme, pre ktoré x je zodpovedajúca pravdepodobnosť najväčšia. Priamy výpočet by bol trochu zdĺhavý, ale v MATLABe získame tieto pravdepodobnosti pomocou funkcie *hygepdf* $(0 : 4, 10, 4, 5)$. Získané výsledky sú v tabuľke:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0,0238	0,2381	0,4762	0,2381	0,0238

Pravdepodobnosť $P(3)$ je najväčšia, a preto najpravdepodobnejší počet vytiahnutých čiernych guliek je $x = 3$.

2a) Pod výberom guliek s vrátením rozumieme to, že náhodne vytiahneme jednu guľku, zistíme jej farbu a vrátime ju do urny. Druhú guľku vyberáme rovnakým spôsobom a po zistení farby ju vrátime do urny. Takto pokračujeme aj pri ďalších guľkách až kým nevytiahneme piatu guľku. Je zrejmé, že pred každým novým ťahom guľky je systém podmienok rovnaký, a teda ide o päťkrát opakované nezávislé pokusy na ktoré môžeme aplikovať Bernoulliho vzorec, pričom $n = 5$ a A je jav, ktorý spočíva v tom, že ak z danej urny náhodne vytiahneme jednu guľku, tak bude biela. Teda $P(A) = p = \frac{6}{10} = 0,6$. Z piatich náhodne vytiahnutých guliek majú byť štyri biele, t. j. jav A má nastať štyrikrát a teda $k = 4$. Takto je potrebné určiť z (7.17) hodnotu $P_5(4)$:

$$P_5(4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^{5-4} = 0{,}2592.$$

2b) Mohli by sme postupovať obdobne ako v časti 1b) a vyčísliť všetky pravdepodobnosti $P_5(k)$ (teraz je ovšem $p = 0{,}4$) alebo v prostredí MATLABu ich získať pomocou *binopdf* $(0 : 5, 5{,}0.4)$. Dostali by sme:

k	0	1	2	3	4	5
$P_5(k)$	0,0778	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,0102

Hodnota $P_5(2)$ je najväčšia, a preto najpravdepodobnejší počet vytiahnutých čiernych guliek je dva. K tomuto záveru sme mohli dospieť aj pomocou (7.19):
$k_0 \in \langle 5 \cdot 0{,}4 - 0{,}6;\ 5 \cdot 0{,}4 + 0{,}4\rangle = \langle 1{,}4;\ 2{,}4\rangle$, čo znamená, že $k_0 = 2$.

Príklad 7.14. V urne sú štyri čierne a šesť bielych guliek. V prvom kroku z nej náhodne vytiahneme s vrátením dve guľky. Ak obe guľky boli rovnakej farby, tak do urny pridáme tri guľky, ktoré majú takú farbu akú mali dve vytiahnuté guľky, ale ak sú rôznofarebné, tak v urne nezmeníme konšteláciu guliek. V druhom kroku náhodne vytiadneme z urny bez vrátenia päť guliek. Určme pravdepodobnosť toho, že všetky tieto guľky budú čierne.

Riešenie. Pre prvý krok aplikujeme Bernoulliho vzorec: nech k je počet vytiahnutých čiernych guliek. Potom $n = 2$, $p = 0{,}4$ a podľa (7.17) je

$$P_2(0) = 0{,}6^2 = 0{,}36, \quad P_2(1) = \binom{2}{1} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}48, \quad P_2(2) = 0{,}4^2 = 0{,}16.$$

Pre druhý krok uvažujme hypotézy, ktoré sú určené výsledkom prvého kroku:

- nech H_1 je hypotéza, že sme v prvom kroku vytiahli dve biele guľky. Potom $P(H_1) = P_2(0) = 0{,}36$ a v urne máme štyri čierne a deväť bielych guliek;
- nech H_2 je hypotéza, že sme v prvom kroku vytiahli dve rôznofarebné guľky. Potom $P(H_2) = P_2(1) = 0{,}48$ a v urne máme štyri čierne a šesť bielych guliek;
- nech H_3 je hypotéza, že sme v prvom kroku vytiahli dve čierne guľky. Potom $P(H_3) = P_2(2) = 0{,}16$ a v urne máme sedem čiernych a šesť bielych guliek.

Ak A je jav, ktorý spočíva v tom, že v druhom kroku náhodne bez vrátenia vytiahneme päť čiernych guliek, tak

$$P(A|H_1) = 0, \quad P(A|H_2) = 0, \quad P(A|H_3) = \frac{\binom{7}{5}\binom{6}{0}}{\binom{13}{5}} = \frac{7}{429}.$$

Na základe vety o úplnej pravdepodobnosti je $P(A) = 0{,}16 \cdot \frac{7}{429} \approx 0{,}0026$.

Úlohy

7.1. Určte pravdepodobnosť toho, že pri hode dvoma hracími kockami je a) súčet; b) súčin; c) absolútna hodnota rozdielu počtu padnutých bodov štyri. [a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{1}{12}$; c) $\frac{1}{9}$]

7.2. Určte pravdepodobnosť toho, že náhodne zvolené číslo z celých čísel 1 až 800, je deliteľné a) trojkou; b) trojkou alebo štvorkou; c) trojkou alebo štvorkou alebo päťkou; d) štvorkou alebo šestkou. [a) $\frac{133}{400}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{267}{800}$]

7.3. Číslice 1, 2, 3, 4, 5 sú po jednej napísané na piatich lístkoch. Náhodne vyberieme tri lístky a uložíme ich vedľa seba. Určte pravdepodobnosť toho, že takto vzniknuté trojciferné číslo bude párne. [0,4]

7.4. V urne je osem guli očíslovaných od 1 do 8. Aká je pravdepodobnosť toho, že pri prvých piatich náhodne vytiahnutých guliach bude poradové číslo ťahanej gule vždy totožné s číslom na vytiahnutej guli? [$\frac{1}{6720}$ (bez vrátenia) alebo $\frac{1}{32768}$ (s vrátením)]

7.5. Na poličke je náhodne položených 17 rôznych kníh, medzi ktorými je trojdielny román. Určte pravdepodobnosť toho, že a) diely románu sú postavené vedľa seba; b) diely románu sú usporiadané podľa náväznosti zľava doprava. [a) $\frac{3}{136}$; b) $\frac{1}{272}$]

7.6. V lotérii MATES sa žrebuje 5 čísel z 35. Aká je pravdepodobnosť toho, že ak hráč natipuje 5 čísel, tak z vyžrebovaných čísel uhádne práve $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ čísel? $\left[\frac{\binom{5}{k}\binom{30}{5-k}}{\binom{35}{5}}\right]$

7.7. Kontrolóri posudzujú zásielu 50 výrobkov náhodným výberom piatich výrobkov. Ak nájdu aspoň jeden chybný výrobok, tak celá zásielka je vrátená výrobcovi. Určte pravdepodobnosť toho, že zásielka bude vrátená, ak vieme, že obsahuje: a) 10 %; b) 2 % chybných výrobkov. $\left[\text{a) } 1 - \frac{\binom{45}{5}}{\binom{50}{5}} \approx 0{,}4234;\ \text{b) } 1 - \frac{\binom{49}{5}}{\binom{50}{5}} = 0{,}1\right]$

7.8. Zo sérií $s \in \{30,\ 60,\ 90,\ 120,\ 150\}$ kusov výrobkov, v ktorých sa nachádza po 16 nepodarkov, náhodne vyberieme na kontrolu kvality 11 výrobkov. Určte pravdepodobnosť toho, že medzi vybranými výrobkami bude práve $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ nepodarkov. $\left[\frac{\binom{16}{k}\binom{s-16}{11-k}}{\binom{s}{11}}\right]$

7.9. V obchode je 38 výrobkov od dodávateľa A a 22 výrobkov od dodávateľa B. Zákazník si náhodne vybral 10 výrobkov. Určte pravdepodobnosť toho, že: a) 7 z nich je od dodávateľa A; b) najviac 4 výrobky sú od A; c) všetky sú od toho istého dodávateľa; d) aspoň jeden výrobok je od B. [a) 0,2578; b) 0,0954; c) 0,0063; d) 0,9937]

7.10. Určte pravdepodobnosť toho, že pri hode dvoma hracími kockami padne: a) práve jedna šestka; b) aspoň jedna šestka; c) nepadne žiadna šestka; d) padnú obe šestky; e) súčet bodov 9; f) súčet bodov 6; g) nepadne súčet 10; h) súčet menší ako 7; i) súčet väčší ako 10; j) súčet deliteľný tromi; k) súčet deliteľný šiestimi.
[a) $\frac{5}{18}$; b) $\frac{11}{36}$; c) $\frac{25}{36}$; d) $\frac{1}{36}$; e) $\frac{1}{9}$; f) $\frac{5}{36}$; g) $\frac{11}{12}$; h) $\frac{5}{12}$; i) $\frac{1}{12}$; j) $\frac{1}{3}$; k) $\frac{1}{6}$]

7.11. Určte pravdepodobnosť toho, že pri hode tromi hracími kockami padne súčet bodov: a) väčší než päť; b) menší ako osem. [a) $\frac{103}{108}$; b) $\frac{35}{216}$]

7.12. V zásielke je 80 % štandardných výrobkov. Zo štandardných výrobkov je 45 % výrobkov mimoriadnej kvality. Určte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný výrobok z tejto zásielky je mimoriadnej kvality. [0,36]

7.13. Nech 4 : 6 : 5 : 5 je pomer počtu výrobkov vyrobených na štyroch strojoch. Pravdepodobnosť produkcie výrobku prvej akosti je pre jednotlivé stroje v danom poradí takáto: 0,7; 0,6; 0,8 a 0,7. Určte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný výrobok je prvej akosti. [0,695]

7.14. Telegrafné vysielanie sa skladá zo signálov bodka a čiarka. Pri prenose týchto signálov sa skreslí v priemere každá štvrtá vyslaná bodka a každá piata vyslaná čiarka (t. j. prijme sa opačný signál než bol vyslaný). Je známe, že počty vysielaných signálov bodka a čiarka sú v pomere 5 : 3. Určte pravdepodobnosť toho, že bol vyslaný: a) signál bodka, ak bola prijatá bodka; b) signál čiarka, ak bola prijatá čiarka. [a) $\frac{25}{29}$; b) $\frac{48}{73}$]

7.15. V krabici je 8 loptičiek, z nich sú 3 nové. Pre prvú hru sa z krabice náhodne vyberú 2 loptičky, ktoré sa po hre vrátia späť do krabice. Pre druhú hru sa z tejto krabice opäť vyberú dve loptičky. Aká je pravdepodobnosť toho, že obidve už boli použité? [0,4949]

7.16. Z urny, ktorá obsahuje 6 čiernych a 9 bielych gulí, náhodne vyberieme jednu guľu. Potom ju vrátime naspäť a pridáme ešte 9 gulí tej istej farby, akej bola vytiahnutá guľa. Aká je pravdepodobnosť toho, že potom vytiahneme z urny bielu guľu? [0,6]

7.17. 50 % študentov študuje priebežne počas semestra. Z nich 90 % urobí skúšku v riadnom termíne. Skúšku v riadnom termíne urobí 55 % zo všetkých študentov. Aká je pravdepodobnosť toho, že študent, úspešný v riadnom termíne, študoval priebežne počas semestra? [0,8182]

7.18. Aká je pravdepodobnosť toho, že pri nezávislom hode tromi hracími kockami padne na jednej číslo 3 alebo 4, na druhej párne číslo a na tretej nepárne číslo? [$\frac{1}{12}$]

7.19. V jednej urne je 1 biela a 2 čierne guľky, v druhej urne sú 3 biele a 1 čierna a v tretej urne sú 2 biele a 3 čierne guľky. Z každej urny náhodne vytiahneme po jednej guľke. Určte pravdepodobnosť toho, že: a) 2 guľky budú biele a 1 čierna; b) všetky tri budú rovnakej farby. [a) $\frac{23}{60}$; b) $\frac{1}{5}$]

7.20. Štyria študenti sa nezávisle na sebe snažia vyriešiť úlohu. Prvý študent vyrieši úlohu s pravdepodobnosťou 0,6, pre ďalších sú pravdepodobnosti úspešného vyriešenia úlohy 0,55, 0,45 a 0,5. Aká je pravdepodobnosť toho, že úloha bude vyriešená: a) všetkými študentami; b) vôbec nebude vyriešená; c) aspoň jedným študentom; d) práve troma študentami; e) aspoň dvoma? [a) 0,0743; b) 0,0495; c) 0,9505; d) 0,2753; e) 0,725843]

7.21. Pravdepodobnosť toho, že basketbalista trafí do koša je 0,7. Určte pravdepodobnosť toho, že basketbalista pri šiestich nezávislých hodoch: a) aspoň raz trafí do koša; b) práve dvakrát trafí do koša; c) aspoň dvakrát trafí do koša. c) Najpravdepodobnejší počet trafení do koša v sérii dvadsiatich nezávislých pokusov. [a) 0,9993; b) 0,0595; c) 0,9908; d) 14]

7.22. Do siete je zapojených 24 odporov. Ľubovoľný z nich je v bezchybnom stave s pravdepodobnosťou 0,8. Určte pravdepodobnosť toho, že: a) aspoň jeden z odporov je pokazený; b) najmenej šesť a nie viac ako pätnásť odporov je v bezchybnom stave; c) najmenej šesť alebo nie viac ako desať odporov je v bezchybnom stave; d) pravdepodobnosť najpravdepodobnejšieho počtu bezchybných odporov. [a) 0,9953; b) 0,0362; c) 1; d) 0,196]

7.23. Čo je pravdepodobnejšie pri hádzaní mincou: a) hodiť dvakrát rub pri štyroch hodoch alebo hodiť trikrát rub pri 6 hodoch; b) hodiť aspoň trikrát rub pri štyroch hodoch alebo hodiť najmenej päťkrát líce pri 8 hodoch? [a) $0{,}375 > 0{,}3125$; b) $0{,}3125 < 0{,}3633$]

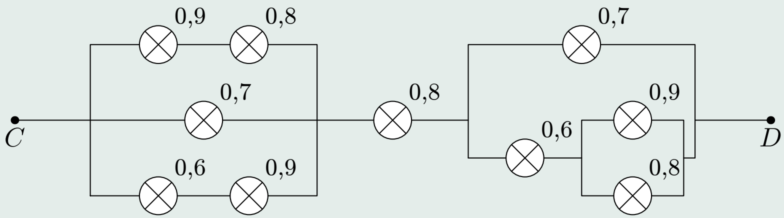
7.24. Pravdepodobnosť toho, že pri štyroch nezávislých pokusoch nastane jav A práve dvakrát je rovná 0,1536. Aká je pravdepodobnosť toho, že pri šiestich nezávislých pokusoch nastane jav A aspoň dvakrát, ak vieme, že $P(A) < P(\overline{A})$? [0,3446]

7.25. Z urny, v ktorej je 20 bielych a dve čierne guľky, sa ťahá po jednej guľke, pričom sa po každom ťahu guľka vráti späť do urny. Určte najmenší počet ťahov, pri ktorom bude pravdepodobnosť vytiahnutia aspoň jednej čiernej guľky väčšia ako 0,5. [8]

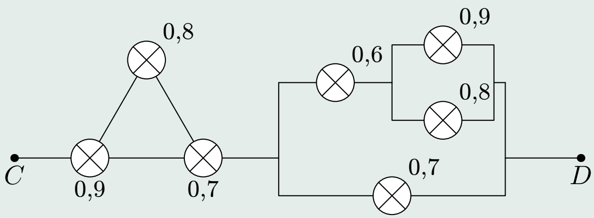
7.26. a) Najmenej koľkokrát treba hodiť hracou kockou, aby pravdepodobnosť toho, že aspoň raz padne šestka, bola väčšia ako 0,7? b) Aspoň koľkokrát treba hodiť dvoma hracími kockami, aby pravdepodobnosť toho, že aspoň raz padne súčet 12, bola aspoň 0,5? c) Koľkokrát treba hodiť hracou kockou, aby najpravdepodobnejší počet padnutých šestiek bol 32? [a) 7; b) 25; c) $191 \leqq n \leqq 197$]

7.27. Žiarovky sú zapojené podľa schémy na obrázku a) 7.3; b) 7.4. Pri každej žiarovke je uvedená pravdepodobnosť toho, že je dobrá. Určte pravdepodobnosť toho, že z bodu C do bodu D bude pretekať prúd. [a) 0,6740; b) 0,5521]

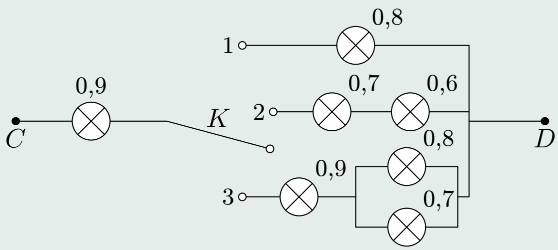
7.28. Žiarovky sú zapojené podľa schémy na obrázku 7.5. Pri každej žiarovke je uvedená pravdepodobnosť toho, že je dobrá. Kľúč K je s rovnakou pravdepodobnosťou zapojený práve v jednej z troch možných polôh. Určte pravdepodobnosť toho, že z bodu C do bodu D bude pretekať prúd. [0,6198]



Obr. 7.3



Obr. 7.4



Obr. 7.5

8. Náhodná premenná (veličina)

8.1. Pojem náhodnej premennej

Pojmy premenná a hodnota premennej sú v matematike všeobecne známe. Pod **náhodnou premennou** budeme rozumieť takú premennú, ktorá svoje hodnoty nadobúda náhodne. Uvedieme niektoré príklady náhodnej premennej:

1. Súčet bodov hodených napr. na troch bežných hracích kockách (možné hodnoty: $3, 4, \dots, 18$);
2. počet študentov, ktorí sa zúčastnia na celej konkrétnej prednáške (možné hodnoty: nula, jedna, dva, ... kapacita posluchárne);
3. počet uhádnutých čísel v konkrétnej číselnej lotérii alebo výška peňažnej výhry (častejšie prehry) tipujúceho v tejto lotérii;
4. počet hodov kockou po padnutie prvej šestky (možné hodnoty: $1, 2, 3, \dots$);
5. skutočná pohotovostná hmotnosť osobného auta, ak výrobca ju udáva 420 ± 2 kg (možné hodnoty sú z intervalu $\langle 398,\ 402\rangle$).
6. doba, počas ktorej je študent schopný rozumieť výkladu učiteľa na trojhodinovej prednáške (možné hodnoty sú z intervalu $\langle 0,\ 3\rangle$).

Vzhľadom na dostupný matematický aparát uvedieme len intuitívnu definíciu náhodnej premennej: v elementárnej teórii pravdepodobnosti pod **náhodnou premennou** alebo **náhodnou veličinou** rozumieme každé zobrazenie $X : \gamma \to R$, kde γ je množina elementárnych javov pravdepodobnostného poľa $[\gamma, \tau, P]$ a R je množina reálnych čísel. Pre každý elementárny jav E je zrejme $X(E)$ nejaké reálne číslo, ktoré nazývame **hodnotou náhodnej premennej pre elementárny jav E** alebo skrátene **hodnotou náhodnej premennej**.

Náhodná premenná teda priradí v pravdepodobnostnom poli $[\gamma, \tau, P]$ každému elementárnemu javu nejaké reálne číslo. Tým aj každému javu $A \in \tau$ priradí istú číselnú množinu, ktorá je tvorená z tých reálnych čísel, ktoré sú priradené tým elementárnym javom, na ktoré sa jav A rozkladá. Nebudeme hlbšie skúmať túto číselnú množinu.

Náhodné premenné budeme označovať veľkými písmenami X, Y, X_1, X_2, ... a hodnoty náhodných premenných malými písmenami x, y, x_1, x_2, ... Ďalej budeme predpokladať, že pre každé reálne číslo a vieme určiť pravdepodobnosti typu:

1. $P(X = a)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že hodnota náhodnej premennej X je rovná číslu a;
2. $P(X \leqq a)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že hodnoty náhodnej premennej X nebudú väčšie než číslo a;
3. $P(X \in I)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že náhodná premenná X nadobúda hodnoty z intervalu I.

Príklad 8.1. Pri hode dvoma kockami (to je rovnocenné dvom hodom jednou kockou) obsahuje množina elementárnych javov 36 rovnako pravdepodobných javov E_{ij}, $(i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$, kde i je počet bodov na prvej a j na druhej kocke. Môžeme definovať náhodnú premennú X, ktorá nadobúda hodnoty napr. súčtu bodov na oboch kockách, t.j. všetky možné $i + j$. Táto náhodná premenná môže nadobúdať hodnoty 2, 3, ...,12. Je zrejmé, že hodnota 2 je obrazom jediného elementárneho javu E_{11}, a teda $P(X = 2) = \frac{1}{36}$. Ale hodnota 4 je obrazom až troch elementárnych javov E_{13}, E_{31} a E_{22}, a preto $P(X = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Rozoznávame dva typy náhodných premenných: každú náhodnú premennú, ktorá nadobúda

1. konečný alebo spočitateľný počet možných hodnôt nazývame **diskrétnou náhodnou premenou**;

2. hodnoty z nejakého konečného alebo spočítateľného počtu intervalov nazývame **spojitou náhodnou premenou**.

Prvé štyri náhodné premenné z úvodu tejto časti sú diskrétne (štvrtá má nekonečný, ale spočítateľný počet možných hodnôt), ale piata a šiesta sú spojité náhodné premenné.

8.2. Distribučná funkcia náhodnej premennej

Definícia 8.1. Distribučná funkcia F (CDF – Cumulative Distribution Function) **náhodnej premennej** X je funkcia, ktorá je pre každé $x \in R$ určená predpisom

$$F(x) = P(X \leqq x). \tag{8.1}$$

Veta 8.1 (Vlastnosti distribučnej funkcie).

1. Pre každé $x \in R$ je $0 \leqq F(x) \leqq 1$, t. j. oborom hodnôt distribučnej funkcie je množina $\langle 0, 1\rangle$;
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$;
3. F je neklesajúca funkcia, t. j. pre každé $a < b$ je $F(a) \leqq F(b)$;
4. F je sprava spojitá na celej množine reálnych čísel;
5. ak $a < b$, tak $P(X \in (a, b\rangle) = P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a)$.[a]

[a] To nám umožňuje zo známej distribučnej funkcie určovať pravdepodobnosť istých javov.

Dôkaz. Dokážeme len poslednú vlastnosť: nech A je jav, ktorý spočíva v tom, že náhodná premenná X nadobúda hodnoty z intervalu $(-\infty, a\rangle$ (t. j. $X \in (-\infty, a\rangle$), jav B, že $X \in (a, b\rangle$ a jav C, že $X \in (-\infty, b\rangle$. Zrejme javy A a B sú disjunktné a $A \cup B = C$. Podľa tretej axiómy definície pravdepodobnosti je potom $P(A)+P(B) = P(C)$. Ak si uvedomíme, že $P(A) = P(X \leqq a) = F(a)$, podobne $P(C) = P(X \leqq b) = F(b)$ a $P(B) = P(a < X \leqq b)$, tak dostávame požadovanú rovnosť. $\square$

Poznámka 8.1. V literatúre je distribučná funkcia často definovaná predpisom $F(x) = P(X < x)$ (porovnaj s (8.1)). Takto definovaná distribučná funkcia je na R spojitá zľava a 5. vlastnosť má tvar: ak $a < b$, tak $P(X \in \langle a, b)) = P(a \leqq X < b) = F(b) - F(a)$. Rozdielne vlastnosti, vyplývajúce z odlišných definícií, sa prejavia len pri diskrétnych náhodných premenných. My sme sa priklonili k verzii (8.1), lebo takú definíciu predpokladá MATLAB.

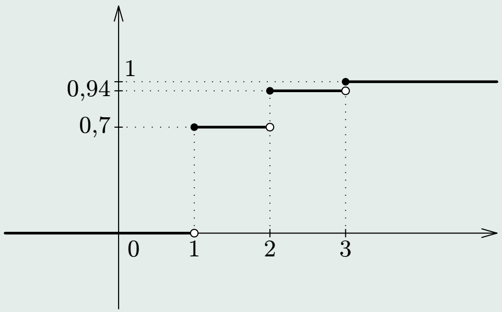
Príklad 8.2. Študent urobí skúšku na riadny termín s pravdepodobnosťou 0,7 a v prípade neúspechu sa uňho pravdepodobnosť urobenia skúšky na opravných termínoch zvyšuje o 0,1. K dispozícii má dva opravné termíny. Určme predpis a nakreslime graf distribučnej funkcie náhodnej premennej X, ktorá nadobúda hodnoty počtu absolvovaných termínov študenta na skúške.

Riešenie. Študent urobí skúšku na riadny termín s pravdepodobnosťou 0,7 a teda $P(X = 1) = 0{,}7$. Úspešný je až na prvom opravnom termíne s pravdepodobnosťou $0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$, čo znamená, že $P(X = 2) = 0{,}24$. Trikrát sa zúčastní na skúške v prípade, že na prvých dvoch termínoch bol neúspešný, t. j. $P(X = 3) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$ (všimnime si, že výsledok skúšky tu nie je z hľadiska pravdepodobnosti podstatný, takže sa nedozvieme, či študent nakoniec skúšku urobil alebo nie. Škoda, že nemá k dispozícii tretí opravný termín). Získané výsledky môžeme zhrnúť do tabuľky:

možné hodnoty náhodnej premennej X	1	2	3
pravdepodobnosti ich nadobudnutia	0,7	0,24	0,06

Distribučná funkcia náhodnej premennej X má podľa (8.1) tento predpis

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x < 1, \\ 0{,}7, & \text{pre } 1 \leqq x < 2, \\ 0{,}94, & \text{pre } 2 \leqq x < 3, \\ 1, & \text{pre } 3 \leqq x. \end{cases}$$



Obr. 8.1

Jej graf je znázornený na obr. 8.1. Ľahko urobíme zovšeobecnenie pre ľubovoľnú diskrétnu náhodnú premennú: nech sú jej všetky možné hodnoty $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \mathcal{H}(X)$ (množine $\mathcal{H}(X)$ hovoríme **obor hodnôt diskrétnej náhodnej premennej** X) usporiadané podľa veľkosti: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (v príklade je $n = 3$). Nech $P(X = x_i) = p_i$. $i = 1$, 2, …, n. (p_i je pravdepodobnosť toho, že náhodná premenná X nadobudne hodnotu x_i). Potom, obdobne ako v predchádzajúcom príklade, môžeme náhodnú premennú X popísať tabuľkou:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline P(X = x_i) = p_i & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}, \tag{8.2}$$

ktorej hovoríme **pravdepodobnostná tabuľka náhodnej premennej** X (sú v nej všetky informácie o náhodnej premennej: jej obor hodnôt $\mathcal{H}(X)$ je v prvom riadku a pravdepodobnosti $p_i = P(X = x_i)$ nadobudnutia jednotlivých hodnôt sú v druhom riadku).

Graf každej distribučnej funkcie diskrétnej náhodnej premennej X má „schodkovitý tvar" (obr. 8.1), pričom ku „skoku" o hodnotu p_i môže dôjsť len v možnej hodnote x_i náhodnej premennej. V prípade nekonečného spočitateľného počtu možných hodnôt náhodnej premennej bude počet týchto skokov nekonečný.

Je zrejmé, že pre pravdepodobnosti (8.2) platí tzv. **normalizačná podmienka**:

$$\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1, \tag{8.3}$$

kde zápis $n(\infty)$ znamená, že suma sa uvažuje po n (konečný počet možných hodnôt náhodnej premennej) alebo po nekonečno (nekonečný počet možných hodnôt). Pre distribučnú funkciu máme

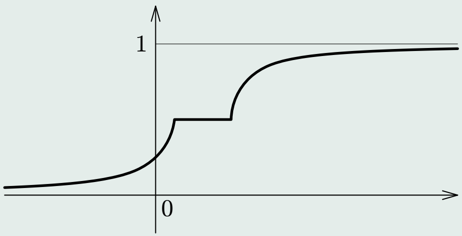
$$F(x) = P(X \leqq x) = \sum_{x_i \leqq x} p_i,$$

t. j. hodnota distribučnej funkcie v bode x je rovná súčtu pravdepodobností nadobudnutia všetkých tých možných hodnôt, ktoré nie sú väčšie než x.

Poznámka 8.2. Pre spojitú náhodnú premennú sa obmedzíme na konštatovanie, že jej distribučná funkcia je spojitá na celej množine reálnych čísel, je neklesajúca s oborom hodnôt v intervale $\langle 0, 1\rangle$ (pozri napr. obr. 8.2).

8.3. Spojitá náhodná premenná a jej hustota pravdepodobnosti

V úvodnej časti tejto kapitoly sme uviedli pojem spojitá náhodná premenná. Teraz ho upresníme.



Obr. 8.2

Definícia 8.2. Náhodnú premennú X nazývame **spojitou** práve vtedy, keď existuje taká nezáporná a na množine R integrovateľná funkcia f, pre ktorú platí:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{8.4}$$

kde F je distribučná funkcia náhodnej premennej X. Takejto funkcii f hovoríme **hustota pravdepodobnosti náhodnej premennej** X (PDF – Probability Density Function).

Nasledujúcu vetu nebudeme dokazovať.

Veta 8.2 (Vlastnosti hustoty pravdepodobnosti). Nech F je distribučná funkcia a f hustota pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej. Potom okrem (8.4) platí:

1. ak hodnota $f(x)$ existuje, tak $f(x) \geqq 0$;
2. ak existuje derivácia $F'(x)$, tak $F'(x) = f(x)$, $x \in R$;
3. tzv. „normalizačná podmienka“ (spojitá analógia s (8.3)) pre hustotu pravdepodobnosti:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1, \tag{8.5}$$

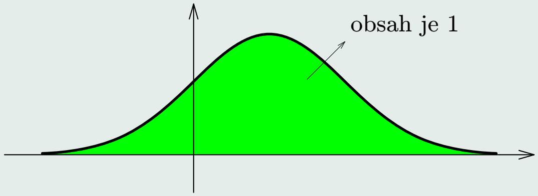
   t. j. obsah útvaru, ktorý je ohraničený grafom hustoty a osou o_x je rovný jednej (obr 8.3);
4. pre $a < b$ je

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{8.6}$$

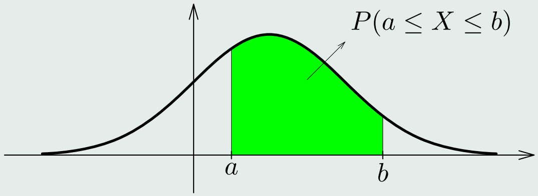
   t. j. pravdepodobnosť toho, že náhodná premenná X nadobúda hodnoty z intervalu $\langle a, b\rangle$ je rovná obsahu plochy útvaru, ktorý je „ohraničený grafom jej hustoty nad týmto intervalom“ (obr. 8.4);

Poznámka 8.3. Pre spojitú náhodnú premennú naviac platí:

1. hustota pravdepodobnosti náhodnej premennej X nie je určená jednoznačne;
2. jej distribučná funkcia je spojitá na celej množine reálnych čísel;



Obr. 8.3



Obr. 8.4

3. pre každé $a \in R$ je $P(X = a) = 0$;
4. rovnosť (8.6) môžeme zovšeobecniť takto:

$$P(a < X < b) = P(a \leqq X < b) = P(a < X \leqq b) = \\ = P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.7}$$

Skúste sa zamyslieť nad tým, či posledné posledné tri vlastnosti platia aj pri diskrétnej náhodnej premennej.

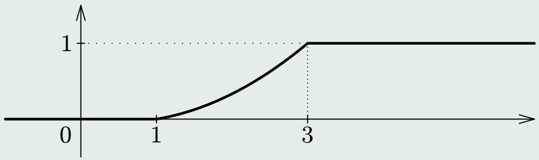
Príklad 8.3. Majme funkciu $F(x) = \begin{cases} a & \text{pre } x < 1, \\ bx + cx^2 & \text{pre } 1 \leqq x < 3, \\ d & \text{pre } 3 \leqq x, \end{cases}$ kde a, b, c, d sú reálne konštanty. Určme: a) pre aké hodnoty týchto konštánt môže F byť distribučnou funkciou nejakej náhodnej premennej X; b) predpis hustoty f tejto náhodnej premennej; c) $P(0 < X \leqq 2)$.

Riešenie. a) Pre našu funkciu F je

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = a \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = d$$

a podľa druhej časti vety 8.1 dostaneme $a = 0$ a $d = 1$. Na intervale $\langle 1, 3\rangle$ nie je funkcia F konštantná (okrem prípadu $b = c = 0$ – premyslite si ho), a preto X nie je diskrétna, ale spojitá náhodná premenná. To znamená, že jej distribučná funkcia F je spojitá na R, a teda aj v bodoch 1 a 3. Keďže

$$\lim_{x\to 1_-} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1_+} F(x) = a + b, \quad \lim_{x\to 3_-} F(x) = 3a + 9b, \quad \lim_{x\to 3_+} F(x) = 1,$$



Obr. 8.5

tak zo sústavy rovníc $a + b = 0$ a $3a + 9b = 1$ dostaneme $a = -\frac{1}{6}$ a $b = \frac{1}{6}$. Teda funkcia $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 1, \\ \frac{-x+x^2}{6} & \text{pre } 1 \leqq x < 3, \\ 1 & \text{pre } 3 \leqq x \end{cases}$ je distribučnou funkciou istej spojitej náhodnej

premennej. Jej graf je znázornený na obr. 8.5 (na intervale $\langle 1, 3\rangle$ je to časť paraboly).
b) Hustotu pravdepodobnosti f dostaneme z bodu 2. vety 8.2:

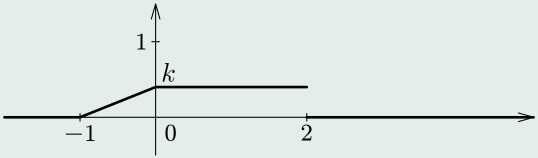
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 1, \\ \frac{2x-1}{6} & \text{pre } 1 < x < 3, \\ 0 & \text{pre } 3 < x. \end{cases}$$

Všimnite si, že táto funkcia nie je spojitá v bodoch 1 a 3 (nakreslite jej graf).
c) Podľa štvrtého bodu poslednej poznámky máme

$$P(0 < X \leqq 2) = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{2x-1}{6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Tento výsledok sme mohli získať aj pomocou (8.6):

$$P(0 < X \leqq 2) = F(2) - F(0) = \frac{-2+2^2}{6} - 0 = \frac{1}{3}.$$



Obr. 8.6

Príklad 8.4. Majme daný graf funkcie f na obr. 8.6, kde $k \in R$. Určme:
a) konštantu k tak, aby funkcia f bola hustotou pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X;
b) predpis distribučnej funkcie tejto náhodnej premennej;
c) $P(0 < X)$.

Riešenie. a) Podľa (8.5) je $\frac{k}{2} + 2 \cdot k = 1$ (obsah trojuholníka plus obsah obdĺžnika), t. j. $k = 0{,}4$. Overte, že predpis funkcie f je

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}4 \cdot (x+1) & \text{pre } -1 < x < 0, \\ 0{,}4 & \text{pre } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{pre iné } x, \end{cases}$$

ktorý spĺňa všetky požiadavky hustoty pravdepodobnosti náhodnej premennej X (v bode 2 nie je spojitá).

b) Na základe (8.4) je

- pre $x \leqq -1$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \,\mathrm{d}t = 0$;
- pre $-1 \leqq x \leqq 0$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0 \,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{x} 0{,}4 \cdot (t+1) \,\mathrm{d}t = 0{,}2(x+1)^2$;
- pre $0 \leqq x \leqq 2$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0 \,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{0} 0{,}4 \cdot (t+1) \,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{x} 0{,}4 \,\mathrm{d}t = 0{,}2(2x+1)$;
- pre $2 \leqq x$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0 \,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{0} 0{,}4 \cdot (t+1) \,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{2} 0{,}4 \,\mathrm{d}t + \int\limits_{2}^{x} 0 \,\mathrm{d}t = 1$

(nakreslite graf funkcie F).

c) Môžeme postupovať obdobným spôsobom ako v predchádzajúcom príklade: výpočtom príslušného integrálu vypočítame obsah obdĺžnika, ktorý určuje graf hustoty f na intervale $\langle 0, 2 \rangle$, a ten je rovný 0,8.

Všimnime si, že náhodnú premennú môžeme zadať dvoma základnými spôsobmi:

1. distribučnou funkciou F, ktorá má pri diskrétnej náhodnej premennej schodkovitý charakter (jedinými bodmi nespojitosti sú možné hodnoty x_i náhodnej premennej) a pri spojitej náhodnej premennej je spojitá na celej množine reálnych čísel;

2. diskrétnu náhodnú premennú úplne charakterizuje pravdepodobnostná tabuľka (8.2 a spojitá náhodná premenná je daná svojou hustotou pravdepodobnosti f.

Jedným z týchto dvoch prístupov definujeme tzv **zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej** (skrátene **rozdelenie pravdepodobnosti**). Premyslite si súvis medzi oboma prístupmi zadania zákona rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej.

8.4. Číselné charakteristiky (parametre) náhodnej premennej

Každá náhodná premenná je úplne charakterizovaná jej zákonom rozdelenia pravdepodobnosti (pozri záver predchádzajúcej časti). V časti ŠTATISTIKA uvidíme, že toto rozdelenie pravdepodobnosti nie je vždy v praxi jednoducho získateľné. Preto každej náhodnej premennej priradíme isté tzv. **číselné charakteristiky**, ktoré nám poskytnú isté informácie o charaktere skúmanej náhodnej premennej. V ďalšom texte budeme predpokladať, že zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X je pri spojitej náhodnej premennej daný jej hustotou f a pri diskrétnej náhodnej premennej jej pravdepodobnostnou tabuľkou (8.2), v ktorej je zahrnutý jej obor hodnôt $\mathcal{H}(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ a pravdepodobnosti $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots .n \dots$.

8.4.1. Parametre polohy

Základnou číselnou charakteristikou náhodnej premennej je jej stredná hodnota (hovorí sa jej aj **parameter polohy**):

Definícia 8.3. Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X. Pod **strednou hodnotou náhodnej premennej** X rozumieme číslo $E(X)$ (ak existuje) , ktoré je definované takto

$$E(X) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n(\infty)} x_i p_i & \text{pre diskrétnu náhodnú premennú,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x & \text{pre spojitú náhodnú premennú.} \end{cases} \tag{8.8}$$

Stredná hodnota $E(X)$ je v podstate priemerná hodnota náhodnej premennej X.

Príklad 8.5. Terč tvorí kruh K a dve medzikružia K_1 a K_2. Zásah do kruhu K je dosiahnutý s pravdepodobnosťou $p_K = 0{,}7$ a je hodnotený 15 bodmi, pre medzikružia K_1, resp. K_2 je pravdepodobnosť zásahu $p_{K_1} = 0{,}2$, resp. $p_{K_2} = 0{,}1$ s ohodnotením 5, resp. -5 bodov. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty dosiahnutého súčtu bodov pri dvoch nezávislých výstreloch na terč. Určme: a) zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X; b) priemerný počet dosiahnutého súčtu bodov; c) $P(|X| \geqq \frac{E(X)}{2})$.

Riešenie. a) Je evidentné, že ide o diskrétnu náhodnú premennú s oborom hodnôt $\mathcal{H}(X) = \{-10, 0, 10, 20, 30\}$. Počítajme pravdepodobnosti nadobudnutia jednotlivých hodnôt: napr. hodnota 0 sa dosiahne, keď prvým výstrelom dosiahneme 5 bodov a druhým -5 bodov alebo prvým -5 a druhým výstrelom 5 bodov, t. j. (ide o nezávislé javy)

$$P(X = 0) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}04;$$

hodnota 10 sa dosiahne, keď prvým výstrelom dosiahneme 15 bodov a druhým -5 bodov alebo prvým -5 a druhým výstrelom 15 bodov alebo prvým 5 a druhým výstrelom tiež 5 bodov, t. j.

$$P(X = 10) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}18.$$

Obdobným postupom získame pravdepodobnosti nadobudnutia ostatných možných hodnôt (overte tieto výpočty), čím dostaneme pravdepodobnostnú tabuľku

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c} x_i & -10 & 0 & 10 & 20 & 30 \\ \hline p_i = P(X = x_i) & 0{,}01 & 0{,}04 & 0{,}18 & 0{,}28 & 0{,}49 \end{array}, \tag{8.9}$$

ktorá určuje hľadaný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X.
b) Podľa (8.8) je $E(X) = (-10) \cdot 0{,}01 + 0 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}18 + 20 \cdot 0{,}28 + 30 \cdot 0{,}49 = 22$.
c) Zo štruktúry $\mathcal{H}(X)$ a časti b) dostaneme

$$P(|X| \geqq \frac{E(X)}{2}) = P(X = 20 \vee X = 30) =$$
$$= P(X = 20) + P(X = 30) = 0{,}28 + 0{,}49 = 0{,}77.$$

Príklad 8.6. Majme funkciu $f(x) = \begin{cases} ax^{-3} & \text{pre } x < 2, \\ 0 & \text{pre } x \leqq 2. \end{cases}$ Určme: a) pre akú hodnotu $a \in R$ môže byť táto funkcia hustotou pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X; b) $P(1 \leqq X < E(X))$.

Riešenie. a) Použijeme (8.5):

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{\infty} \frac{a}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-a}{2x^2}\right]_2^{\infty} = \frac{a}{8}$$

a teda pre $a = 8$ môže byť naša funkcia hustotou pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X (premyslite si, či sú splnené ostatné požiadavky na hustotu).
b) Najskôr vypočítame strednú hodnotu $E(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{2}^{\infty} x \cdot \frac{8}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-8}{x}\right]_2^{\infty} = 4.$$

Teda

$$P(1 \leqq X < E(X)) = \int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_2^4 \frac{8}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-4}{x^2}\right]_2^4 = \frac{3}{4}.$$

K štúdiu vlastností strednej hodnoty a iných číselných charakteristík náhodnej premennej je potrebné poznať pojem **funkcia náhodnej premennej**. Vysvetlíme tento pojem na diskrétnej náhodnej premennej X, ktorej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots\}$, pričom $p_i = P(X = x_i)$. Nech je daná prostá funkcia $g : R \to R$. Pod **funkciou g náhodnej premennej X** rozumieme náhodnú premennú Y, ktorej obor hodnôt je $\mathcal{H}(Y) = \{g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n) \dots\}$, pričom $p_i = P(Y = g(x_i))$ (t. j. pravdepodobnosti p_i sa nemenia). Je prirodzené označenie $Y = g(X)$ a $y_i = g(x_i)$. Napríklad, ak by X bola náhodná premenná s rozdelením pravdepodobnosti

x_i	-2	0	2	7
$P(X = x_i)$	0,1	0,4	0,2	0,3

, tak pre funkciu $g :\ g(x) = 4x - 5$ má náhodná premenná $Y = g(X)$ rozdelenie pravdepodobnosti

y_i	-13	-5	3	23
$P(Y = y_i)$	0,1	0,4	0,2	0,3

. Pre nie prostú funkciu $h :\ h(x) = x^2 - 5$ má náhodná premenná $Z = h(X)$ rozdelenie pravdepodobnosti

z_i	-5	-1	44
$P(Z = z_i)$	0,4	0,3	0,3

. Všimnite si, že $P(Z = -1) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0{,}3$. Takto môžeme medzi náhodné premenné zahrnúť aj tzv. **konštantnú náhodnú premennú**, ktorú označíme C. Získame ju z predchádzajúcich úvah voľbou konštantnej funkcie $g :\ g(x) = c$.

Nasledujúcu vetu nedokazujeme.

Veta 8.3 (Vlastnosti strednej hodnoty). Nech X a Y sú náhodné premenné (nad tým istým pravdepodobnostným poľom) a nech a a b sú ľubovoľné konštanty. Potom

1. stredná hodnota konštantnej náhodnej premennej A je a, t. j. $E(A) = a$;
2. $E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$;
3. $E(X - E(X)) = 0$;
4. ak graf hustoty spojitej náhodnej premennej X je symetrický vzhľadom na priamku $x = a$ (pre $a = 0$ ide o párnu funkciu), tak $E(X) = a$;
5. ak $Z = g(X)$ (t. j. Z je g funkciou náhodnej premennej X), tak

$$E(Z) = E(g(X)) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n(\infty)} g(x_i)p_i \text{ pre diskrétnu náhodnú premennú,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x \text{ pre spojitú náhodnú premennú.} \end{cases} \tag{8.10}$$

Tretia časť tejto vety je dobre známa z praxe: informuje o tom, že „priemerná odchýlka od strednej hodnoty je rovná nule“.

Poznámka 8.4. Stredná hodnota náhodnej premennej je zahrňovaná medzi tzv. **číselné charakteristiky (parametre) polohy**. K nim patria aj

- **modus náhodnej premennej** X (označujeme $\mathcal{M}o(X)$), ktorý je definovaný pre diskrétnu náhodnú premennú ako najpravdepodobnejšia hodnota tejto náhodnej premennej a pre spojitú náhodnú premennú ako ľubovoľný bod, v ktorom jej hustota nadobúda lokálne maximum;
- **medián náhodnej premennej** X (označujeme $\mathcal{M}e(X)$), ktorý je definovaný ako číslo, pre ktoré platí $P(X \leqq \mathcal{M}e(X)) \geqq 0{,}5$ a súčasne $P(X \geqq \mathcal{M}e(X)) \geqq 0{,}5$.

8.4.2. Parametre rozptylu (disperzie)

Ľahko zistíme, že stredná hodnota náhodnej premennej X s rozdelením pravdepodobnosti $\begin{array}{c||c|c} x_i & -0{,}001 & 0{,}001 \\ \hline p_i & 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}$ je rovná nule. To isté platí aj pre náhodnú premennú Y s rozdelením pravdepodobnosti $\begin{array}{c||c|c} y_i & 1000 & -1000 \\ \hline p_i & 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}$. Obor hodnôt oboch náhodných premenných je hodne odlišný a napriek tomu ich stredné hodnoty sú rovnaké. Stredná hodnota náhodnej premennej je v podstate číslo „okolo ktorého je náhodná premenná koncentrovaná“. Stredná hodnota nám nedáva informáciu o tom ako sú hodnoty náhodnej premennej rozptýlené. Užitočné je skúmať akúsi mieru rozptýlenia hodnôt náhodnej premennej okolo jej strednej hodnoty. K tomu slúžia tzv. **parametre rozptylu**, ktorými sa budeme zaoberať.

Definícia 8.4. Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X, ktorej stredná hodnota je $E(X)$. Pod **disperziou (rozptylom) náhodnej premennej X** rozumieme číslo $D(X)$ (ak existuje), ktoré je definované takto

$$D(X) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n(\infty)} (x_i - E(X))^2 p_i & \text{pre diskrétnu náhodnú premennú,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) \mathrm{d}x & \text{pre spojitú náhodnú premennú.} \end{cases} \tag{8.11}$$

Poznámka 8.5. Pre $g(x) = (x - E(X))^2$ z (8.10) a (8.11) dostaneme

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] \tag{8.12}$$

Veta 8.4 (Vlastnosti disperzie). Nech X je náhodná premenná a nech a a b sú ľubovoľné konštanty. Potom

1. disperzia konštantnej náhodnej premennej A je rovná nule, t. j. $D(A) = 0$;
2. $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X)$;
3. $D(a \cdot X + b) = a^2 \cdot D(X)$;
4. $D(X)$ môžeme vyjadriť v tvare

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{8.13}$$

Dôkaz. Dokážeme len posledné tvrdenie vety, ktoré sa často využíva na výpočet disperzie: $D(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2 \cdot X \cdot E(X) + (E(X))^2] = E(X^2) + E[-2 \cdot X \cdot E(X)] + $
$+ E[(E(X))^2] = E(X^2) - 2 \cdot [E(X)]^2 + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$ □

Ďalším parametrom rozptylu náhodnej premennej je jej smerodajná odchýlka:

Definícia 8.5. Nech existuje disperzia $D(X)$ náhodnej premennej X. Pod **smerodajnou odchýlkou náhodnej premennej X** rozumieme číslo $\sigma(X)$, ktoré je definované takto

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \tag{8.14}$$

Poznámka 8.6. Na označenie strednej hodnoty, disperzie a smerodajnej odchýlky sa v prípade, že je jasné o akú náhodnú premennú ide, používa táto stručnejšia verzia

$$E(X) = \mu, \qquad D(X) = \sigma^2 \quad \text{a} \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Ako uvidíme neskôr, (napr. pri normálnej náhodnej premennej) je užitočný pojem:

Definícia 8.6. Hovoríme, že náhodná premenná X je **normovanou náhodnou premennou** práve vtedy, keď pre ňu platí

$$E(X) = 0 \qquad \text{a} \qquad D(X) = 1. \tag{8.15}$$

Veta 8.5 (Normovanie náhodnej premennej). Nech X je náhodná premenná so známou strednou hodnotou a nenulovou disperziou. Potom náhodná premenná

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \tag{8.16}$$

je normovanou náhodnou premennou, t. j. $E(Y) = 0$ a $D(Y) = 1$.

Medzi všeobecné parametre náhodnej premennej patria jej momenty, pomocou ktorých môžeme vyjadriť parametre polohy aj rozptylu a ďalšie parametre náhodnej premennej.

Definícia 8.7. Nech X je náhodná premenná a $k \in \{0, 1, 2 \dots\}$. Pod **začiatočným momentom k-teho rádu náhodnej premennej X** rozumieme číslo $\nu_k = E(X^k)$, t. j.

$$\nu_k = E(X^k) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n(\infty)} x_i^k p_i & \text{pre diskrétnu náhodnú premennú,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x & \text{pre spojitú náhodnú premennú} \end{cases} \tag{8.17}$$

a pod **centrálnym momentom k-teho rádu náhodnej premennej X** rozumieme číslo $\mu_k = E[(X - E(X))^k]$, t. j.

$$\begin{aligned} \mu_k &= E[(X - E(X))^k = \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n(\infty)} (x_i - E(X))^k p_i \text{ pre diskrétnu náhodnú premennú,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^k f(x)\,\mathrm{d}x \text{ pre spojitú náhodnú premennú.} \end{cases} \end{aligned} \tag{8.18}$$

V praxi sa hodne využívajú aj tieto dve špeciálne číselné charakteristiky:

Definícia 8.8. Nech X je náhodná premenná. **Koeficient asymetrie $\eta(X)$**, resp **koeficient špicatosti (excesu) $\varepsilon(X)$ náhodnej premennej X** je číslo

$$\eta(X) = \frac{\mu_3}{[\sigma(X)]^3}, \qquad \text{resp.} \qquad \varepsilon(X) = \frac{\mu_4}{[\sigma(X)]^4} - 3. \tag{8.19}$$

Význam a podrobnejšie vlastnosti týchto číselných charakteristík si môže čitateľ, v prípade potreby, nájsť v odporúčanej literatúre.

Príklad 8.7. Vypočítajme disperziu, smerodajnú odchýlku a modus náhodnej premennej z príkladu 19.

Riešenie. V príklade 19 sme zistili, že $E(X) = 22$ a podľa (8.11) a (8.9) je $D(X) = (-10-22)^2 \cdot 0{,}01 + (0-22)^2 \cdot 0{,}04 + (10-22)^2 \cdot 0{,}18 + (20-22)^2 \cdot 0{,}28 + (30-22)^2 \cdot 0{,}49 = 88$. Ukážeme výpočet disperzie pomocou (8.13). K tomu musíme získať rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X^2. Presvedčte sa, že na základe (8.9) je

x_i^2	0	100	200	300
$P(X^2 = x_i^2)$	0,04	0,19	0,28	0,49

a pre strednú hodnotu náhodnej premennej X^2 je $E(X^2) = 0 \cdot 0{,}04 + 100 \cdot 0{,}19 + 200 \cdot 0{,}28 + 300 \cdot 0{,}49 = 572$ (tu sme mohli použiť i (8.17) pre $k = 2$) a na základe (8.13) dostaneme $D(X) = 572 - 22^2 = 88$.

Pre smerodajnú odchýlku dostávame: $\sigma(X) = \sqrt{88} \approx 9{,}3808$. V pravdepodobnostnej tabuľke (8.9) je 0,49 najväčšia pravdepodobnosť, a preto $\mathcal{M}o(X) = 30$.

Príklad 8.8. Pre funkciu, ktorá je daná predpisom $f(x) = \mathrm{e}^{k|x|}$, $x \in R$, určme: a) takú konštantu k, aby funkcia f bola hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej X; b) $P(E(X) < X < D(X))$; c) $\mathcal{M}o(X)$.

Riešenie. a) Podľa normalizačnej podmienky (8.5) je

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{k|x|}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left[\frac{\mathrm{e}^{kx}}{k}\right]_0^{\infty} = \frac{-2}{k},$$

pre $k < 0$. (pre $k > 0$ integrál diverguje a pre $k = 0$ nemôže byť f hustotou – prečo?). Odtiaľ $k = -2$ (overte, že získané k vyhovuje všetkým požiadavkám hustoty).

b) Keďže získaná hustota pravdepodobnosti je párna funkcia, tak podľa štvrtej časti vety 8.3 je $E(X) = 0$ a na základe (8.11) je

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \mathrm{e}^{-2|x|}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{\infty} x^2 \cdot \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{(-2x^2 - 2x - 1)\mathrm{e}^{-2x}}{2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

Takto z modifikácie (8.6) dostaneme

$$P(E(X) < X < D(X)) = P(0 < X < \frac{1}{2}) = \int_0^{0,5} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2} \right]_0^{0,5} = \frac{\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}}.$$

c) Uvažovaná hustota pravdepodobnosti má jediné lokálne maximum v bode 0, a preto $\mathcal{M}o(X) = 0$.

Úlohy

8.1. Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X so strednou hodnotou 3,8 je dané pravdepodobnostnou tabuľkou

x_i	1	2	3	4	x_5
$P(X = x_i)$	0,05	0,1	0,3	0,4	p_5

Určte: a) neznáme hodnoty x_5 a p_5; b) disperziu a modus náhodnej premennej X; c) $P(2 \leqq X < 4)$ a $P(1 < X \leqq 9)$.

[a) $x_5 = 7$, $p_5 = 0{,}15$; b) $D(X) = 2{,}46$; $\mathcal{M}o(X) = 4$; c) 0,4; 0,95]

8.2. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty maximálneho počtu hodených bodov na dvoch hracích kockách. Určte: a) zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X; b) $E(X)$, $D(X)$ a $\mathcal{M}o(X)$.

[a)

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

; b) 4,4722; 1,9715; 6]

8.3. V krúžku je 21 študentov, z ktorých jedna tretina študuje s vyznamenaním. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu vyznamenaných študentov medzi piatimi náhodne vybranými študentmi. Určte: a) rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X; b) $E(X)$, $D(X)$ a $\mathcal{M}o(X)$.

[a)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,0984	0,3443	0,3756	0,1565	0,0241	0,0010

; b) 1,6667; 0,8889; 2]

8.4. Terč tvorí kruh K a dve medzikružia M_1 a M_2. Zásah do kruhu K znamená 10 bodov, zásah do medzikružia M_1 5 bodov a do M_2 znamená -1 bod. Pravdepodobnosť zásahu kruhu K je 0,5 a pre M_1, resp. M_2 sú pravdepodobnosti zásahu 0,3, resp. 0,2. Určte: a) rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X, ktorá nadobúda hodnoty súčtu dosiahnutých bodov pri troch nezávislých výstreloch na terč; b) $E(X)$ a $D(X)$.

[a)

x_i	-3	3	8	9	14	15	19	20	25	30
p_i	0,008	0,036	0,06	0,054	0,18	0,027	0,15	0,135	0,225	0,125

;

b) 18,9; 54,03.]

8.5. Pravdepodobnosť zhotovenia štandardnej súčiastky je 0,9. Z vyrobenej série súčiastok kontrolór vyberá postupne súčiastky a kontroluje ich kvalitu. Ak je súčiastka kvalitná, kontrolór vyberie ďalšiu, ale vyberie najviac 5 súčiastok. Ak kontrolovaná súčiastka nezodpovedá štandardu, kontrola sa zastaví a séria sa vyradí. Určte: a) rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X, ktorá nadobúda hodnoty počtu kontrolovaných súčiastok; b) predpis distribučnej funkcie náhodnej premennej X; c) pravdepodobnosť toho, že budú kontrolované aspoň tri súčiastky; d) strednú hodnotu, disperziu a modus náhodnej premennej X.

$$\left[\begin{array}{l}\text{a)}\ \begin{array}{c||c|c|c|c|c} x_i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline p_i & 0{,}1 & 0{,}09 & 0{,}081 & 0{,}0729 & 0{,}6561 \end{array}; \\ \text{b)}\ F(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x < 1, \\ 0{,}1, & \text{pre } 1 \leqq x < 2, \\ 0{,}19, & \text{pre } 2 \leqq x < 3, \\ 0{,}271, & \text{pre } 3 \leqq x < 4, \\ 0{,}3439, & \text{pre } 4 \leqq x < 5, \\ 1 & \text{pre } 5 \leqq x; \end{cases} \quad \text{c) } 0{,}81 \text{ d) } 4{,}0951;\ 1{,}9881;\ 5 \end{array}\right]$$

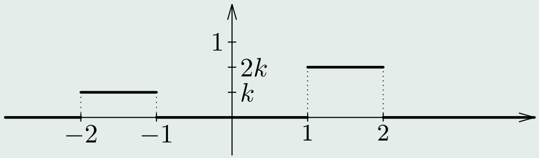
8.6. Daná je funkcia $F(x) = \begin{cases} a & \text{pre } x < -4 \\ bx + c & \text{pre } x \in \langle -4; 2\rangle \\ d & \text{pre } x > 2. \end{cases}$ Stanovte: a) pre aké hodnoty a, b, c, $d \in R$ je F distribučnou funkciu náhodnej premennej X; b) hustotu pravdepodobnosti náhodnej premennej X; c) $E(X)$, $D(X)$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{a) } a = 0,\ b = \frac{1}{6},\ c = \frac{2}{3},\ d = 1; \\ \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{pre } x \in (-4, 2) \\ 0 & \text{pre } x \notin (-4, 2); \end{cases} \quad \text{c) } -1;\ 3 \end{array}\right]$$

8.7. Daná je funkcia $f(x) = \begin{cases} k \cdot (4x - x^3) & \text{pre } x \in (0; 2) \\ 0 & \text{pre } x \notin (0; 2). \end{cases}$ Určte: a) pre akú hodnotu $k \in R$ je f hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej X; b) distribučnú funkciu náhodnej premennej X; c) $E(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 \leqq X < E(X))$ a $P(D(X) < X \leqq 3)$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{a) } k = \frac{1}{4};\ \text{b) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 0 \\ \frac{8x^2 - x^4}{16} & \text{pre } x \in \langle 0; 2\rangle \\ 1 & \text{pre } x > 2; \end{cases} \\ \text{c) } \frac{16}{15};\ \frac{2\sqrt{11}}{15};\ 0,0505; 0,9810 \end{array}\right]$$

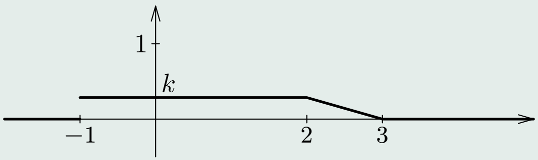
8.8. Na obr. 8.7 je znázornený graf funkcie f. Určte: a) konštantu k, pre ktorú je funkcia



Obr. 8.7

f hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej X; b) $E(X)$ a $D(X)$. [a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; $\frac{25}{12}$]

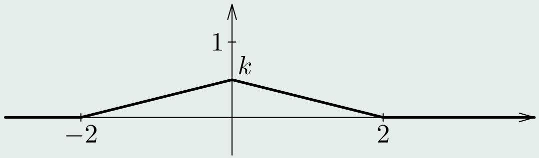
8.9. Na obr. 8.8 je znázornený graf funkcie f. Určte: a) konštantu k, pre ktorú je funkcia f hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej X; b) $E(X)$ a $D(X)$. [a) $\frac{2}{7}$; b) $\frac{16}{21}$; $\frac{937}{882}$]



Obr. 8.8

8.10. Na obr. 8.9 je znázornený graf funkcie f. Určte: a) konštantu k, pre ktorú je funkcia f hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej X; b) $E(X)$ a $D(X)$; c) koeficient asymetrie a koeficient špicatosti náhodnej premennej X. [a) $\frac{1}{2}$; b) 0; $\frac{2}{15}$; c) 0; $\frac{39}{7}$]

8.11. Daná je funkcia $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^5} & \text{pre } x \geqq 1 \\ 0 & \text{pre } x < 1. \end{cases}$ Určte: a) pre akú hodnotu $k \in R$ je f hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej X; b) distribučnú funkciu náhodnej



Obr. 8.9

premennej X; c) $E(X)$, $\sigma(X)$, $P(D(X) \leqq X < 2)$.

$$\left[\text{a) } k = 4;\text{ b) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 1 \\ \frac{x^4-1}{x^4} & \text{pre } x \geqq 1; \end{cases} \quad \text{c)} \frac{4}{3};\ \frac{\sqrt{2}}{3};,\ \frac{15}{16}\right]$$

9. Niektoré rozdelenia pravdepodobnosti

V tejto kapitole uvedieme istý základný výber rozdelení pravdepodobností konkrétnych náhodných premenných. Tieto rozdelenia pravdepodobnosti, snáď okrem normálneho rozdelenia, môžu poslúžiť čiteteľovi ako vhodné úlohy na samostatné overenie ich vlastností. Pripomíname, že zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej je stanovený buď jej distribučnou funkciou alebo hustotou pravdepodobnosti pri spojitej a pravdepodobnostnou tabuľkou (ktorá obsahuje obor hodnôt náhodnej premennej a pravdepodobnosti s akými ich nadobúda) pri diskrétnej náhodnej premennej. My budeme využívať druhú možnosť. Po zadefinovaní náhodnej premennej uvedieme jej číselné charakteristiky a možnosti použitia v praxi.

9.1. Diskrétne náhodné premenné

Odporúčame čitateľovi, aby si zopakoval základné všeobecné vlastnosti diskrétnej náhodnej premennej. Pri konkrétnych rozdeleniach skúste nakresliť graf príslušnej distribučnej funkcie (pripomíname, že má schodkovitý charakter).

9.1.1. Diskrétne rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti

Vstupy: $\mathcal{H}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, t. j. n navzájom rôznych reálnych čísel x_i.

Definícia 9.1. Náhodná premenná X má **diskrétne rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti** práve vtedy, keď
1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;
2. $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Náhodná premenná X má teda rovnomerné diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti práve vtedy, ak každá z jej n možných hodnôt je rovnako pravdepodobná (typický príklad je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty padnutého čísla pri jednom hode hracou kockou, tu je $n = 6$).

Odporúčame čitateľovi nakresliť si graf príslušnej distribučnej funkcie a premyslieť si výpočet číselných charakteristík, napr.

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{a} \qquad D(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2.$$

Normalizačnú podmienku (8.3) ľahko overíme:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

9.1.2. Binomické rozdelenie pravdepodobnosti

Vstupy: Prirodzené číslo n a reálne číslo $p \in (0, 1)$.

Definícia 9.2. Náhodná premenná X má **binomické rozdelenie pravdopodobnosti s parametrami n a p** práve vtedy, keď
1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$;

2. $$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ pre každé } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}. \tag{9.1}$$

Používame pritom označenie $X \sim bino(n; p)$.

Keď porovnáme (9.1) s (7.17), tak zistíme, že binomické rozdelenie úzko súvisí s n-krát opakovanými nezávislými pokusmi, pričom druhý vstup p je pravdepodobnosť nastatia konkrétneho javu v jednom pokuse. Je teda aj opodstatnené konvenčné označenie $q = 1-p$. Na základe (7.18) platí normalizačná podmienka (8.3).

Veta 9.1. Ak $X \sim bino(n;p)$, tak

$$E(X) = n \cdot p, \qquad D(X) = n \cdot p \cdot q \quad \text{a} \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}. \tag{9.2}$$

Naviac:

$$\mathcal{M}o(X) = k_0 \in \langle np - q,\ np + p\rangle. \tag{9.3}$$

Dôkaz. Na ukážku dokážeme, že $E(X) = n \cdot p$:

$$E(X) = \sum x_i p_i = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-x+1)}{x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \cdot p^x q^{n-x}.$$

Substitúciou $t = x - 1$ a úpravou dostaneme

$$E(X) = n \cdot p \cdot \sum_{t=0}^{n-1} x \cdot \binom{n-1}{t} p^x q^{(n-1)-t} = n \cdot p \cdot (p+q)^{n-1} = n \cdot p.$$

□

(9.3) zrejme vyplýva z (7.19).

Príklad 9.1. 33 žiaroviek je paralelne zapojených do obvodu, pričom je známe, že každá z nich je s pravdepodobnosťou 0,1 chybná. Určme pravdepodobnosť toho, že z týchto žiaroviek je a) viac chybných ako by sme mohli v priemere očakávať; b) menej chybných ako by sme mohli s najväčšou pravdepodobnosťou očakávať.

Riešenie. a) Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu chybných žiaroviek. Zrejme $X \sim bino(33; 0,1)$. V priemere môžeme očakávať $E(X) = n \cdot p = 33 \cdot 0{,}1 =$

$= 3{,}3$ chybných žiaroviek. Teda

$$P(X > E(X)) = P(X > 3{,}3) = P(X \geqq 4) = \sum_{x=4}^{33} \binom{33}{x} 0{,}1^x 0{,}9^{33-x} \approx 0{,}4231,$$

pričom posledný výpočet v MATLABe získame funkciou $sum(binopdf(4{:}33, 33, 0.1))$.
b) Počet chybných žiaroviek, ktorý môžeme s najväčšou pravdepodobnosťou očakávať, je modusom náhodnej premennej X. Podľa (9.3) je $\mathcal{M}o(X) \in \langle 33 \cdot 0{,}1 - 0{,}9,\ 33 \cdot 0{,}1 + 0{,}1\rangle = \langle 2{,}4\,; 3{,}4\rangle$, a teda $\mathcal{M}o(X) = 3$. Teda

$$P(X < \mathcal{M}o(X)) = P(X < 3) = P(X \leqq 2) = F(2) \approx 0{,}3457,$$

kde F je distribučná funkcia náhodnej premennej X (v MATLABe využijeme buď funkciu $binocdf(2, 33, 0.1)$ alebo $sum(binopdf(0 : 2, 33, 0.1))$.

9.1.3. Hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti

Vstupy: Tri prirodzené čísla M, K, N, kde $N \leqq M$ a $K \leqq M$.

Definícia 9.3. Náhodná premenná X má **hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami M, K a N** práve vtedy, keď
1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{\max\{0,\ K - M + N\}, \dots, \min\{K, N\}\}$;

2. $$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}} \text{ pre každé } x \in \mathcal{H}(X). \tag{9.4}$$

Používame pritom označenie $X \sim hyge(M, K, N)$.

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
Strana 145 z 261
Späť
Celá strana
Zatvoriť
Koniec

Toto rozdelenie pravdopodobnosti charakterizuje model, v ktorom je daný súbor M objektov, pričom K z nich má určitú vlastnosť a ostatných $M - K$ túto vlastnosť nemá. Ak z tohto súboru bez vrátenia náhodne vyberieme N objektov, tak (9.4) nám poskytuje pravdepodobnosť toho, že medzi vybratými bude práve x objektov mať uvažovanú vlastnosť. Odporúčame zopakovať si riešené úlohy využívajúce rovnosť (7.5). Všimnite si, že usporiadanie vstupov v označení $hyge(M, K, N)$ je v súlade s chronológiou predchádzajúceho výkladu. Požiadavky, ktoré sú kladené na x, M, K, N majú svoju logiku ako z hľadiska prezentovaného modelu, tak aj z hľadiska existencie kombinačných čísel v (9.4) (preto sa netrápte so zápisom oboru hodnôt, ktorý na prvý pohľad by mohol niekoho odradiť).

Pre zaujímavosť uvádzame bez dôkazu dve číselné charakteristiky:

Veta 9.2. Ak $X \sim hyge(M, K, N)$, tak

$$E(X) = N \cdot \frac{K}{M} \quad \text{a} \quad D(X) = \frac{(M-N) \cdot N \cdot K}{(M-1) \cdot M} \left(1 - \frac{K}{M}\right). \tag{9.5}$$

Poznámka 9.1. V literatúre sa používajú rôzne označenia pre vstupy. My sme sa priklonili k označeniu M, K, N, ktoré je použité v MATLABe.

9.1.4. Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti

Vstup: Reálne číslo $\lambda > 0$.

Definícia 9.4. Náhodná premenná X má **Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ** práve vtedy, keď
1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, \dots\} = N \cup \{0\}$;

2. $$P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!} \text{ pre každé } x \in N \cup \{0\}. \tag{9.6}$$

Používame pritom označenie $X \sim poiss(\lambda)$.

Táto diskrétna náhodná premenná má nekonečný počet možných hodnôt. Ukážeme, že ide naozaj o náhodnú premennú: pravdepodobnosti (9.6) sú evidentne kladné a keďže

$$\sum p_i = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \left(\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \right) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda} = 1,$$

tak je splnená aj normalizačná podmienka (tu sme použili Taylorov rozvoj výrazu e^{λ} so stredom 0).

Veta 9.3. Ak $X \sim poiss(\lambda)$, tak

$$E(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda \quad \text{a} \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{9.7}$$

Dôkaz. Dokážeme, že $E(X) = \lambda$:

$$E(X) = \sum x_i p_i = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x \cdot \lambda \cdot \lambda^{x-1}}{x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

Po krátení x a substitúcii $t = x - 1$ dostaneme

$$E(X) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\lambda^t}{t!} = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda.$$

□

Poznámka 9.2. S týmto rozdelením pravdepodobnosti sa najčastejšie stretávame pri sledovaní počtu výskytov istého javu A v priebehu konkrétneho časového úseku (napr. počet impulzov, zákazníkov, zrážok častíc, telefónnych hovorov …). Predpokladá sa, že

1. jav A je výsledkom opakovaného systému nezávislých pokusov;

2. priemerný počet výskytov javu A je priamo úmerný dĺžke časového úseku, t. j. napr. ak sa za hodinu vyskytne v priemere 150-krát, tak za minútu sa vyskytne v priemere 2,5-krát.

Všimnime si, že vstupná hodnota λ je strednou hodnotou tejto náhodnej premennej (pozri (9.7)) a teda určuje jej priemernú hodnotu.

Príklad 9.2. Internetovskú stránku navštívi za sledované obdobie počas jednej hodiny v priemere 30 záujemcov (mlčky predpokladáme, že ich návštevy sú nezávislé). Určme:
I. pravdepodobnosť toho, že v priebehu štyroch minút navštívi túto stránku: a) jeden návštevník; b) aspoň jeden návštevník; c) nie menej než traja a menej ako jedenásti návštevníci;
II. a) pravdepodobnosť najpravdepodobnejšieho počtu návštev stránky počas štyroch minút; b) minimálny počet návštev stránky počas dvadsiatich minút, ktorý nebude väčší s pravdepodobnosťou aspoň 0,99.

Riešenie. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu návštev internetovskej stránky v priebehu štyroch minút. Jej stredná (t. j. priemerná) hodnota je $\lambda = \frac{30}{60} \cdot 4 = 2$. (pozri predchádzajúcu poznámku a (9.7)).
Ia) Podľa (9.6) máme

$$P(X = 1) = \frac{2^1 \cdot \mathrm{e}^{-2}}{1!} \approx 0{,}2707.$$

Ib) Tu je výhodnejšie použiť opačný jav:

$$P(X \geqq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{2^0 \cdot \mathrm{e}^{-2}}{0!} \approx 0{,}8647.$$

Ic) Potrebujeme vypočítať $P(3 \leqq X < 11)$:

$$P(3 \leqq X < 11) = \sum_{x=3}^{10} P(X = x) = \sum_{x=3}^{10} \frac{2^x \cdot \mathrm{e}^{-2}}{x!} \approx 0{,}3233.$$

IIa) Je potrebné vypočítať pravdepodobnosť modusu náhodnej premennej X, ale v predchádzajúcom texte sme jej modus neuviedli (skúste o ňom porozmýšľať). Ľahko získame napr. prvých šesť hodnôt $P(X = x)$ pre $x = 0, 1, 2, \ldots 5$ podľa (9.6) alebo v MATLABe pomocou *poisspdf* $(0:5, 2)$:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361

Pre $x > 2$ pravdepodobnosti $P(X = x)$ budú klesať (viete to zdôvodniť?), čo znamená, že naša náhodná premenná má dva modusy: $\mathcal{M}o(X)) \in \{1, 2\}$ a požadovaná pravdepodobnosť je 0,2707 (viď tabuľka).

IIb) Nech Y je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu návštev internetovskej stránky v priebehu dvadsiatich minút. Overte, že jej stredná hodnota je $\lambda = 10$. V úlohe požadujeme nájsť také minimálne n, pre ktoré platí $P(Y \leqq n) \geqq 0{,}99$. Menej efektívny prístup by mohol spočívať v tom, že by sme v analogickej tabuľke ako v časti IIa) zistili, kedy súčet príslušných pravdepodobností (pre $x = 0$, 1 ,2, $\ldots$) dosiahne prvýkrát hodnotu aspoň 0,99. Tento postup by pre veľké výsledné n bol prácny. Všimnime si, že ak F je distribučná funkcia náhodnej premennej Y, tak poslednú nerovnosť môžeme zapísať v tvare $P(Y \leqq n) = F(n) \geqq 0{,}99$. Minimálnu hodnotu n, ktorá jej vyhovuje, môžeme získať v MATLABe pomocou $poissinv(0.99, 10)$. Dostaneme $n = 18$.

Premyslite si, či nasledujúcim výpočtom sme urobili skúšku správnosti získaného výsledku:

$$P(Y \leqq 17) = \sum_{x=0}^{17} \frac{10^x \cdot \mathrm{e}^{-10}}{x!} = F(17) = \mathit{poiscdf}\,(17, 10) \approx 0{,}9857,$$

$$P(Y \leqq 18) = \sum_{x=0}^{18} \frac{10^x \cdot \mathrm{e}^{-10}}{x!} = F(18) = \mathit{poiscdf}\,(18, 10) \approx 0{,}9928.$$

9.2. Spojité náhodné premenné

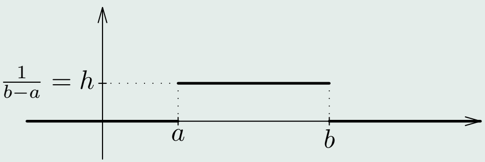
9.2.1. Spojité rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti

Vstup: Interval $\langle a, b\rangle$ konečnej dĺžky (nemusí byť uzavretý).

Definícia 9.5. Náhodná premenná X má **spojité rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti na intervale $\langle a, b\rangle$** práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom

$$f(x) = \begin{cases} h & \text{pre } x \in \langle a, b\rangle, \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle a, b\rangle, \end{cases} \tag{9.8}$$

pre nejaké $h \in R$. Používame pritom označenie $X \sim unif(a; b)$.



Obr. 9.1

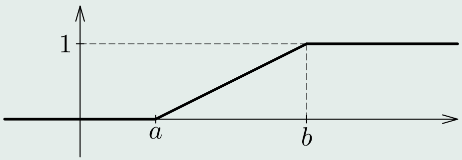
Graf hustoty pravdepodobnosti (9.8) je znázornený na obr. 9.1. Z vety ľahko zistíme, že $0 < h = \frac{1}{b-a}$. (všimnite si (8.5) – obsah obdĺžnika „nad intervalom $\langle a, b\rangle$“ je rovný jednej). Za jednoduché cvičenie považujeme nájdenie predpisu pre distribučnú funkciu F: z (8.4) máme

$$\text{– pre } x \in (-\infty, a): \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0;$$

$$– \text{ pre } x \in \langle a, b \rangle : \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0 \, \mathrm{d}t + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}t = \frac{x-a}{b-a};$$

$$– \text{ pre } x \in (b, \infty) : \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0 \, \mathrm{d}t + \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}t + \int\limits_{b}^{x} 0 \, \mathrm{d}t = 1.$$

Graf tejto funkcie je znázornený na obr. 9.2.



Obr. 9.2

Poznámka 9.3. Rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti (prívlastok „spojité“ sa obyčajne vynecháva) má náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty len na konkrétnom intervale konečnej dĺžky, pričom pravdepodobnosť toho, že jej hodnota sa vyskytne v ľubovoľnom podintervale tohto intervalu, je priamo úmerná dĺžke podintervalu. Tento fakt sa zvykne formulovať aj takto: „všetky hodnoty náhodnej premennej z daného intervalu sú rovnako pravdepodobné“.

Skúste sa presvedčiť o svojich schopnostiach a dokážte, že platí:

Veta 9.4. Ak $X \sim unif(a, b)$, tak

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{a} \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2 \cdot \sqrt{3}} \approx 0{,}2887 \cdot (b-a). \tag{9.9}$$

Príklad 9.3. Na elektrickom vedení dĺžky L môže na každom mieste dôjsť k poruche s rovnakou pravdepodobnosťou. Vypočítajme pravdepodobnosť toho, že dôjde k poruche na jeho ľubovoľnom úseku dĺžky ℓ, kde $\ell \leqq L$.

Riešenie. Elektrické vedenie môžeme „uložiť" na interval $\langle a, b\rangle = \langle 0, L\rangle$. Teda $b - a = L$. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty z intervalu $\langle 0, L\rangle$, ktoré udávajú miesto poruchy. Podľa vyššie uvedenej poznámky môžeme úsek dĺžky ℓ „uložiť" napr. na interval $\langle 0, \ell\rangle$. Porucha nastane na skúmanom úseku práve vtedy, keď $0 \leqq X \leqq \ell$. Takto z (8.6) a (9.8) dostaneme

$$P(0 \leqq X \leqq \ell) = \int_0^\ell \frac{1}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{\ell}{L}.$$

9.2.2. Exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti

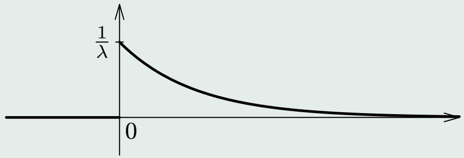
Vstup: Kladné reálne číslo λ.

Definícia 9.6. Náhodná premenná X má **exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ** práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geqq 0, \\ 0 & \text{pre } x < 0. \end{cases} \tag{9.10}$$

Používame pritom označenie $X \sim exp(\lambda)$.

Graf hustoty (9.10) je na obr. 9.3. Ukážeme, že naozaj ide o hustotu pravdepodobnosti:



Obr. 9.3

je evidentné, že $f \geqq 0$ pre každé $x \in R$. Overíme normalizačnú podmienku (8.5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}\,\mathrm{d}x = 0 + \left[\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}\right]_0^{\infty} = 1,$$

lebo $\lambda > 0$ (platilo by to aj pre $\lambda \leqq 0$?). Je teda splnená aj normalizačná podmienka, a preto (9.10) je hustotou pravdepodobnosti.

Overte, že (analogickým postupom ako pri rovnomernom rozdelení) predpis pre príslušnú distribučnú funkciu je (graf je na obr. 9.4):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geqq 0. \end{cases} \tag{9.11}$$

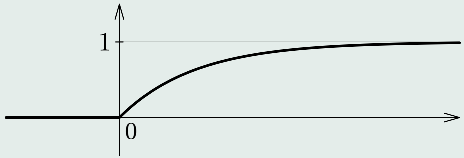
Integrovaním metódou per partes a pomocou l'Hospitalovho pravidla dostaneme:

Veta 9.5. Ak $X \sim exp(\lambda)$, tak

$$E(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda^2 \quad \text{a} \quad \sigma(X) = \lambda. \tag{9.12}$$

Poznámka 9.4.

1. S exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti úzko súvisí problematika životnosti zariadení, určovanie záručnej lehoty na výrobok atď.



Obr. 9.4

2. Podľa (9.12) je $E(X) = \lambda > 0$. Potom na základe (8.6) a (9.11) dostaneme: $P(E(X) \leqq X) = P(\lambda \leqq X < \infty) = F(\infty) - F(\lambda) = 0 - (1 - \mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}3679$, t. j. pravdepodobnosť toho, že náhodná premenná (s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti) nebude menšia než jej stredná hodnota je vždy rovná konštante e^{-1}.

Príklad 9.4. Doba životnosti výrobku má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti so strednou hodnotou 200 hodín. Určme: a) pravdepodobnosť toho, že výrobok bude funkčný aspoň 300 hodín; b) pravdepodobnosť toho, že výrobok nebude funkčný dlhšie ako je jeho priemerná doba životnosti; c) maximálnu záručnú dobu z, ktorú chce poskytnúť jeho výrobca, ak pripúšťa maximálne 5 percent reklamačných výrobkov.

Riešenie. Nech T je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty životnosti výrobku. T má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti, a preto $E(T) = 200 = \lambda$ a $X \sim exp(200)$.
a) Chceme vypočítať $P(T \geqq 300)$. Uvádzame jeden z možných postupov:

$$P(T \geqq 300) = 1 - P(T < 300) = 1 - P(T \leqq 300) = 1 - F(300) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-1{,}5}\right) \approx 0{,}2231$$

(druhá rovnosť platí vo všeobecnosti len pre spojitú náhodnú premennú).
b) Priemerná doba životnosti výrobku je vlastne strednou hodnotou náhodnej premennej T. Takto podľa druhej časti poznámky dostaneme: $P(T \leqq E(T)) = P(T \leqq 200) = F(200) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}6321$.

c) Je potrebné určiť také maximálne z, aby platila nerovnosť $P(T \leqq z) \leqq 0{,}05$, čo vzhľadom na to, že pre distribučnú funkciu máme $P(T \leqq z) = F(z)$, dáva $F(z) \geqq 0{,}05$. Odtiaľto z môžeme určiť na základe (9.11) alebo v MATLABe pomocou $expinv(0.05, 200)$. Dostaneme, že z je nanajvýš 10,2587 hodín. Výrobca by asi dal záruku na 10 hodín.

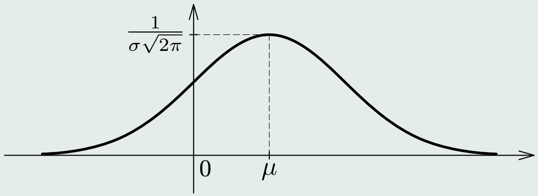
9.2.3. Normálne (Gaussovo) rozdelenie pravdepodobnosti

Vstupy: Dve reálne čísla μ a $\sigma > 0$.

Definícia 9.7. Náhodná premenná X má **normálne (Gaussovo) rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami μ a $\sigma > 0$** práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{pre každé } x \in R. \tag{9.13}$$

Používame pritom označenie $X \sim norm(\mu, \sigma)$ alebo $X \sim N(\mu, \sigma)$.



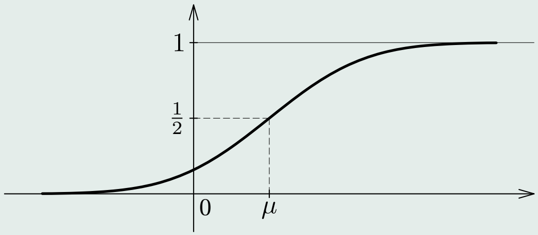
Obr. 9.5

Graf hustoty (9.13) je znázornený na obr. 9.5. Nezápornosť tejto funkcie je evidentná, ale overenie normalizačnej podmienky (8.5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \text{pre každé } \mu \text{ a } \sigma > 0 \tag{9.14}$$

naráža na problém, ktorý spočíva v tom, že primitívna funkcia (teda aj integrál) k funkcii (9.13) nie je elementárna funkcia (záujemca si môže nájsť overenie normalizačnej podmienky v odporúčanej literatúre). Z rovnakého dôvodu sa musíme uspokojiť s týmto predpisom pre distribučnú funkciu (graf je na obr. 9.6):

$$F(x) = P(X \leqq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{pre každé } x \in R. \tag{9.15}$$



Obr. 9.6

Výpočet týchto funkčných hodnôt si ozrejmíme neskôr.[1]

Bez väčších problémov by sme mohli dokázať, že platí:

[1]V MATLABe získame hodnotu $F(x)$ pomocou $normcdf(x,\mu,\sigma)$

Veta 9.6. Ak $X \sim norm(\mu, \sigma)$, tak

$$E(X) = \mu, \qquad D(X) = \sigma^2 \quad \text{a} \quad \sigma(X) = \sigma. \tag{9.16}$$

Teda pre $X \sim norm(\mu, \sigma)$ je vstupný parameter μ strednou hodnotou a parameter σ smerodajnou odchýlkou náhodnej premennej X.

Normovaním náhodnej premennej $X \sim norm(\mu, \sigma)$ podľa vety dostaneme náhodnú premennú

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

so strednou hodnotou $E(Y) = 0$ a disperziou $D(Y) = 1$, ináč povedané $Y \sim norm(0, 1)$. Hustota pravdepodobnosti φ náhodnej premennej Y je zrejme daná predpisom

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \qquad \text{pre každé } y \in R \tag{9.17}$$

a jej distribučná funkcia Φ predpisom[2]

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{pre každé } y \in R \tag{9.18}$$

(nakreslite grafy týchto funkcií). Číslo $\Phi(y)$[3] určuje obsah vyšrafovaného útvaru na obr. 9.7.

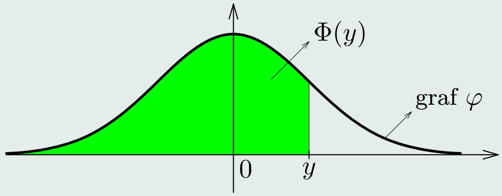
Funkcia φ je párna a platí pre ňu normalizačná podmienka (8.5). Odtiaľ dostaneme pre distribučnú funkciu Φ užitočnú informáciu:

$$\Phi(-y) = 1 - \Phi(y) \quad \text{pre každé } y \in R, \quad \left(\text{špeciálne } \Phi(0) = \frac{1}{2}\right). \tag{9.19}$$

---

[2]Funkcia Φ súvisí s tzv. **chybovou funkciou** (error function) $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$.

[3]V MATLABe získame hodnotu $\Phi(y)$ pomocou *normcdf*$(y, 0, 1)$ alebo *normcdf*(y)



Obr. 9.7

Po substitúcii $u = \frac{t-\mu}{\sigma}$ môžeme (9.15) zapísať v tvare

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{9.20}$$

Veta 9.7. Ak $X \sim norm(\mu, \sigma)$, tak pre ľubovoľné $a < b$ platí

$$\begin{aligned} P(a < X \leqq b) &= P(a \leqq X \leqq b) = P(a \leqq X < b) = \\ &= P(a < X < b) = \Phi\left(\tfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{a-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned} \tag{9.21}$$

Dôkaz. Keďže ide o spojitú náhodnú premennú, tak prvé tri rovnosti platia na základe (8.7). Zo vzťahu (8.6) je $P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a)$, čo vzhľadom na (9.20) dáva požadovanú rovnosť (9.21). □

Veta 9.8. Ak $X \sim norm(\mu, \sigma)$, tak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí

$$P(|X-\mu| < \varepsilon) = P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big) - 1, \tag{9.22}$$

špeciálne pre $\varepsilon = 3\sigma$ je

$$P(|X-\mu| < 3\sigma) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 2 \cdot \Phi(3) - 1 \approx 0{,}9973 \tag{9.23}$$

Dôkaz. Aplikujme predchádzajúcu vetu pre $a = \mu - \varepsilon$ a $b = \mu + \varepsilon$:

$$P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) = \Phi\Big(\frac{\mu + \varepsilon - \mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{\mu - \varepsilon - \mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big).$$

Ak tu pre $y = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ použijeme (9.19), tak dostaneme

$$P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) = \Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big) - \Big[1 - \Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big)\Big] = 2 \cdot \Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big) - 1,$$

čo je (9.22). Odtiaľ rovnosť (9.23) je triviálna. K výslednej pravdepodobnosti potrebujeme poznať hodnotu $\Phi(3)$ – získame ju buď z tabuľky funkčných hodnôt funkcie Φ (je štandardnou prílohou bežnej literatúry) alebo v MATLABe pomocou *normcdf* (3). □

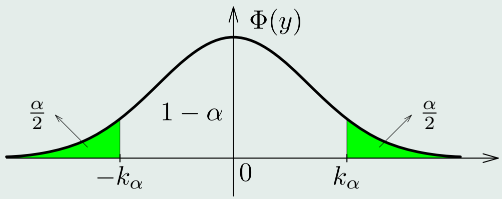
Poznámka 9.5. Pomocou (9.23) sa v praxi zvykne takto formulovať tzv. **pravidlo troch sigma**: v rozpätí (intervale) $\mu \pm 3\sigma$ ležia takmer všetky hodnoty (presnejšie $99,73\,\%$) náhodnej premennej $X \sim norm(\mu, \sigma)$.

Predpokladajme, že Y je náhodná premenná, ktorá má normované normálne rozdelenie pravdepodobnosti, t. j. $Y \sim norm(0, 1)$ s distribučnou funkciou (9.18). Nech $\alpha \in (0, 1)$ je dané reálne číslo. Skúmajme existenciu takého čísla k_α, pre ktoré platí[4]

$$P(|Y| > k_\alpha) = \alpha. \tag{9.24}$$

[4]Modifikácia tejto úlohy súvisí s pojmom kvantil, ktorý je definovaný pri intervalových odhadoch parametrov.

(grafický význam tejto rovnosti je znázornený na obr. 9.8).



Obr. 9.8

Pomocou opačného javu môžeme (9.24) zapísať v tvare

$$P(-k_\alpha \leqq Y \leqq k_\alpha) = 1 - \alpha \tag{9.25}$$

a keďže ide o spojitú náhodnú premennú, tak z (9.22) dostaneme ($\mu = 0$ a $\sigma = 1$)

$$P(-k_\alpha \leqq Y \leqq k_\alpha) = 2 \cdot \Phi(k_\alpha) - 1.$$

Z posledných dvoch rovností je $1 - \alpha = 2 \cdot \Phi(k_\alpha) - 1$. Jednoduchým výpočtom získame $\Phi(k_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, čo znamená, že

$$k_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \tag{9.26}$$

kde Φ^{-1} je inverzná funkcia k distribučnej funkcii (9.18). V matematickej štatistike sa k_α zvykne označovať takto

$$k_\alpha = y_{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{9.27}$$

Príklad 9.5. Hmotnosť vyrábaného závažia má normálne rozdelenie pravdepodobnosti so stredou hodnotou 10 g, pričom výrobca uvádza jej smerodajnú odchýlku 0,02 g. Určme pravdepodobnosť toho, že náhodne kúpené závažie bude mať skutočnú hmotnosť a) väčšiu než 10,03 g; b) menšiu ako 9,99 g; c) aspoň 10 g a nie viac ako 10,05 g.

Riešenie. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty skutočnej hmotnosti zakúpeného závažia. Zrejme $X \sim norm(10, 0.02)$.
a) Chceme určiť $P(X > 10{,}03)$. Podľa predchádzajúceho výkladu skúste zdôvodniť každú z nasledujúcich rovností:

$$P(X > 10{,}03) = 1 - P(X \leqq 10{,}03) = 1 - F(10{,}03) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{10{,}03 - 10}{0{,}02}\right) = 1 - \Phi(1{,}5) \approx 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668,$$

kde hodnotu $\Phi(1{,}5)$ sme získali v MATLABe pomocou $normcdf(1.5)$.
b) Hľadáme $P(X < 9{,}99)$. Obdobne ako v a) je

$$P(X < 9{,}99) = P(X \leqq 9{,}99) = F(9{,}99) \approx 0{,}3085,$$

kde tentoraz sme $F(9{,}99)$ určili pomocou $normcdf(9.99, 10, 0.02)$.
c) Podľa (9.21) je

$$P(10 \leqq X \leqq 10{,}05) = \Phi\left(\frac{10{,}05 - 10}{0{,}02}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 10}{0{,}02}\right) =$$

$$= \Phi(2{,}5) - \Phi(0) \approx 0{,}4938,$$

kde $\Phi(2{,}5) = normcdf(2.5) = 0{,}9938$ a $\Phi(0) = 0{,}5$.

Príklad 9.6. Meranie voltmetrom je zaťažené systematickou chybou 5 V a náhodné chyby majú normálne rozdelenie pravdepodobnosti so smerodajnou odchýlkou 2 V. Vykonáme na ňom jedno meranie. S akou pravdepodobnosťou sa bude líšiť chyba nameranej hodnoty o 1 V od a) strednej hodnoty očakávanej chyby; b) skutočnej meranej hodnoty? c) Aká môže byť s pravdepodobnosťou 0,99 maximálna odchýlka chyby merania od jej strednej hodnoty?

Riešenie. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty chyby pri jednom meraní daným voltmetrom. Systematická chyba je vlastne priemerná chyba t. j. $\mu = 5$. Keďže

$\sigma = 2$, tak $X \sim norm(5, 2)$.
a) Počítame $P(|X - 5| < 1)$. Z (9.22) je pre $\varepsilon = 1$:

$$P(|X - 5| < 1) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \approx 0{,}3829,$$

b) Teraz chceme vypočítať $P(|X| < 1)$. Máme

$$P(|X| < 1) = P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) \approx 0{,}0215,$$

kde $F(1) = normcdf(1, 5, 2) \approx 0{,}0228$ a $F(-1) = normcdf(-1, 5, 2) \approx 0{,}0013$,
c) Zrejme chceme nájsť také ε, pre ktoré bude $P(|X - \mu| < \varepsilon) = 0{,}99$. Z (9.22) dostaneme

$$P(|X - \mu| < \varepsilon) = P(|X - 5| < \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - 1 = 0{,}99,$$

odtiaľ

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0{,}995 \quad \text{čo znamená, že} \quad \varepsilon = 2 \cdot \Phi^{-1}(0{,}995) \approx 5{,}1517,$$

kde hodnotu $\Phi^{-1}(0{,}995)$ dostaneme v MATLABe volaním funkcie $norminv(0.995) \approx 2{,}58$.

Úlohy

9.1. Veľkoobchodný sklad zásobuje 25 obchodov. Od každého z nich môže nezávisle od ostatných obchodov prísť v priebehu dňa objednávka s pravdepodobnosťou 0,45. Určte: a) strednú hodnotu a disperziu počtu objednávok za deň; b) najpravdepodobnejší počet objednávok za deň a pravdepodobnosť toho, že príde tento počet objednávok; c) pravdepodobnosť toho, že v priebehu dňa príde aspoň 10 objednávok; d) pravdepodobnosť toho, že v priebehu dňa príde aspoň päť, ale najviac pätnásť objednávok.
[a) $E(X) = 11{,}25$; $D(X) = 6{,}1875$; b) 11; 0,1583; c) 0,7576; d) 0,9537]

9.2. Pravdepodobnosť toho, že pri štyroch nezávislých meraniach rovnakého druhu sa aspoň raz dopustíme chyby väčšej ako je dovolená presnosť, je 0,5904. Určte strednú hodnotu, disperziu a modus počtu tých meraní, pri ktorých sa dopustíme chyby väčšej ako je dovolená presnosť. [$E(X) = 0{,}8$; $D(X) = 0{,}64$; $\mathcal{M}o(X) \in \{0; 1\}$]

9.3. Úspešnosť zásahov cieľa istého športovca dosahuje 85 %. Určte: a) pravdepodobnosť toho, že pri dvadsiatich nezávislých výstreloch zasiahne cieľ najmenej pätnásťkrát; b) najpravdepodobnejší počet zásahov cieľa pri päťdesiatich nezávislých výstreloch.

[a) 0,9327; b) 43]

9.4. Plniaca linka naplní do fľaše viac ako 2 l minerálnej vody s pravdepodobnosťou 0,65. Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi 5 000 nezávisle na sebe naplnenými fľašami a) ani v jednej nie je menej ako 2 l; b) aspoň polovica fliaš obsahuje viac ako 2 l. c) Určte najpravdepodobnejší počet fliaš obsahujúcich viac ako 2 l minerálnej vody. Čomu je rovná táto pravdepodobnosť? [a) ≈ 0; b) ≈ 1; c) 3250; 0,0118]

9.5. Výrobný podnik expedoval zásielku, ktorá obsahovala 100 procesorov. Pravdepodobnosť toho, že sa jeden procesor cestou poškodí je 0,05 (nezávisle od ostatných). Vypočítajte: a) pravdepodobnosť toho, že sa počas prepravy nepoškodí viac ako 10 procesorov; b) strednú hodnotu a disperziu počtu poškodených procesorov počas preprav; c) najpravdepodobnejší počet poškodených procesorov počas prepravy. [a) 0,9885; b) 5; 4,75; c) 5]

9.6. Zo sady 80 výrobkov, medzi ktorými je 12 chybných, náhodne vyberieme na kontrolu kvality osem výrobkov. Určte pravdepodobnosť, že medzi kontrolovanými je a) päť chybných výrobkov; b) aspoň jeden chybný výrobok; c) menej než päť chybných výrobkov. Aký je d) najpravdepodobnejší; e) priemerný počet vybraných chybných výrobkov? [a) 0,0014; b) 0,7450; c) 0,9999; d) jeden; e) 1,2]

9.7. Pravdepodobnosť zásahu atómového jadra časticou v urýchľovači pri jednom pokuse je 0,001. a) Aká je pravdepodobnosť toho, že v 5 000 pokusoch bude jadro zasiahnuté viac než päťkrát a menej než desaťkrát? Úlohu riešte pomocou binomického a Poissonovho rozdelenia pravdepodobnosti a obidva výsledky porovnajte. b) Vypočítajte strednú hodnotu, disperziu a smerodajnú odchýlku počtu zásahov jadra.

[a) 0,35228381100059 $\approx$ 0,35221128786073; b) 5; 4,9950; 2,2349]

9.8. V priebehu jednej hodiny príde na benzínové čerpadlo priemerne 90 zákazníkov. Počet zákazníkov za určitý časový interval sa riadi Poissonovým rozdelením pravdepodobnosti, ktorého parameter λ je priamo úmerný dĺžke intervalu. Určte pravdepodobnosť toho, že a) za 4 minúty prídu: práve dvaja zákazníci; najviac dvaja zákazníci; aspoň dvaja zákazníci; aspoň jeden zákazník; b) behom t minút príde aspoň jeden zákazník. c) Aký najmenší počet zákazníkov nebude počas 4 minút prekročený s pravdepodobnosťou aspoň 0,99?

[a) 0,0446; 0,0620; 0,9826; b) $1 - e^{-1,5\cdot t}$; c) 12]

9.9. Počas jednej hodiny zapojí manipulantka v telefónnej ústredni priemerne 90 hovorov. Určte pravdepodobnosť toho, že počas jej 40 sekundovej neprítomnosti a) nikto nebude volať; b) bude niekto volať; c) budú volať aspoň dvaja účastníci.

[a) 0,3679; b) 0,6321; c) 0,2642]

9.10. Cestujúci môže prísť na zastávku električky v ľubovoľnom okamihu. Určte: a) dĺžku intervalu medzi nasledujúcimi spojmi, ak pravdepodobnosť toho, že cestujúci bude čakať aspoň 4 minúty je 0,6; b) strednú hodnotu a smerodajnú odchýlku doby čakania na spoj (v minútach); c) predpis distribučnej funkcie náhodnej premennej, ktorá nadobúda hodnoty doby čakania na spoj.

$$\left[\text{a) 10; b) 5; 0,8868; c) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leqq 0 \\ \frac{x}{10} & \text{pre } x \in (0;10) \\ 1 & \text{pre } x \geqq 10. \end{cases}\right]$$

9.11. Zariadenie má poruchu v priemere raz za 450 hodín. Doba bezporuchového chodu má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti. Určte: a) pravdepodobnosť toho, že doba bezporuchového chodu zariadenia bude kratšia ako 600 hodín; b) takú hodnotu t, že pravdepodobnosť toho, že doba bezporuchového chodu zariadenia bude dlhšia ako t hodín, je

0,95. [a) 0,7364; b) 23,0820]

9.12. Určitá elektronická súčiastka sa pokazí v záručnej dobe 500 hodín s pravdepodobnosťou 0,1. Určte strednú dobu životnosti tejto súčiastky, ak platí exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti doby jej životnosti. [4 745,6 hodín]

9.13. Doba obsluhy zákazníka má exponenciálne rozdelenie so smerodajnou odchýlkou 5 minút. Aká je pravdepodobnosť toho, že zákazník bude obslúžený do $t \in \{4;\ 8;\ 12;\ 16;\ 20\}$ minút? [0,5507; 0,7981; 0,9093; 0,9592; 0,9817]

9.14. Doba obsluhy zákazníka má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti. Aká má byť stredná hodnota doby obsluhy, aby zákazník bol obslúžený do 10 minút s pravdepodobnosťou $p \in \{0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9\}$? [14,4270; 10,9136; 8,3058; 6,2133; 4,3429]

9.15. Pevnosť v ťahu náhodne vybraného výrobku má normálne rozdelenie pravdepodobnosti so strednou hodnotou 2,4 a disperziou 0,64. Určte pravdepodobnosť toho, že pevnosť v ťahu náhodne vybraného výrobku a) bude menšia ako 2,7; b) bude väčšia ako 2; c) sa nebude líšiť od strednej hodnoty o viac ako 1. Stanovte: d) hornú hranicu pevnosti v ťahu náhodne vybraného výrobku, ktorá nebude prekročená s pravdepodobnosťou 0,95; e) takú hodnotu r, že pravdepodobnosť toho, že sa pevnosť v ťahu náhodne vybraného výrobku nebude líšiť od strednej hodnoty o viac ako r, je 0,5.
[a) 0,6462; b) 0,6915; c) 0,7887; d) 3,7159; e) 0,5396]

9.16. Lietadlo zachováva výšku so systematickou chybou +20 metrov a náhodná chyba je charakterizovaná smerodajnou odchýlkou 25 metrov. Lietadlo má pre svoj let určený koridor vysoký 100 metrov. Aká je pravdepodobnosť toho, že bude letieť mimo koridoru?
[0,1176]

9.17. Pri vážení telesa sme dostali priemernú hmotnosť 2,4 g a smerodajnú odchýlku hmotnosti 0,03 g. Akú odchýlku hmotnosti telesa od priemernej hmotnosti možno zaručiť s pravdepodobnosťou 0,95? [0,0588 g]

9.18. Aká musí byť dĺžka intervalu normy, aby s pravdepodobnosťou 0,0455 bol zhotovený výrobok s kontrolovaným rozmerom mimo normu, ak odchýlky od požadovanej hodnoty majú normálne rozdelenie $N(0,7)$? [28]

9.19. Pri kontrole sa prijímajú všetky výrobky, ktorých dĺžka presahuje 77 cm. Bolo zistené, že stredná hodnota dĺžky výrobku je 75 cm a smerodajná odchýlka 5 cm. Určte pravdepodobnosť toho, že výrobok, ktorý prešiel kontrolou, je dlhší než 80 cm. [0,4604]

9.20. Náhodná premenná X sa riadi normálnym rozdelením pravdepodobnosti $norm(0,\sigma)$. Určte σ, ak platí $P(|X| \leqq 0{,}5) = 0{,}5$. [0,7413]

9.21. Výrobok je vyššej kvality, ak odchýlka jeho sledovaného rozmeru neprekročí hodnotu 2 mm. Náhodné odchýlky rozmeru majú rozdelenie pravdepodobnosti $norm(0,2)$. Určte strednú hodnotu počtu výrobkov vyššej kvality pri nezávislej výrobe $n \in \{10,\ 50,\ 100,\ 500\}$ výrobkov. [7,8870; 39,4350; 78,8700; 394,3502.]

9.22. Chyba merania je náhodnou premennou s rozdelením pravdepodobnosti $norm(0,60)$. Najmenej koľkokrát je potrebné uskutočniť meranie, aby bolo možné s pravdepodobnosťou aspoň 0,9 tvrdiť, že absolútna hodnota chyby merania je menšia ako 7,5 aspoň v jednom prípade? [22]

10. Náhodné vektory

Prechod od jednej náhodnej premennej k **usporiadanému systému náhodných premenných** (alebo **náhodnému vektoru**) je obdobný ako pri pevnej (nenáhodnej) premennej. Náš výklad o náhodných vektoroch bude stručný s cieľom dopracovať sa k pojmu kovariancia a kovariančná matica.

Nech X a Y sú náhodné premenné nad tým istým pravdepodobnostným poľom. Usporiadanú dvojicu (X, Y) nazývame (dvojrozmerným) **náhodným vektorom** (niekedy ju nazývame aj **vektorová náhodná premenná** alebo **systém náhodných premenných**).

Poznámka 10.1. Zovšeobecnenie: usporiadaný systém $X_1, X_2, \ldots, X_n$ náhodných premenných nad tým istým pravdepodobnostným poľom určuje **n-rozmerný náhodný vektor $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$**. V ďalšom texte sa budeme zaoberať len dvojrozmernými náhodnými vektormi (X, Y), kde obe náhodné premenné X a Y sú buď diskrétne (vtedy hovoríme **o diskrétnom náhodnom vektore**) alebo obe sú spojité (hovoríme **o spojitom náhodnom vektore**) náhodné premenné (kombinácia jednej diskrétnej a jednej spojitej náhodnej premennej z dôvodu nedostatku potrebného matematického aparátu presahuje rámec nášho výkladu).

Nech $a, b \in R$ sú ľubovoľné reálne čísla. Budeme predpokladať, že vieme určiť pravdepodobnosti typu $P(X \leqq a, Y \leqq b)$ (t. j. pravdepodobnosť toho, že hodnota náhodnej premennej X nie je väčšia než a a súčasne hodnota náhodnej premennej Y nie je väčšia ako b), $P(X = a, Y = b)$, $P(X \in I_1, Y \in I_2)$, kde I_1 a I_2 sú ľubovoľné intervaly alebo všeobecne $P((X, Y) \in A)$, kde A je množina $A \subset R^2 = R \times R$.

Nech oborom hodnôt diskrétnej náhodnej premennej X je množina $\mathcal{H}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a $\mathcal{H}(Y) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ je oborom hodnôt náhodnej premennej Y. Označme

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(x_i, y_j) = p_{ij}. \tag{10.1}$$

Potom by sme mohli náhodný vektor (X, Y) úplne charakterizovať dvojrozmernou pravdepodobnostnou tabuľkou

$$\begin{array}{c||c|c|c|c||c} X \setminus Y & y_1 & y_2 & \dots & y_m & \sum r \\ \hline\hline x_1 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} & P_1(x_1) \\ \hline x_2 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} & P_1(x_2) \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline x_n & p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nm} & P_1(x_n) \\ \hline\hline \sum s & P_2(y_1) & P_2(y_2) & \dots & P_2(y_m) & 1 \end{array} \tag{10.2}$$

čo je obdoba pravdepodobnostnej tabuľky (8.2). V tejto tabuľke sme symbolom $\sum r$ označili súčet pravdepodobností p_{ij} v príslušnom riadku a symbolom $\sum s$ súčet p_{ij} v zodpovedajúcom stĺpci. Je evidentné, že súčet všetkých p_{ij} v tabuľke je rovný jednej. Tieto poznatky môžeme takto zhrnúť:

$$\text{riadkové súčty } p_{ij}: \qquad \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = P_1(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{10.3}$$

určujú pravdepodobnostnú tabuľku prvej náhodnej premennej X (všimnite si prvý a posledný stĺpec tejto tabuľky). Pravdepodobnostiam $P_1(x_i)$ hovoríme **marginálne pravdepodobnosti náhodnej premennej X náhodného vektora (X, Y)**.
Analogicky

$$\text{stĺpcové súčty } p_{ij}: \qquad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = P_2(y_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{10.4}$$

určujú pravdepodobnostnú tabuľku druhej náhodnej premennej Y (prvý a posledný riadok tabuľky). Pravdepodobnostiam $P_2(y_j)$ hovoríme **marginálne pravdepodobnosti náhodnej premennej Y náhodného vektora (X, Y)**.

V konečnom dôsledku súčty všetkých p_{ij} z celej tabuľky sú rovné jednej, t. j.

$$\text{celkové súčty } p_{ij}: \qquad \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j) = 1, \tag{10.5}$$

čo je analógia normalizačnej podmienky (8.3) jednej náhodnej premennej (premyslite si prípad nekonečného spočítateľného počtu možných hodnôt niektorej náhodnej premennej).

V ďalších úvahách môže byť náhodný vektor aj spojitý.

Definícia 10.1. Distribučná funkcia F náhodného vektora (X, Y) je funkcia, ktorá je pre každé $(x, y) \in R^2$ určená predpisom

$$F(x, y) = P(X \leqq x,\ Y \leqq y). \tag{10.6}$$

Funkciu F nazývame aj **združená distribučná funkcia náhodného vektora** (X, Y).

Obdobným spôsobom ako pri jednej náhodnej premennej môžeme dokázať, že

1. Pre každé $(x, y) \in R^2$ je $0 \leqq F(x, y) \leqq 1$;
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$;
3. $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x, y) = 1$
4. $\lim\limits_{y \to \infty} F(x, y) = F_1(x)$, kde funkcii F_1 hovoríme **marginálna distribučná funkcia náhodnej premennej X náhodného vektora (X, Y)**;
5. obdobne: $\lim\limits_{x \to \infty} F(x, y) = F_2(y)$, kde funkcii F_2 hovoríme **marginálna distribučná funkcia náhodnej premennej Y náhodného vektora (X, Y)**

a naviac, v prípade diskrétneho náhodného vektora

$$F(x,y) = \sum_{y_j \leqq y} \sum_{x_i \leqq x} P(x_i, y_j), \quad \text{kde} \quad x_i \in \mathcal{H}(X), \quad y_j \in \mathcal{H}(Y).$$

Definícia 10.2. Nezápornú funkciu $f : R^2 \to R_0^+$ nazývame **hustotou pravdepodobnosti náhodného vektora** (X, Y) práve vtedy, keď pre ňu platí:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s, \quad (x,y) \in R^2, \tag{10.7}$$

kde F je distribučná funkcia náhodného vektora (X, Y).

Veta 10.1. Nech F je distribučná funkcia a f hustota pravdepodobnosti náhodného vektora (X, Y). Potom okrem (10.7) platí:

1. ak hodnota $f(x, y)$ existuje, tak $f(x, y) \geqq 0$;
2. ak existuje druhá zmiešaná derivácia funkcie F, tak
$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y); \tag{10.8}$$
3. normalizačná podmienka (porovnajte s (8.5)) pre hustotu pravdepodobnosti:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1; \tag{10.9}$$
4. pre $a < b$ a $c < d$ je
$$P(a < X \leqq b,\, c < Y \leqq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x; \tag{10.10}$$
5. všeobecnejšie k predchádzajúcej vlastnosti: pre množinu $A \subset R^2$ je
$$P((X, Y) \in A)) = \iint_A f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{10.11}$$

Definícia 10.3. Nech funkcia f je hustotou pravdepodobnosti náhodného vektora (X, Y). Pod **marginálnou hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej X (resp. Y) náhodného vektora (X, Y)** rozumieme funkciu f_1 (resp. f_2), ktorá je definovaná predpisom

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y,\ x \in R, \quad \Big(\text{resp. } f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x,\ y \in R\Big). \tag{10.12}$$

Poznámka 10.2. Pre marginálne hustoty pravdepodobnosti f_1 a f_2 platí

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in R, \quad \text{a} \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in R,$$

kde F_1 a F_2 sú príslušné marginálne distribučné funkcie náhodného vektora (X, Y).

Definícia 10.4. Nech (X, Y) je náhodný vektor s distribučnou funkciou F a marginálnymi distribučnými funkciami F_1 a F_2. Náhodné premenné X a Y **nazývame nezávislými** práve vtedy, keď

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \quad \text{pre všetky } (x, y) \in R^2. \tag{10.13}$$

V opačnom prípade náhodné premenné X a Y nazývame **závislými**.
Vlastnosti (10.13) hovoríme, že funkcia F má separovateľné premenné vzhľadom na súčin.

Poznámka 10.3. Zovšeobecnenie poslednej definície: nech $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je náhodný vektor s distribučnou funkciou F a marginálnymi distribučnými funkciami $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Náhodné premenné $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **nazývame nezávislými** práve vtedy, keď

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdot \ldots \cdot F(x_n) \tag{10.14}$$

pre všetky $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$.

Nasledujúce dve vety nedokazujeme.

Veta 10.2. Nech (X, Y) je diskrétny náhodný vektor s marginálnymi pravdepodobnosťami P_1 a P_2. Potom náhodné premenné X a Y sú nezávislé práve vtedy, keď

$$P(x_i, y_j) = P_1(x_i) \cdot P_2(y_j) \quad \text{pre každé} \quad x_i \in \mathcal{H}(X),\, y_j \in \mathcal{H}(Y)$$

Veta 10.3. Nech f je hustota pravdepodobnosti spojitého náhodného vektora (X, Y) s marginálnymi hustotami pravdepodobnosti f_1 a f_2. Potom náhodné premenné X a Y sú nezávislé práve vtedy, keď $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ pre každé (x, y), kde sú funkcie f, f_1 a f_2 definované[a].

[a] vo formulácii tejto vety sme si dovolili upustiť od exaktnosti

Je zrejmé, že ak (X, Y) je diskrétny náhodný vektor s marginálnymi pravdepodobnosťami P_1 a P_2, tak pre stredné hodnoty a disperzie náhodných premenných X a Y platí:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot P_1(x_i) \quad \text{a} \quad E(Y) = \sum_{j=1}^{m(\infty)} y_j \cdot P_2(y_j),$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \left[x_i - E(X)\right]^2 \cdot P_1(x_i),$$

$$D(Y) = \sum_{j=1}^{m(\infty)} \left[y_j - E(Y)\right]^2 \cdot P_2(y_j)$$

a ak (X, Y) je spojitý náhodný vektor s marginálnymi hustotami f_1 a f_2, tak

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{a} \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)\, \mathrm{d}y,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - E(X)\right]^2 \cdot f_1(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[y - E(Y)\right]^2 \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y.$$

Definícia 10.5. Pod **kovarianciou** alebo aj **korelačným momentom** náhodného vektora (X, Y) rozumieme číslo (ak existuje)

$$k(X,Y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} \left[x_i - E(X)\right] \cdot \left[y_j - E(Y)\right] \cdot P(x_i, y_j) \\ \qquad \text{(pre diskrétny prípad)}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - E(X)\right] \cdot \left[y - E(Y)\right] \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \qquad \text{(pre spojitý prípad)}, \end{cases} \tag{10.15}$$

kde $x_i \in \mathcal{H}(X)$, $y_j \in \mathcal{H}(Y)$ a f je hustota náhodného vektora (X, Y). Položíme $k(X, X) =$ $= D(X)$ a $k(Y, Y) = D(Y)$.

Poznámka 10.4. Ľahko sa presvedčíme, že $k(X, Y) = k(Y, X)$.

Veta 10.4. Nech (X, Y) je náhodný vektor. Ak náhodné premenné X a Y sú nezávislé, tak $k(X, Y) = 0$.

Poznámka 10.5. Ak $k(X, Y) = 0$, tak náhodné premenné X a Y nemusia byť nezávislé.

Definícia 10.6. Nech (X, Y) je náhodný vektor, pre ktorý existuje $k(X, Y)$, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \neq 0$ a $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} \neq 0$. Pod **korelačným koeficientom** náhodného vektora (X, Y) rozumieme číslo

$$\rho(X, Y) = \frac{k(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}\,. \tag{10.16}$$

Veta 10.5. Nech (X, Y) je náhodný vektor. Potom

1. $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$, $\rho(X, X) = 1$, $\rho(Y, Y) = 1$;
2. ak náhodné premenné X a Y sú nezávislé, tak $\rho(X, Y) = 0$;
3. $|\rho(X, Y)| \leqq 1$;
4. ak medzi X a Y existuje lineárna závislosť (t. j. $Y = a \cdot X + b, 0 \neq a, b \in R$), tak $|\rho(X, Y)| = 1$.

Definícia 10.7. Nech (X, Y) je náhodný vektor. Maticu

$$K = \begin{pmatrix} k(X, X) & k(X, Y) \\ k(Y, X) & k(Y, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(X) & k(X, Y) \\ k(X, Y) & D(Y) \end{pmatrix} \tag{10.17}$$

nazývame **kovariančnou maticou náhodného vektora** (X, Y).

Poznámka 10.6. Je prirodzené definovať kovariančnú maticu n-rozmerného náhodného vektora $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ týmto spôsobom: je to štvorcová matica $K = (k_{ij})$, kde $k_{ij} =$

$= k(X_i, X_j)$, t. j.

$$K = \begin{pmatrix} D(X_1) & k(X_1,X_2) & \dots & k(X_1,X_n) \\ k(X_1,X_2) & D(X_2) & \dots & k(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(X_1,X_n) & k(X_2,X_n) & \dots & D(X_n) \end{pmatrix}.$$

Kovariančná matica je symetrická.

Príklad 10.1. Raz hodíme dvoma bežnými hracími kockami. Nech X je maximum počtu padnutých bodov a Y absolútna hodnota rozdielu počtu padnutých bodov na kockách. Určme: a) zákon rozdelenia pravdepodobnosti (t. j. napr. pravdepodobnostnú tabuľku) náhodného vektora (X, Y); b) marginálne pravdepodobnosti P_1 a P_2; c) kovarianciu; d) kovariančnú maticu; e) korelačný koeficient náhodného vektora (X, Y); f) Rozhodnime, či náhodné premenné X a Y sú nezávislé.

Riešenie. a) Zrejme $\mathcal{H}(X) = \{1,2,3,4,5,6\}$ a $\mathcal{H}(Y) = \{0,1,2,3,4,5\}$, $P(x_i, 0) = \frac{1}{36}$ (rovnaký počet bodov na oboch kockách), pre $x_i < y_j$ je $P(x_i, y_j) = 0$ (nemožný jav) a pre zvyšné pravdepodobnosti je $P(x_i, y_j) = \frac{2}{36}$ (napr. $P(5,2) = P(X = 5, Y = 2)$ je pravdepodobnosť javu, ktorý spočíva v tom, že maximum padnutých bodov na kockách je 5 a že absolútna hodnota rozdielu počtu padnutých bodov na kockách je rovná dvom. To je ovšem možné len vtedy, keď na jednej kocke padli tri body a na druhej päť bodov. Pravdepodobnosť tohto javu je $\frac{2}{36}$. V nasledujúcej tabuľke sú v zmysle (10.2) uvedené požadované pravdepodobnosti, pričom pre skrátenie zápisov sú všade uvedené 36 násobky skutočných pravdepodobností.

$x_i \setminus y_j$	0	1	2	3	4	5	$P_1(x_i)$
1	1	0	0	0	0	0	1
2	1	2	0	0	0	0	3
3	1	2	2	0	0	0	5
4	1	2	2	2	0	0	7
5	1	2	2	2	2	0	9
6	1	2	2	2	2	2	11
$P_2(y_j)$	6	10	8	6	4	2	36

b) Požadované marginálne pravdepodobnosti náhodných premenných X a Y dostaneme z predchádzajúcej tabuľky: rozdelenia pravdepodobnosti náhodných premenných X a Y sú dané pravdepodobnostnými tabuľkami

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_1(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

,

y_j	0	1	2	3	4	5
$P_2(y_j)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

.

c) Pre stredné hodnoty je $E(X) = \frac{161}{36}$ a $E(Y) = \frac{35}{18}$. Potom

$$K(X,Y) = \frac{1}{36}\left[\left(1 - \frac{161}{36}\right)\left(0 - \frac{35}{18}\right) + \left(2 - \frac{161}{36}\right)\left(0 - \frac{35}{18}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \left(6 - \frac{161}{36}\right)\left(5 - \frac{35}{18}\right) \cdot 2\right] \approx 1{,}02623.$$

d) Z časti b) dostaneme $D(X) = 1{,}97145$ a $D(Y) = 2{,}05247$, a preto

$$K = \begin{pmatrix} 1{,}97145 & 1{,}02623 \\ 1{,}02623 & 2{,}05247 \end{pmatrix}$$

je kovariančnou maticou náhodného vektora (X, Y).
e) Podľa (10.16) je

$$\rho(X,Y) = \frac{1{,}02623}{\sqrt{1{,}97145} \cdot \sqrt{2{,}05247}} \approx 0{,}51017.$$

f) Keďže $\rho(X,Y) \neq 0$, tak náhodné premenné X a Y sú závislé.

Príklad 10.2. Majme funkciu $f(x) = \begin{cases} c & \text{pre } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{pre iné } (x,y) \in R^2, \end{cases}$ kde c je reálna konštanta. Určme: a) pre akú hodnotu c môže f byť hustotou pravdepodobnosti náhodného vektora (X,Y); b) marginálne hustoty f_1 a f_2; c) stredné hodnoty a smerodajné odchýlky náhodných premenných X a Y; d) kovarianciu a korelačný moment náhodného vektora (X,Y). e) Sú náhodné premenné X a Y nezávislé?

Riešenie. a) Normalizačná podmienka (10.9) nám dáva

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_0^x c\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \frac{c}{2},$$

odkiaľ $c = 2$. Nezápornosť funkcie f je evidentná.
b) Podľa (10.12) je

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x 2\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 2 \cdot x & \text{pre } x \in (0,1), \\ 0 & \text{pre } x \notin (0,1) \end{cases}$$

a

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^y 2\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2 \cdot y & \text{pre } y \in (0,1), \\ 0 & \text{pre } y \notin (0,1). \end{cases}$$

c) Máme

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \quad \text{a}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y \cdot 2y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\,.$$

Pre disperzie dostaneme

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x - \frac{1}{6}\right]^2 2x\,\mathrm{d}x = \frac{11}{36} \quad \text{a} \quad D(Y) = \frac{11}{36}.$$

Takto $\sigma(X) = \sigma(Y) = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

d) Z (10.15) je

$$k(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[x - E(X)\right] \cdot \left[y - E(Y)\right] \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^x \left[x - \frac{1}{6}\right] \cdot \left[y - \frac{1}{6}\right] \cdot 2\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{9}\,.$$

Korelačný koeficient získame podľa (10.16):

$$\rho(X,Y) = \frac{k(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \frac{4}{11}\,.$$

e) $\rho(X,Y) \neq 0$, a preto náhodné premenné X a Y sú závislé.

Úlohy

10.1. Je daná pravdepodobnostná tabuľka diskrétneho náhodného vektora (X, Y):

$x_i \setminus y_j$	2	4	6	8
1	0,01	0,03	0,04	k
2	k	0,24	0,1	0,04
3	0,04	0,15	0,08	0,03
4	0,04	0,06	0,08	k

Určte: a) konštantu k; b) marginálne pravdepodobnosti $P_1(x_i)$ a $P_2(y_j)$; c) hodnoty distribučnej funkcie $F(3;4)$ a $F(4;3)$; d) korelačný koeficient; e) kovariančnú maticu. f) Sú náhodné vektory X a Y nezávislé?

[a) 0,02; b)

x_i	1	2	3	4
$P_1(x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

y_j	2	4	6	8
$P_2(y_j)$	0,11	0,48	0,3	0,11

;

c) $F(3;4) = 0{,}49$; $F(4;3) = 0{,}11$; d) $K(X, Y) = -0{,}112$;

e) $\begin{pmatrix} 0{,}8400 & -0{,}112 \\ -0{,}112 & 2{,}7276 \end{pmatrix}$; f) nie]

10.2. V zásielke desiatich výrobkov je 8 kvalitných a 2 nekvalitné. Medzi kvalitnými je 5 prvej akosti. Náhodne vyberieme 2 výrobky (bez vrátenia). Určte: a) pravdepodobnostnú tabuľku diskrétneho náhodného vektora (X, Y), ak X nadobúda hodnoty počtu vybraných kvalitných výrobkov a Y hodnoty počtu vybraných výrobkov prvej akosti; b) marginálne pravdepodobnosti $P_1(x_i)$ a $P_2(y_j)$; c) hodnoty distribučnej funkcie $F(2;1)$, $F(1;2)$ a $F(2;5)$. d) Sú náhodné vektory X a Y závislé?

a)

$x_i \setminus y_j$	0	1	2
0	$\frac{1}{45}$	0	0
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$

b)

x_i	0	1	2
$P_1(x_i)$	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

y_j	0	1	2
$P_2(y_j)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

;

c) $\frac{7}{9}$, $\frac{17}{45}$, 1; d) Áno

10.3. Daná je funkcia $f(x,y) = \begin{cases} kxy & \text{pre } (x,y) \in \langle 0,1) \times (1,2\rangle, \\ 0 & \text{pre } (x,y) \notin \langle 0,1) \times (1,2\rangle. \end{cases}$
Určte: a) pre akú hodnotu $k \in R$ je f hustotou pravdepodobnosti náhodného vektora (X,Y); b) marginálne hustoty pravdepodobnosti náhodných premenných X a Y; c) stredné hodnoty a disperzie náhodných premenných X a Y; d) kovarianciu náhodného vektora (X,Y); e) $P(0 \leqq X \leqq \frac{1}{2}, 1 < Y < 4)$. f) Sú náhodné premenné X a Y nezávislé?

[a) $k = \frac{4}{3}$;

b) $f_1(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (0,1), \\ 0 & \text{pre } x \notin (0,1), \end{cases}$ $f_2(y) = \begin{cases} \frac{2y}{3} & \text{pre } y \in (1,2), \\ 0 & \text{pre } y \notin (0,1); \end{cases}$

c) $E(X) = \frac{2}{3}$, $E(Y) = \frac{14}{9}$, $D(X) = \frac{1}{18}$, $D(Y) = \frac{13}{162}$;

d) $K(X,Y) = 0$; e) $\frac{1}{4}$; f) Áno]

10.4. Daná je funkcia $f(x,y) = \begin{cases} kx & \text{pre } x \in (0,1), \\ 0 & \text{pre } x \notin (0,1). \end{cases}$ Určte: a) pre akú hodnotu $k \in R$ je f hustotou pravdepodobnosti náhodného vektora (X,Y); b) marginálne hustoty pravdepodobnosti náhodných premenných X a Y; c) stredné hodnoty a disperzie náhodných premenných X a Y; d) kovarianciu náhodného vektora (X,Y); e) $P(\frac{1}{2} \leqq X < 1, 0 < Y \leqq \frac{3}{4})$. f) Sú náhodné premenné X a Y závislé?

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } k=2; \\ \text{b) } f_1(x)=\begin{cases} 2x & \text{pre } x\in(0,1), \\ 0 & \text{pre } x\notin(0,1), \end{cases} \quad f_2(y)=\begin{cases} 1 & \text{pre } y\in(0,1), \\ 0 & \text{pre } y\notin(0,1); \end{cases} \\ \text{c) } E(X)=\frac{2}{3},\ E(Y)=\frac{1}{2},\ D(X)=\frac{1}{18},\ D(Y)=\frac{1}{12}; \\ \text{d) } K(X,Y)=0;\ \text{e) } \frac{9}{16};\ \text{f) Nie} \end{array}\right]$$

10.5. Daná je funkcia $f(x,y)=\begin{cases} a(x+y) & \text{pre } x,y\in(0,1), \\ 0 & \text{pre } x\vee y\notin(0,1). \end{cases}$ Určte: a) pre akú hodnotu $a\in R$ je f hustotou pravdepodobnosti náhodného vektora (X,Y); b) marginálne hustoty náhodných premenných X a Y; c) stredné hodnoty a disperzie oboch náhodných premenných; d) kovarianciu náhodného vektora (X,Y); e) $P(Y<X)$. f) Sú náhodné premenné X a Y závislé?

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } \frac{2}{3}; \\ \text{b) } f_1(x)=\begin{cases} \frac{2(x+1)}{3} & \text{pre } x\in(0,1), \\ 0 & \text{pre } x\notin(0,1), \end{cases} \\ \qquad f_2(y)=\begin{cases} \frac{(1+4y)}{3} & \text{pre } y\in(0,1), \\ 0 & \text{pre } y\notin(0,1); \end{cases} \\ \text{c) } E(X)=\frac{5}{9},\ E(Y)=\frac{11}{18},\ D(X)=\frac{13}{162},\ D(Y)=\frac{23}{324}; \\ \text{d) } K(X,Y)=\frac{-1}{162};\ \text{e) } \frac{4}{9};\ \text{f) Áno} \end{array}\right]$$

11. Matematická štatistika

Pojem **štatistika** je veľmi obšírny. V praxi sa neraz stretneme so slovnými spojeniami: „štatisticky bolo zistené, že …“ alebo „štatistika hovorí, že …“, pričom je podaná informácia o istej skutočnosti (napr. priemerný zárobok alebo hmotnosť, sledovanosť istej televíznej stanice, životnosť výrobkov, spotreba benzínu, volebné preferencie atď). Takáto informácia je stopercentne pravdivá len vtedy, ak sa zistil skúmaný **štatistický znak** (zárobok, hmotnosť, sleduje – nesleduje atď) pre každú **štatistickú jednotku**, t. j. pre každý objekt skúmania. To sa však dá len zriedkavo realizovať, mohlo by to byť finančne náročné alebo by to stratilo zmysel (napr. pri zisťovaní životnosti výrobkov by sme zlikvidovali celú výrobu). Preto sa zistí skúmaný znak na **náhodnom výbere – vybranej vzorke** a zo získaných údajov sa urobí zovšeobecnenie vo forme štatistického záveru o celom **základnom súbore**, t. j. o celej množine štatistických jednotiek, ktorá je predmetom skúmania.

Pri tomto postupe však musíme pripustiť riziko, že náš štatistický záver o základnom súbore nebude dobrý. Mieru tohto rizika charakterizujeme tzv. **hladinou významnosti** $\alpha \in (0, 1)$, ktorá v podstate stanovuje pravdepodobnosť toho, že náš štatistický záver je chybný. Číslo $\gamma = 1 - \alpha$ udáva zrejme pravdepodobnosť správneho záveru, a preto je prirodzené ho nazvať **koeficientom spoľahlivosti**.

V ďalších odsekoch sa budeme zaoberať týmito hlavnými úlohami štatistického skúmania:

a) odhady a intervaly spoľahlivosti parametrov základného súboru;

b) testovanie štatistických hypotéz;

c) korelačná a regresná analýza.

11.1. Náhodný výber a výberové charakteristiky

Každé štatistické skúmanie je založené na náhodnom výbere (vzorke, výberovom súbore). Je to „náhodná podmnožina“ základného súboru. Je prirodzené požadovať, aby náhodný výber „dostatočne reprezentoval“ základný súbor. K tomu je, okrem iného, nevyhnutné, aby

1. každá jednotka základného súboru mala rovnakú šancu (pravdepodobnosť) dostať sa do náhodného výberu;

2. náhodný výber mal dostatočný počet prvkov vo vzťahu k počtu prvkov základného súboru.

Rozborom týchto požiadaviek sa nebudeme hlbšie zaoberať.

Predpokladajme, že máme daný náhodný výber n štatistických jednotiek (číslo n nazývame **rozsahom náhodného výberu**) a že na každej sme zistili sledovaný kvantitatívny znak (konkrétny zárobok, hmotnosť atď). Tomuto procesu hovoríme **zber dát (údajov)**. Tieto dáta je vhodné rozumne spracovať tzv. **triedením**. Najjednoduchším triedením dát je ich usporiadanie podľa veľkosti, obyčajne vzostupne, čím získame **variačný rad**[5]:

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n, \tag{11.1}$$

kde x_i sú namerané hodnoty

Pri veľkom rozsahu náhodného výberu je tento prístup neprehľadný, a preto robíme triedenie podľa **početnosti (frekvencie)**, t. j. pre každú nameranú hodnotu x_i zistíme koľkokrát sa vyskytuje medzi nameranými hodnotami, čo označíme n_i. Získané hodnoty obyčajne zapíšeme do takejto tabuľky

x_j	167	170	174	175	178	180
n_j	1	3	5	6	3	2

, (11.2)

[5]V literatúre sa pre variačný rad občas používa označenie $x_{(1)} \leqq x_{(2)} \leqq \cdots \leqq x_{(k)} \leqq \cdots \leqq x_{(n)}$, kde $x_{(k)}$ je k-ta hodnota znaku vo výbere rozsahu n, ktorý je vzostupne usporiadaný podľa veľkosti (symboliku $x_{(k)}$ používajú aj platné štátne normy ČSN 01 0104).

v ktorej je pre $x_1 = 167$ frekvencia $n_1 = 1$ a napr. pre $x_3 = 174$ je $n_3 = 5$. Všeobecne: medzi n nameranými hodnotami x_j s frekvenciami n_j z (11.1) je $k \leqq n$ navzájom rôznych, (v tabuľke (11.2) je $k = 6$ a $n = 20$), pričom $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Pri **intervalovom triedení** predpokladáme daný systém I_k po dvojiciach disjunktných intervalov, pričom každá nameraná hodnota x_i leží práve v jednom intervale a pre každý interval I_j poznáme **intervalovú frekvenciu** n_j, ktorá udáva, koľko nameraných hodnôt padlo do daného intervalu:

I_j	16 – 20	20 – 24	24 – 28	28 – 32	32 – 36
n_j	2	7	5	4	1

(11.3)

Určite ste postrehli, že tu používame neštandardné označenie pre interval: zadávame jeho dolnú a hornú hranicu, napr. zápis 20 – 24 znamená interval $I_2 = (20, 24\rangle$ (to je v štatistike najbežnejší spôsob označenia intervalu) s frekvenciou $n_2 = 7$. Intervaly sú zvyčajne ekvidištantné (rovnakej veľkosti). Pod **reprezentantom intervalu** rozumieme jeho stred.

V literatúre, ale aj v bežnej praxi, môžete nájsť rôzne grafické interpretácie nameraných hodnôt pomocou polygónov, histogramov, „koláčov“ atď.

Definícia 11.1. Nech sú dané namerané hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktoré sú získané z náhodného výberu V_n. Pod **výberovým priemerom náhodného výberu** V_n rozumieme číslo

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{11.4}$$

Je to zrejme známy aritmetický priemer nameraných hodnôt. V prípade triedenia podľa frekvencií ho môžeme zapísať aj v tvare

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j x_j, \tag{11.5}$$

kde n_j je frekvencia hodnoty x_j. Pri intervalovom triedení berieme za x_j reprezentanta príslušného intervalu.

Definícia 11.2. Nech sú dané namerané hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktoré sú získané z náhodného výberu V_n. Pod **výberovým rozptylom (disperziou) náhodného výberu** V_n rozumieme číslo

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \tag{11.6}$$

a pod **modifikovaným výberovým rozptylom (disperziou) náhodného výberu** V_n rozumieme číslo

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \tag{11.7}$$

kde $\overline{x}$ je výberový priemer. **Výberovou smerodajnou odchýlkou**, resp. **modifikovanou výberovou smerodajnou odchýlkou náhodného výberu** V_n je číslo

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \quad \text{resp.} \quad s^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}. \tag{11.8}$$

Poznámka 11.1. Všimnime si, že ak hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú navzájom rôzne, tak výberový priemer $\overline{x}$, resp. výberový rozptyl s^2 je totožný so strednou hodnotou $E(X)$, resp. rozptylom $D(X)$ diskrétnej náhodnej premennej, ktorá má rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti.

Príklad 11.1. Vypočítajme výberový priemer, výberový rozptyl a modifikovaný výberový rozptyl i výberovú smerodajnú odchýlku a modifikovanú výberovú smerodajnú odchýlku, ak v náhodnom výbere boli namerané hodnoty: a) 3; 5; 8; 9; 9; 5; b) dané v tabuľke (11.2).

Riešenie. Výpočet žiadaných výberových charakteristík podľa vyššie definovaných vzťahov prenechávame pre čitateľa. V MATLABe môžeme postupovať takto:
a) Najskôr syntaxou $x = [3, 5, 8, 9, 9, 5]$ zadáme namerané hodnoty a jednotlivé výberové charakteristiky $\overline{x}$, s^2, s^{*2}, s a s^* v danom poradí získame pomocou $mean(x)$, $var(x, 1)$, $var(x)$, $std(x, 1)$ a $std(x)$, Dostaneme: $\overline{x} = 6{,}5$; $s^2 = 5{,}25$; $s^{*2} = 6{,}3$; $s = 2{,}2913$ a $s^* = 2{,}51$.
b) Ručné počítanie asi odmietneme a s danými frekvenciami n_j sa vysporiadame takto:

$$x = [167, 170 * (1, 3), 174 * (1, 5), 175 * (1, 6), 178 * (1, 3), 180 * (1, 2)]$$

(tým sme zadali namerané hodnoty) a ako v časti a) získame $\overline{x} = 174{,}55$; $s^2 = 10{,}8475$; $s^{*2} = 11{,}4184$; $s = 3{,}2936$ a $s^* = 3{,}3791$.

V prípade intervalových frekvencií (11.3) berieme za x_j hodnoty reprezentantov jednotlivých intervalov.

Výberové charakteristiky majú náhodný charakter: pri tom istom základnom súbore rôzne náhodné výbery (tie môžu mať aj rôzne rozsahy) poskytujú vo všeobecnosti rôzne náhodné hodnoty jednotlivých výberových charakteristík. To nás privádza k záveru, že výberové charakteristiky sú v podstate náhodné premenné s istým zákonom rozdelenia pravdepodobnosti.

11.2. Bodové a intervalové odhady parametrov základného súboru

Parametre základného súboru sú isté veličiny, ktoré ho charakterizujú a sú určené konkrétnymi hodnotami sledovaného znaku všetkých štatistických jednotiek celého základného súboru (napr. ak základný súbor pozostáva zo všetkých vyrobených áut typu XX, tak priemerná spotreba, t. j. stredná hodnota spotreby benzínu na konkrétnu vzdialenosť a pri konkrétnych podmienkach je jeden možný parameter skúmaného súboru áut typu XX). Vo väčšine prípadov je nereálne získať ich skutočné hodnoty. Môžeme ich však prostredníctvom náhodných výberov odhadnúť.

Nech Q je sledovaný parameter základného súboru (napr. stredná hodnota μ, smerodajná odchýlka σ atď) a $\hat{Q}_n$ je výberová charakteristika náhodného výberu V_n, kde n označuje rozsah náhodného výberu (napr. $\overline{x}$, s atď.). Pod **bodovým odhadom parametra Q** rozumieme takú výberovú charakteristiku $\hat{Q}_n$, ktorá nadobúda hodnoty blízke skutočnej hodnote parametra Q. Tento bodový odhad nazývame **nevychýleným** práve vtedy, keď $E(\hat{Q}_n) = Q$. Zapisujeme prirodzeným spôsobom: $Q \approx \hat{Q}_n$.

V literatúre sa sledujú aj iné atribúty bodových odhadov (napr. konzistencia, výdatnosť atď.). My sa uspokojíme s tým, že uvedieme bez dôkazu túto očakávanú vetu:

Veta 11.1. Výberový priemer $\overline{x}$ je nevychýleným odhadom strednej hodnoty μ a modifikovaný výberový rozptyl s^{*2} je nevychýleným odhadom rozptylu σ^2 základného súboru t. j.

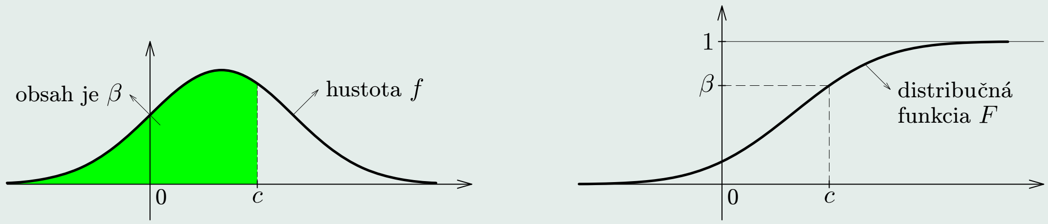
$$\mu \approx \overline{x} \qquad \text{a} \qquad \sigma^2 \approx s^{*2}. \tag{11.9}$$

Táto veta poskytuje prirodzený výsledok: „priemer veľkého súboru odhadneme logicky čím iným než priemerom malého súboru, ktorý je z veľkého (základného súboru) náhodne vybraný“; podobne je to s rozptylom.

V praxi sa bodové odhady využívajú na získanie intervalových odhadov parametrov základného súboru. Tieto intervaly nám poskytnú ucelenejšiu informáciu. Najskôr zadefinujeme niektoré potrebné pojmy.

Nech f je hustota a F distribučná funkcia náhodnej premennej X (napr. s grafmi, ktoré sú uvedené na obr. 11.1). Potom pre ľubovoľné $\beta \in (0,1)$ existuje také najmenšie reálne číslo c, že $F(c) \geqq \beta$: t. j. c je najmenšie reálne číslo, pre ktoré je obsah vyšrafovanej časti na obr. 11.1 aspoň β (skúste si interpretáciu premyslieť v prípade grafu distribučnej funkcie).

Definícia 11.3. Číslo c z predchádzajúcich úvah nazývame **β-kvantilom** rozdelenia pravdepodobnosti F a označujeme ho $c = F^{-1}(\beta)$.



Obr. 11.1

Pre kvantily dôležitých rozdelení pravdepodobnosti sa používajú konvenčné označenia. Pre nám už známe normované normálne rozdelenie pravdepodobnosti $norm(0,1)$ (pozri (9.18)) je to označenie $\Phi^{-1}(\beta) = y_\beta$ (používa sa aj u_β alebo z_β). V matematickej štatistike je rad ďalších dôležitých rozdelení pravdepodobnosti. Pre tie rozdelenia, ktoré budeme potrebovať, neuvedieme ich definície, ani hustoty a distribučné funkcie (to všetko si v prípade potreby nájdete v literatúre). V nasledujúcej tabuľke uvádzame názov rozdelenia pravdepodobnosti, štandardné označenie náhodnej premennej, označenie pre jej distribučnú funkciu, označenie pre β-kvantil a syntax pre získanie tohto kvantilu v MATLABe (kvantily môžeme získať aj z tabuliek, ktoré sú zvyčajne v prílohách; my ich neuvádzame).

Názov RP	NP	DF	β-kvantil	Syntax
Normovaná normálna	Y	Φ	y_β	$norminv(\beta)$
Chí-kvadrát	χ^2	χ^2_n	$\chi^2_{\beta,n}$	$chi2inv(\beta,n)$
Studentovo t	T	t_n	$t_{\beta,n}$	$tinv(\beta,n)$
Fisherovo	F	$F_{n,m}$	$F_{\beta;n,m}$	$finv(\beta,n,m)$

V tabuľke n a m sú prirodzené čísla. Fisherovmu rozdeleniu sa niekedy hovorí Fisherovo-Snedecorovo rozdelenie pravdepodobnosti.

Hlavná myšlienka intervalového odhadu parametra Q základného súboru spočíva v nájdení istého intervalu I, v ktorom leží s nami zvolenou pravdepodobnosťou p skutočná hodnota parametra Q. Samozrejmou snahou je nájsť interval I čo najmenšej veľkosti. Ak sa nám taký interval podarí nájsť, tak môžeme o ňom tvrdiť, že doňho na $100 \cdot p$ percent patrí skutočná hodnota Q.

Definícia 11.4. **Intervalovým odhadom parametra Q základného súboru na hladine významnosti $\alpha \in (0, 1)$** nazývame taký „číselný interval“ $\langle Q_1, Q_2 \rangle$, v ktorom parameter Q leží s pravdepodobnosťou $1 - \alpha$, t. j.

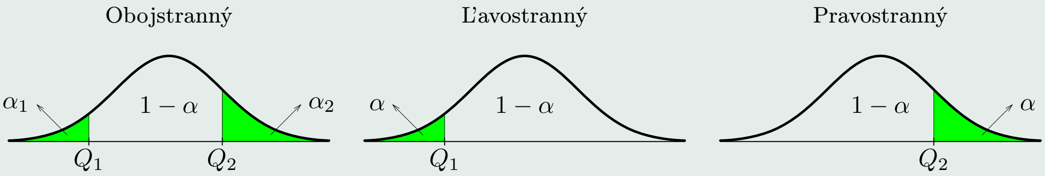
$$P(Q_1 \leqq Q \leqq Q_2) = 1 - \alpha, \tag{11.10}$$

kde Q_1 a Q_2 je dvojica čísel, ktorá závisí od realizovaného náhodného výberu V_n. Interval $\langle Q_1, Q_2 \rangle$ nazývame aj **$100 \cdot (1 - \alpha)$-percentný interval spoľahlivosti pre parameter Q** alebo skrátene **obojstranný interval spoľahlivosti**. Číslu $(1 - \alpha)$ hovoríme **koeficient spoľahlivosti intervalového odhadu $\langle Q_1, Q_2 \rangle$**.

Definícia 11.5. **Jednostranné intervaly spoľahlivosti pre parameter Q** definujeme obdobne ako v predchádzajúcej definícii. Majú tvar:

$$\begin{cases} \textbf{ľavostranný interval } \langle Q_1, \infty) : \; P(Q_1 \leqq Q) = 1 - \alpha \\ \textbf{pravostranný interval } (-\infty, Q_2\rangle : \; P(Q \leqq Q_2) = 1 - \alpha. \end{cases} \tag{11.11}$$

Grafická interpretácia oboch definícií je na obr. 11.2. Pri obojstrannom intervale spoľahlivosti je $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.



Obr. 11.2

Veta 11.2 (Intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ, ak σ poznáme). Nech náhodná premenná X základného súboru má normálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami μ a σ (t. j. $X \sim norm(\mu, \sigma)$). Potom obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ na hladine významnosti α má tvar

$$\mu \in \left\langle \underbrace{\overline{x} - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{Q_1}, \underbrace{\overline{x} + y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{Q_2} \right\rangle \tag{11.12}$$

a jednostranné intervaly majú tvar

$$\mu \in \left\langle \underbrace{\overline{x} - y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{Q_1}, \infty \right), \quad \text{resp.} \quad \mu \in \left(-\infty, \underbrace{\overline{x} + y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{Q_2} \right\rangle, \tag{11.13}$$

kde $\overline{x}$ je výberový priemer, n je rozsah výberu a $y_{1-\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ a $y_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ sú kvantily rozdelenia pravdepodobnosti $norm(0,1)$ (pozri (9.18)).

Dôkaz. Keďže $X \sim norm(\mu, \sigma)$, tak z viet , a (11.4) dostaneme pre náhodnú premennú výberového priemeru: $\overline{x} \sim norm\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Ak podľa (8.16) znormujeme túto náhodnú pre-

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
Strana 191 z 261
Späť
Celá strana
Zatvoriť
Koniec

mennú, tak dostaneme $Y = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim norm(0,1)$. Z (9.25) a (9.27) vyplýva

$$P\big(-y_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqq Y \leqq y_{1-\frac{\alpha}{2}}\big) = 1 - \alpha.$$

Ak tu nahradíme Y, tak k získaniu (11.12) stačí jednoduchá úprava ľavej strany:

$$P\big(\underbrace{-y_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqq \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leqq y_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{\text{odtiaľ vyjadríme } \mu}\big) = P\big(\overline{x} - y_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{x} + y_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\big)$$

Obdobne prebieha dôkaz pre jednostranné intervaly spoľahlivosti (11.13). □

Ďalšie dve vety uvádzame bez dôkazu.

Veta 11.3 (Intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ, ak σ nepoznáme). Nech náhodná premenná X základného súboru má normálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami μ a σ (t. j. $X \sim norm(\mu, \sigma)$). Potom obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ na hladine významnosti α má tvar

$$\mu \in \Big\langle \underbrace{\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}}}_{Q_1}, \underbrace{\overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}}}_{Q_2} \Big\rangle \tag{11.14}$$

a jednostranné intervaly majú tvar

$$\mu \in \Big\langle \underbrace{\overline{x} - t_{1-\alpha, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}}}_{Q_1}, \infty\Big), \text{ resp. } \mu \in \Big(-\infty, \underbrace{\overline{x} + t_{1-\alpha, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}}}_{Q_2}\Big\rangle, \tag{11.15}$$

kde $\overline{x}$ je výberový priemer, s^* je výberová modifikovaná smerodajná odchýlka, n je rozsah výberu a $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ a $t_{1-\alpha, n-1}$ sú kvantily Studentovho t-rozdelenia pravdepodobnosti.

Poznámka 11.2. Porovnajme (11.12) s (11.14): vidno, že smerodajná odchýlka σ je nahradená jej bodovým odhadom $\sigma \sim s^*$ a kvantil normovaného normálneho rozdelenia je nahradený kvantilom Studentovho t-rozdelenia pravdepodobnosti.

Veta 11.4 (Intervaly spoľahlivosti pre rozptyl σ^2). Nech náhodná premenná X základného súboru má normálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami μ a σ (t. j. $X \sim norm(\mu, \sigma)$). Potom obojstranný interval spoľahlivosti pre rozptyl σ^2 na hladine významnosti α má tvar

$$\sigma^2 \in \left\langle \underbrace{\frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}}}_{Q_1}, \quad \underbrace{\frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}}}_{Q_2} \right\rangle \tag{11.16}$$

a jednostranné intervaly majú tvar

$$\sigma^2 \in \left\langle \underbrace{\frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha,\, n-1}}}_{Q_1}, \quad \infty \right) \quad \text{resp.} \quad \sigma^2 \in \left(0\,, \quad \underbrace{\frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{\alpha,\, n-1}}}_{Q_2} \right\rangle \tag{11.17}$$

kde s^{*2} je výberový modifikovaný rozptyl, n je rozsah výberu a $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}$ a $\chi^2_{1-\alpha,\, n-1}$ sú kvantily χ^2 rozdelenia pravdepodobnosti.

Predchádzajúce tri vety poskytujú intervaly spoľahlivosti pre parametre normálneho rozdelenia pravdepodobnosti. Podobné tvrdenia by sme mohli sformulovať aj pre parametre iných typov rozdelení pravdepodobnosti.

Príklad 11.2. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}1$ určme tieto intervaly spoľahlivosti: a) obojstranný pre strednú hodnotu; b) pravostranný pre rozptyl; c) obojstranný pre smerodajnú odchýlku, na základe nameraných hodnôt na náhodnom výbere, ktoré sú uvedené v tabuľke (11.2), pričom ide o normálne rozdelenie pravdepodobnosti hodnôt sledovaného parametra základného súboru..

Riešenie. Využijeme vyčíslené výberové charakteristiky z príkladu 31b): $\overline{x} = 174{,}55$; $s^{*2} = 11{,}4184$ a $s^* = 3{,}3791$, pričom $n = 20$.
a) Rozptyl nepoznáme, a preto postupujeme podľa (11.14): $t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} = t_{0{,}95;\, 19} = 1{,}7291$ (v MATLABe $tinv(0.95, 19)$). Teda

$$\mu \overset{90\%}{\in} \left\langle 174{,}55 - 1{,}7291 \cdot \frac{3{,}3791}{\sqrt{19}},\ 174{,}55 + 1{,}7291 \cdot \frac{3{,}3791}{\sqrt{19}} \right\rangle = \langle 173{,}2096;\ 175{,}8904 \rangle.$$

b) Použijeme (11.17). K tomu potrebujeme kvantil $\chi^2_{\alpha,\, n-1} = \chi^2_{0{,}1;\, 19} = 11{,}6509$ (v MATLABe $chi2inv(0.1, 19)$). Takto

$$\sigma^2 \overset{90\%}{\in} \left\langle 0;\ \frac{19 \cdot 11{,}4184}{11{,}6509} \right\rangle = \langle 0;\ 18{,}6208 \rangle.$$

c) Pre (11.16) potrebujeme kvantily $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} = \chi^2_{0{,}95;\, 19} = 30{,}1435$ a $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1} = \chi^2_{0{,}05;\, 19} = $ $= 10{,}117$ ($chi2inv(0.95, 19)$ a $chi2inv(0.05, 19)$ v MATLABe). Dostaneme

$$\sigma \overset{90\%}{\in} \left\langle \sqrt{\frac{19 \cdot 11{,}4184}{30{,}1435}};\ \sqrt{\frac{19 \cdot 11{,}4184}{10{,}117}} \right\rangle = \langle 2{,}6828;\ 4{,}6308 \rangle.$$

11.3. Testovanie štatistických hypotéz

Štatistická hypotéza je istá domnienka (tvrdenie) o vlastnostiach rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X alebo viacerých náhodných premenných. **Testovanie**

štatistickej hypotézy (môžeme povedať aj overovanie pravdivosti domnienky) je postup, pri ktorom na základe náhodného výberu zo základného súboru rozhodneme, či na zvolenej hladine významnosti α (t. j. so spoľahlivosťou $1 - \alpha$) danú hypotézu zamietame (neprijmeme) alebo nezamietame (prijmeme). V prípade zamietnutia prijmene **alternatívnu** („opačnú“) hypotézu.

Príklad 11.3. Chceme zistiť, či v podniku priemerný denný odpad μ istého kovu nepresiahne 26 jednotiek hmotnosti. Potom by sme testovali hypotézu $\mu \leqq 26$, pričom alternatívna hypotéza by mala tvar $\mu > 26$. Na zjednodušenie testovacieho postupu môžeme hypotézu $\mu \leqq 26$ zapísať v tvare rovnosti $\mu = 26$. Týmto krokom nestratíme na všeobecnosti úvah, lebo predpokladáme krajnú prípustnú hranicu odpadu. Teda na základe zistených odpadov počas istého počtu dní (náhodný výber) by sme testovali hypotézu $\mathcal{H}_0\colon \mu = 26$ oproti (vo vzťahu k) alternatívnej hypotézy $\mathcal{H}_1\colon \mu > 26$. Takému testovaniu budeme hovoriť **test zhody parametra so známou konštantou** (parameter je μ a konštanta je 26).

Príklad 11.4. Jeden z ukazovateľov presnosti meracieho prístroja je smerodajná odchýlka σ chyby merania. Výrobca udáva maximálnu smerodajnú odchýlku 4 jednotky. Jeho údaj overíme testovaním hypotézy $\mathcal{H}_0 : \sigma \leqq 4$ oproti alternatívnej hypotéze $\mathcal{H}_1 : \sigma > 4$. Z rovnakých dôvodov ako v predchádzajúcom príklade môžeme $\mathcal{H}_0$ zapísať v tvare $\mathcal{H}_0\colon \sigma = 4$.

Hypotézy oboch príkladov porovnávajú parameter (μ, resp. σ) základného súboru s konkrétnou konštantou, t. j. informujú **o zhode parametra so známou konštantou**.

Príklad 11.5. K zisteniu toho, či priemerná životnosť μ istého výrobku vyrobeného postupom A je väčšia než jeho priemerná životnosť vyrobeného postupom B formulujeme hypotézy $\mu_A \leqq \mu_B$ a $\mu_A > \mu_B$, čo opäť môžeme zapísať takto: testujeme hypotézu $\mathcal{H}_0\colon \mu_A = \mu_B$ oproti alternatívnej $\mathcal{H}_1\colon \mu_A > \mu_B$.

Tu, na rozdiel od prvých dvoch príkladov, hypotézy porovnávajú parametre dvoch základných súborov, t. j. informujú **o zhode parametrov dvoch súborov**

Ďalší typ hypotéz informuje o tom, či distribučná funkcia F náhodnej premennej X je na základe náhodného výberu totožná s nami predpokladanou distribučnou funkciou F_0, čo môžeme zapísať v tvare $\mathcal{H}_0\colon\ F = F_0$ oproti $\mathcal{H}_1\colon\ F \neq F_0$. Hypotézy informujú o **zhode rozdelení pravdepodobnosti**.

Teraz uvedieme základné pojmy testovania štatistických hypotéz:

1. **Nulová hypotéza $\mathcal{H}_0$** je hypotéza (domnienka), ktorej platnosť overujeme. Je napr. tvaru $\mathcal{H}_0 :\ Q = Q_0$, kde Q je parameter základného súboru a Q_0 je konkrétna konštanta. Môžeme ju zapísať aj v tvare $\mathcal{H}_0\colon\ Q - Q_0 = 0$ (porovnávanie s nulou), a preto je štandardne používaný názov nulová hypotéza.

2. **Alternatívna hypotéza $\mathcal{H}_1$** je hypotéza (domnienka), ktorú prijímame v prípade neprijatia nulovej hypotézy. Jej tvar závisí od samotnej formulácie testovania. Uvedieme tieto tri základné tvary:

   a) **pravostranná** alternatívna hypotéza : $\mathcal{H}_1\colon\ Q > Q_0$;

   b) **ľavostranná** alternatívna hypotéza : $\mathcal{H}_1\colon\ Q < Q_0$;

   c) **obojstranná** alternatívna hypotéza : $\mathcal{H}_1\colon\ Q \neq Q_0$.

3. **Testovacia charakteristika G** je istá konkrétna funkcia (presnejšie náhodná premenná) $G = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ktorá závisí od náhodného výberu. Pre každú dvojicu $\mathcal{H}_0$ a $\mathcal{H}_1$ má špeciálny tvar a rozdelenie pravdepodobnosti.

4. **Kritická oblasť K_α** alebo **oblasť zamietnutia** je množina (spravidla interval(y)), ktorá je určená kvantilom testovacej charakteristiky G.

5. Hypotézu $\mathcal{H}_0$ zamietame na hladine významnosti α práve vtedy, keď hodnota testovacej charakteristiky $G \in K_\alpha$ (t. j. prijímame alternatívnu hypotézu $\mathcal{H}_1$.

V rámci zhrnutia problematiky uvádzame etapy testovania štatistických hypotéz:

1. Formulujeme predpoklady o náhodných premenných, ktorých sa testovanie týka.

2. Zvolíme hladinu významnosti α, resp. koeficient spoľahlivosti $\gamma = 1 - \alpha$.

3. Formulujeme nulovú hypotézu $\mathcal{H}_0$ a alternatívnu hypotézu $\mathcal{H}_1$.

4. Zo získaného náhodného výberu vyčíslime hodnotu príslušnej testovacej charakteristiky $G = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

5. Na základe zodpovedajúceho kvantilu určíme kritickú oblasť K_α.

6. Urobíme záver testovania, ktorý spočíva
   – buď v zamietnutí $\mathcal{H}_0$ (a teda prijatí $\mathcal{H}_1$)
   – alebo v prijatí (nezamietnutí) $\mathcal{H}_0$.

11.4. Testy zhody parametra základného súboru so známou konštantou

V tejto časti sa budeme venovať testovaniu štatistických hypotéz na danej hladine významnosti α, ktoré informujú o vzťahu nejakého parametra základného súboru so známou konštantou. Na základe štandardnej formulácie nulovej hypotézy, v zápise ktorej vystupuje rovnosť, môžeme hovoriť **o zhode parametra základného súboru so známou konštantou**. Vo všetkých troch uvedených testoch predpokladáme, že náhodná premenná má normálne rozdelenie pravdepodobnosti, t. j. $X \sim norm(\mu, \sigma)$ a budeme skúmať zhodu parametra μ alebo σ, resp. σ^2, so známou konštantou. K tomu budeme potrebovať jeden náhodný výber rozsahu n s nameranými hodnotami $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (preto týmto testom hovoríme **jednovýberové testy**) a z neho vypočítané výberové charakteristiky $\overline{x}$, σ^* atď. Štruktúra výkladu bude takáto: uvedieme nulovú hypotézu, tvar testovacej charakteristiky a potom typ alternatívnej hypotézy bude uvedený súčasne s kritickou oblasťou K_α (t. j. ak hodnota testovacej charakteristiky patrí do kritickej oblasti, tak nulovú hypotézu zamietame). Nebudeme robiť dôkazy o type rozdelenia pravdepodobnosti jednotlivých testovacích charakteristík, ktorých kvantily vystupujú v zápisoch kritických oblastí.

Y-test zhody strednej hodnoty so známou konštantou μ_0 (σ poznáme)

Nulová hypotéza: $\mathcal{H}_0\colon\ \mu = \mu_0$.
Testovacia charakteristika:

$$Y = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma \cdot \sqrt{n}}\,. \tag{11.18}$$

Kritická oblasť K_α pre alternatívnu hypotézu
a) $\mathcal{H}_1\colon\ \mu > \mu_0$ je $(y_{1-\alpha}\,;\,\infty)$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $Y > y_{1-\alpha}$;

b) $\mathcal{H}_1\colon\ \mu < \mu_0$ je $(-\infty\,;\,-y_{1-\alpha})$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $Y < -y_{1-\alpha}$;

c) $\mathcal{H}_1\colon\ \mu \neq \mu_0$ je $(-\infty\,;\,-y_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (y_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\,\infty)$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $|Y| > y_{1-\frac{\alpha}{2}}$,
kde y_β je β kvantil normovaného normálneho rozdelenia pravdepodobnosti.

Príklad 11.6. Meral sa percentuálny obsah cínu vo vzorkách rudy. Výsledky 74 nezávislých meraní sú v tabuľke, v ktorej v prvom riadku je percentuálny obsah cínu a v druhom riadku zodpovedajúca frekvencia:

%-ný obsah Sn	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
frekvencia n_j	1	3	4	10	15	20	11	5	3	2

,

Predpokladáme, že obsah cínu má normálne rozdelenie s disperziou 85. Na hladine významnosti 0,05 otestujme hypotézu, či priemerný percentuálny obsah cínu v rude a) sa významne líši od hodnoty 52 %; b) je menší než 56 %.

Riešenie. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty percentuálneho obsahu cínu v rude. Zrejme $X \sim norm(\mu, \sqrt{85})$. Ľahko zistíme, že pre tento náhodný výber rozsahu $n = 74$ je $\overline{x} = 53{,}2432$. Takto pre $\alpha = 0{,}05$:
a) pre $\mu_0 = 52$ budeme testovať nulovú hypotézu $\mathcal{H}_0\colon\ \mu = 52$ oproti alternatívnej hypotéze

$\mathcal{H}_1\colon\ \mu \neq 52$. Vyčíslime hodnotu testovacej charakteristiky (11.18):

$$Y = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{53{,}2432 - 52}{\sqrt{85}} \cdot \sqrt{74} \approx 1{,}16.$$

Pre uvažovanú alternatívnu hypotézu nájdeme kvantil $y_{1-\frac{\alpha}{2}} = y_{0{,}975} = 1{,}96$. Keďže $|Y| = 1{,}16 \not> y_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$, tak hypotézu $\mathcal{H}_0$ nezamietame, t. j. na hladine významnosti 0,05 priemerný percentuálny obsah cínu v rude sa významne nelíši od hodnoty 52 %.

V MATLABe by celý výpočet mohol prebiehať takto:
$x = [30, 35*ones(1,3), 40*ones(1,4), 45*ones(1,10), 50*ones(1,15), 55*ones(1,20), 60*ones(1,11), 65*ones(1,5), 70*ones(1,3), 75, 75]$; $n = length(x)$; $alfa = .05$; $y = (mean(x) - 52)*sqrt(n)/sqrt(85)$; $norminv(1 - alfa/2)$;

b) pre $\mu_0 = 56$ budeme testovať nulovú hypotézu $\mathcal{H}_0\colon\ \mu = 56$ oproti alternatívnej hypotéze $\mathcal{H}_1\colon\ \mu < 56$. Tentoraz testovacia charakteristika má hodnotu $Y = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{53{,}2432-56}{\sqrt{85}} \cdot \sqrt{74} = -2{,}5722$ a požadovaný kvantil $y_{1-\alpha} = y_{0{,}95} = 1{,}6449$. Pretože $-2{,}5722 = Y < -y_{1-\alpha} = -1{,}6449$, tak na na hladine významnosti 0,05 priemerný percentuálny obsah cínu v rude je menší než 56 % (hypotézu $\mathcal{H}_0$ zamietame).

<u>t-test zhody strednej hodnoty so známou konštantou μ_0 (σ nepoznáme)</u>

Nulová hypotéza: $\mathcal{H}_0\colon\ \mu = \mu_0$.
Testovacia charakteristika:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s^*} \cdot \sqrt{n}\,. \tag{11.19}$$

Kritická oblasť K_α pre alternatívnu hypotézu
a) $\mathcal{H}_1\colon\ \mu > \mu_0$ je $(t_{1-\alpha,\,n-1}\,;\,\infty)$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $t > t_{1-\alpha,\,n-1}$;

b) $\mathcal{H}_1\colon\ \mu < \mu_0$ je $(-\infty\,;\,-t_{1-\alpha,\,n-1})$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $t < -t_{1-\alpha,\,n-1}$;

c) $\mathcal{H}_1: \mu \neq \mu_0$ je $(-\infty\,; -t_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}\,; \infty)$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre
$|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}$,
kde $t_{\beta,\,n-1}$ je β kvantil Studentovho t-rozdelenia pravdepodobnosti.

Príklad 11.7. Riešme príklad z predchádzajúceho odseku v prípade, že rozptyl σ^2 je neznámy.

Riešenie. Nulové a alternatívne hypotézy sa nemenia.
a) Pre daný výber je $s^* = 9{,}1574$ a testovacia charakteristika má podľa (11.19) hodnotu:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{53{,}2432 - 52}{9{,}1574} \cdot \sqrt{74} \approx 1{,}1679.$$

Pre požadovaný kvantil platí

$$|t| = 1{,}1679 \not> t_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1} = t_{0{,}975;\,73} = 1{,}9930,$$

a preto hypotézu $\mathcal{H}_0$ nezamietame.
b) Testovacia charakteristika má hodnotu $t = \frac{53{,}2432-56}{9{,}1574} \cdot \sqrt{74} = -2{,}5897$ a keďže $-2{,}5897 = t < -t_{1-\alpha;\,n-1} = -t_{0{,}95;\,73} = -1{,}6660$, tak opäť prijímame rovnaký záver ako v predchádzajúcom príklade.

Poznámka 11.3. Porovnajte si hodnoty testovacích charakteristík a príslušných kvantilov v posledných dvoch príkladoch, ktoré sa líšili v tom, či σ poznáme alebo nepoznáme.

χ^2-test zhody rozptylu σ^2 so známou konštantou σ_0^2

Nulová hypotéza: $\mathcal{H}_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$.
Testovacia charakteristika:

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot s^{*2}. \tag{11.20}$$

Kritická oblasť K_α pre alternatívnu hypotézu

a) $\mathcal{H}_1\colon\ \sigma^2 > \sigma_0^2$ je $(\chi^2_{1-\alpha,\,n-1}\,;\,\infty)$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,\,n-1}$;

b) $\mathcal{H}_1\colon\ \sigma^2 < \sigma_0^2$ je $(0;\,\chi^2_{\alpha,\,n-1})$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,\,n-1}$;

c) $\mathcal{H}_1\colon\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ je $(0;\,\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,n-1}) \cup (\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}\,;\,\infty)$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre
$\chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,n-1}$ alebo pre $\chi^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}$,

kde $\chi^2_{\beta,\,n-1}$ je β kvantil χ^2 rozdelenia pravdepodobnosti.

Príklad 11.8. Nech $X \sim norm(\mu, \sigma)$ je náhodná premenná, pričom v náhodnom výbere boli namerané hodnoty, ktoré sú uvedené v tabuľke (11.3). S koeficientom spoľahlivosti $\gamma = 0{,}1$ overme, či je jej disperzia σ^2 väčšia než 18.

Riešenie. Intervalové triedenie nameraných hodnôt náhodného výberu prepíšeme pomocou reprezentantov jednotlivých intervalov:

x_j	18	22	26	30	34
n_j	2	7	5	4	1

a vypočítame modifikovaný výberový rozptyl. Overte, že $s^{*2} = 19{,}2749$.
Formulácia úlohy vyžaduje vykonať χ^2-test zhody rozptylu σ^2 so známou konštantou $\sigma_0^2 = 18$. Rozhodujeme medzi hypotézami $\mathcal{H}_0 :\ \sigma^2 = 18$ a $\mathcal{H}_1 :\ \sigma^2 > 18$. Testovacia charakteristika (11.20) má pre náš výber ($n = 19$) hodnotu

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot s^{*2} = \frac{19-1}{18} \cdot 19{,}2749 = 19{,}2749.$$

Máme $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}9$. Nájdeme zodpovedajúcu hodnotu kvantilu: $\chi^2_{1-\alpha,\,n-1} =$
$= \chi^2_{0{,}9;\,18} = 25{,}9894$. Keďže $19,2749 = \chi^2 \not> \chi^2_{1-\alpha,\,n-1} = 25{,}9894$, tak prijímame hypotézu $\mathcal{H}_0$, t. j. s 90 %-nou spoľahlivosťou nemôžeme tvrdiť, že skúmaný rozptyl je väčší než 18.

Poznámka 11.4. Pri voľbe spoľahlivosti testu $\gamma = 0{,}6$ by sme v poslednom príklade zistili, že platí hypotéza $\mathcal{H}_1$, t. j. rozptyl je väčší než 18. Spoľahlivosť (hodnovernosť) tohto záveru je však výrazne nižšia než spoľahlivosť záveru z príkladu.

11.5. Testy zhody parametrov dvoch základných súborov

Nech Q_1 je istý parameter náhodnej premennej X_1 jedného základného súboru a Q_2 je „rovnocenný“ parameter náhodnej premennej X_2 iného základného súboru. Venujme sa testovaniu štatistických hypotéz na danej hladine významnosti α, ktoré informujú o vzťahu týchto parametrov Q_1 a Q_2 (napr. porovnanie priemernej hmotnosti štyridsaťročných Slovákov s priemernou hmotnosťou štyridsaťročných Japoncov). Nulová hypotéza bude v tvare rovnosti $Q_1 = Q_2$ a alternatívna hypotéza bude práve v jednom z tvarov $Q_1 \neq Q_2$ alebo $Q_1 > Q_2$ alebo $Q_1 < Q_2$. Takéto testovanie má význam len v prípade, keď obe náhodné premenné majú rovnaký typ (zákon) rozdelenia pravdepodobnosti a ak sú nezávislé. K prijatiu jednej z dvoch testovaných hypotéz musíme predpokladať, že z prvého základného súboru máme k dispozícii náhodný výber o rozsahu n_1 s nameranými hodnotami $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$ a z neho vypočítané výberové charakteristiky $\overline{x}_1$, s_1^* atď. a tiež z druhého základného súboru máme k dispozícii náhodný výber o rozsahu n_2 s nameranými hodnotami $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$ a z neho vypočítané výberové charakteristiky $\overline{x}_2$, s_2^* atď. (preto týmto testom hovoríme **dvojvýberové testy**).

Vo všetkých nižšie uvedených testoch predpokladáme, že obe náhodné premenné majú normálne rozdelenie pravdepodobnosti, t. j. $X_1 \sim norm(\mu_1, \sigma_1)$ a $X_2 \sim norm(\mu_2, \sigma_2)$, pričom budeme skúmať zhodu parametrov μ_1 a μ_2 alebo zhodu σ_1^2 so σ_2^2.

Štruktúra výkladu bude obdobná ako pri jednovýberových testoch.

Y-test zhody dvoch stredných hodnôt μ_1 a μ_2 (σ_1, σ_2 poznáme)

Nulová hypotéza: $\mathcal{H}_0\colon\ \mu_1 = \mu_2$.
Testovacia charakteristika:

$$Y = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{n_2 \cdot \sigma_1^2 + n_1 \cdot \sigma_2^2}} \cdot \sqrt{n_1 \cdot n_2}\,. \tag{11.21}$$

Kritická oblasť K_α pre alternatívnu hypotézu

a) $\mathcal{H}_1\colon\ \mu_1 > \mu_2$ je $(y_{1-\alpha}\,;\,\infty)$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $Y > y_{1-\alpha}$;

b) $\mathcal{H}_1\colon\ \mu_1 < \mu_2$ je $(-\infty\,;\,-y_{1-\alpha})$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $Y < -y_{1-\alpha}$;

c) $\mathcal{H}_1\colon\ \mu_1 \neq \mu_2$ je $(-\infty\,;\,-y_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (y_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\,\infty)$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $|Y| > y_{1-\frac{\alpha}{2}}$,

kde y_β je β kvantil normovaného normálneho rozdelenia pravdepodobnosti.

Príklad 11.9. Na náhodne vybraných osobných autách dvoch typov A a B sa zistila takáto priemerná spotreba benzínu v litroch na 100 km jazdy na diaľnici:

spotreba ℓ/100 km	6,8	6,9	7	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,9
n_j pre typ A	1	0	3	6	14	10	5	2	0	1
n_j pre typ B	0	1	2	7	20	14	7	2	1	0

Nech X_A (X_B) je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty priemernej spotreby benzínu v litroch na 100 km jazdy na diaľnici osobným autom typu A (B) a nech $X_A \sim$ $\sim$ *norm*$(\mu_A; 0{,}2)$ a $X_B \sim$ *norm*$(\mu_B; 0{,}15)$. Overme na hladine významnosti 0,01, či sa sledovaná priemerná spotreba benzínu u oboch typov áut výrazne líši.

Riešenie. Budeme testovať nulovú hypotézu $\mathcal{H}_0\colon\ \mu_A = \mu_B$ oproti alternatívnej hypotéze $\mathcal{H}_1\colon\ \mu_A \neq \mu_B$. Z realizovaných náhodných výberov môžeme ľahko určiť tieto výberové charakteristiky: $n_A = 42$, $n_B = 54$, $\overline{x}_A = 7{,}3286$ a $\overline{x}_B = 7{,}3389$. Keďže $\sigma_A = 0{,}2$ a $\sigma_B =$ $= 0{,}15$, tak testovacia charakteristika (11.21) má pre uvažované náhodné výbery hodnotu

$$Y = \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{\sqrt{n_B \cdot \sigma_A^2 + n_A \cdot \sigma_B^2}} \cdot \sqrt{n_A \cdot n_B} = \frac{7{,}3286 - 7{,}3389}{\sqrt{54 \cdot 0{,}04 + 42 \cdot 0{,}0225}} \cdot \sqrt{42 \cdot 54} = -0{,}1580.$$

K uvažovanému testu určíme tento kvantil: $y_{1-\frac{\alpha}{2}} = y_{0{,}995} = 2{,}5758$.

Keďže 0,1580 $= |Y| \not> y_{1-\frac{\alpha}{2}} =$ 2,5758, tak hypotézu $\mathcal{H}_0$ na hladine významnosti 0,01 nezamietame, t. j. na 99 % nie je významný rozdiel medzi sledovanými spotrebami benzínu.

<u>t-test zhody dvoch stredných hodnôt μ_1 a μ_2 (σ_1, σ_2 nepoznáme)</u>

Nulová hypotéza: $\mathcal{H}_0\colon\ \mu_1 = \mu_2$.

Ak $n_1 > 30$ **a** $n_2 > 30$, tak položíme $\sigma_1 = s_1^*$ a $\sigma_1 = s_1^*$ a použijeme Y-test s testovacou charaktoristikou (11.21).
Ak $n_1 \leqq 30$ **alebo** $n_2 \leqq 30$, tak pri ďalšom predpoklade $\sigma_1 = \sigma_2$ máme:
Testovacia charakteristika:

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}}{\sqrt{(n_1 - 1) \cdot s_1^{*2} + (n_2 - 1) \cdot s_2^{*2}}}\,. \tag{11.22}$$

Kritická oblasť K_α pre alternatívnu hypotézu
a) $\mathcal{H}_1\colon\ \mu_1 > \mu_2$ je $(t_{1-\alpha,\,m}\,;\,\infty)$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $t > t_{1-\alpha,\,m}$;

b) $\mathcal{H}_1\colon\ \mu_1 < \mu_2$ je $(-\infty\,;\,-t_{1-\alpha,\,m})$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $t < -t_{1-\alpha,\,m}$;

c) $\mathcal{H}_1\colon\ \mu_1 \neq \mu_2$ je $(-\infty\,;\,-t_{1-\frac{\alpha}{2},\,m}) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2},\,m}\,;\,\infty)$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2},\,m}$,

kde $t_{\beta,m}$ je β kvantil Studentovho t-rozdelenia pravdepodobnosti a $m = n_1 + n_2 - 2$.

Príklad 11.10. V príklade predchádzajúceho odseku sme mali $n_A = 42 > 30$ a $n_B = 54 > 30$, a preto by sme ho riešili rovnakým postupom aj v prípade neznámych smerodajných odchýlok σ_A a σ_B. Položili by sme $\sigma_A = s_A^* =$ 0,1838 a $\sigma_B = s_B^* =$ 0,1433. Testovacia charakteristika (11.21) by mala hodnotu $Y = -$0,0308 a dospeli by sme k tomu istému záveru (premyslite si to).

Príklad 11.11. Istý výrobok sa vyrába dvoma technologickými postupmi. Pri náhodne vybraných výrobkoch sa zistili tieto údaje x_i o určitej kvalitatívnej vlastnosti (väčšia nameraná hodnota znamená kvalitnejší výrobok):

hodnota x_i	30	31	32	33	34	35	36
n_j pre postup A	1	0	3	7	4	1	0
n_j pre postup B	0	1	3	6	5	0	1

Rozhodnime na hladine významnosti 5 %, či technologickým postupom B sa dosahuje vyššia kvalita výrobkov než postupom A, ak je známe, že pri oboch postupoch kvalita výrobkov má normálne rozdelenie pravdepodobnosti.

Riešenie. Nech X_A (X_B) je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty priemerného ukazovateľa kvality výrobku, ktorý je vyrobený postupom A (B) a nech $X_A \sim norm(\mu_A, \sigma_A)$ a $X_B \sim norm(\mu_B, \sigma_B)$ (v súlade s textom príkladu). Budeme testovať nulovú hypotézu $\mathcal{H}_0\colon\ \mu_A = \mu_B$ oproti alternatívnej hypotéze $\mathcal{H}_1\colon\ \mu_A < \mu_B$.

Z realizovaných náhodných výberov môžeme ľahko určiť tieto výberové charakteristiky: $n_A = 16 \leqq 30$, $n_B = 16$ (t. j. nemôžeme použiť postup riešenia z predchádzajúceho príkladu), $\overline{x}_A = 33$, $\overline{x}_B = 33{,}1875$, $s_A^* = 1{,}1547$ a $s_B^* = 1{,}1673$. Vidno, že hodnoty oboch výberových modifikovaných smerodajných odchýlok s_A^* a s_B^* sa „veľmi nelíšia“, a preto môžeme prijať predpoklad, že $\sigma_A = \sigma_B$. Použijeme testovaciu charakteristiku (11.22), ktorá má pre $n_1 = n_2 = n$ (čo je náš prípad) tvar (overte):

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{s_1^{*2} + s_2^{*2}}} \cdot \sqrt{n} = \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{\sqrt{s_A^{*2} + s_B^{*2}}} \cdot \sqrt{n} = \frac{33 - 33{,}1875}{\sqrt{1{,}1547^2 + 1{,}1673^2}} \cdot \sqrt{16} = -0{,}2782.$$

Pretože $m = n_A + n_B - 2 = 16 + 16 - 2 = 30$ a pre kvantil $t_{1-\alpha,\,m} = t_{0{,}95;30} = 1{,}6973$ dostaneme $-0{,}2782 = t \not< -t_{1-\alpha,\,m} = -1{,}6973$, a preto hypotézu $\mathcal{H}_1$ neprijímame t. j. na základe poskytnutých náhodných výberov so spoľahlivosťou 95 % nemôžeme tvrdiť, že výrobný postup B poskytuje kvalitnejšie výrobky. Pre zaujímavosť: overte, že so spoľahlivosťou 60 % môžeme tvrdiť, že výrobný postup B poskytuje kvalitnejšie výrobky!

F-test zhody rozptylov σ_1^2 a σ_2^2

Nulová hypotéza: $\mathcal{H}_0\colon\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
Testovacia charakteristika:

$$F = \frac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}} \tag{11.23}$$

pričom indexy $_1$ a $_2$ volíme tak, aby platilo $s_1^* > s_2^*$.
Kritická oblasť K_α pre alternatívnu hypotézu
a) $\mathcal{H}_1\colon\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ je $(F_{1-\alpha\,;m_1,m_2}\,;\,\infty)$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $F > F_{1-\alpha\,;m_1,m_2}$;

b) $\mathcal{H}_1\colon\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ je $(F_{1-\frac{\alpha}{2}\,;m_1,m_2}\,;\,\infty)$, t. j. $\mathcal{H}_0$ zamietame pre $F > F_{1-\frac{\alpha}{2}\,;m_1,m_2}$,

kde $m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$ a $F_{\beta\,;m_1,m_2}$ je β kvantil Fisherovho-Snedecorovho rozdelenia pravdepodobnosti.

Príklad 11.12. Z údajov predchádzajúceho príkladu overme na hladine významnosti 0,1, či sa rozptyly základných súborov významne líšia.

Riešenie. Najskôr vhodne očíslujeme súbory: požiadavka $s_1^* > s_2^*$ je splnená, ak index $_1$ priradíme výrobnému postupu B a index $_2$ výrobnému postupu A, t. j. $s_B^* = s_1^* = 1{,}1673$ a $s_A^* = s_2^* = 1{,}1547$. Takto testujeme hypotézu $\mathcal{H}_0\colon\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ oproti hypotéze $\mathcal{H}_0\colon\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Pre testovaciu charakteristiku (11.23) máme

$$F = \frac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}} = \frac{1{,}1673^2}{1{,}1547^2} = 1{,}0219$$

a pre príslušný kvantil $F_{1-\frac{\alpha}{2}\,;m_1,m_2} = F_{0{,}95;15{,}15} = 2,4034$. Pretože

$$1{,}0219 = F \not> F_{1-\frac{\alpha}{2}\,;m_1,m_2} = 2{,}4034\,,$$

tak hypotézu $\mathcal{H}_0$ nezamietame, t. j. na danej hladine významnosti sa rozptyly významne nelíšia.

11.6. Poznámky k odhadom parametrov a testovaniu štatistických hypotéz

V predchádzajúcich dvoch kapitolách sme sa zaoberali bodovými a intervalovými odhadmi parametrov základného súboru a testovaním štatistických hypotéz o parametroch. Všetky úvahy boli sústredené len na v praxi najdôležitejšie rozdelenie pravdepodobnosti, a to na normálne rozdelenie pravdepodobnosti. Táto problematika je obsiahnutá v odporúčanej literatúre aj pre ďalšie typy rozdelení pravdepodobnosti.

Veľmi dôležitou úlohou v matematickej štatistike je tzv. **testovanie zhody rozdelení pravdepodobnosti**, v rámci ktorého na podklade náhodného výberu sa zisťuje, či náhodná premenná má alebo nemá predpokladané konkrétne rozdelenie pravdepodobnosti. Najčastejšie sa pri tom používa **Pearsonov test, Kolmogorovov test, Kolmogorovov-Smirnovov test** a ďalšie.

Zaujímavé sú aj **testy extrémnych odchýlok**, pri ktorých sa testuje, či napr. najmenšia nameraná hodnota, ktorá je „výrazne menšia od ostatných nameraných hodnôt“ nie je zaťažená tzv. hrubou chybou merania. Ak to test potvrdí, tak takúto extrémnu hodnotu vylúčime z nameraných hodnôt. Používa sa k tomu napr. **Grubbsov** alebo **Dixonov test**.

Úlohy

11.1. Náhodným výberom boli namerané tieto časy príchodov študentov pred začiatkom prednášky v min.: 5,1; 0,5; 2,2; 2,5; 7,1; 1,6; −2,3; 2,8; 4,0; 3,3; 6,7; −3,9; 1,9; 2,4; 1,6; −1,1. Vypočítajte výberový priemer, výberový rozptyl, výberový modifikovaný rozptyl, výberovú smerodajnú odchýlku a výberovú modifikovanú smerodajnú odchýlku časov príchodu študentov pred začiatkom prednášky. [2,15; 8,1012; 8,6413; 2,8463; 2,9396]

11.2. V laboratóriu bol meraný percentuálny obsah medi v istej zliatine. Výsledky meraní sú v tabuľke (n_i sú frekvencie):

x_i	3,0	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8
n_i	4	7	12	18	21	13	5

.

Vypočítajte výberový priemer, výberový rozptyl, výberový modifikovaný rozptyl, výberovú smerodajnú odchýlku a výberovú modifikovanú smerodajnú odchýlku percentuálneho obsahu medi v zliatine. [3,99; 0,2102; 0,2128; 0,4584; 0,4613]

11.3. Zo základného súboru bol urobený náhodný výber s týmito nameranými intervalovými hodnotami a ich frekvenciami sledovaného znaku

x_i	15 – 17	17 – 19	19 – 21	21 – 23	23 – 25	25 – 27
n_i	10	30	50	70	60	30

Vypočítajte $\overline{x}$, s^2, s^{*2}, s a s^*. [21,84; 7,0144; 7,0426; 2,6485; 2,6538]

11.4. Náhodný výber 32 analýz na overenie koncentrácie istej chemickej látky v roztoku poskytol tieto výsledky:

x_i	9	11	12	14	15	16	17	18	20	21
n_i	1	2	3	4	7	5	4	3	2	1

Predpokladáme normálne rozdelenie pravdepodobnosti koncentrácie so známym $\sigma^2 = 7{,}4$. Určte: a) obojstranný interval spoľahlivosti pre neznámu strednú hodnotu μ na hladine významnosti 0,01; b) 99 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre μ; c) pravostranný interval spoľahlivosti pre μ s koeficientom spoľahlivosti 0,95.

[a) $\langle 14{,}1051; 16{,}5824\rangle$; b) $\langle 14{,}2250; \infty)$; c) $(-\infty; 16{,}1347\rangle$]

11.5. Zo základného súboru s normálnym rozdelením, kde je známy rozptyl $\sigma^2 = 0{,}06$ bol urobený náhodný výber s nameranými hodnotami: 1,3; 1,8; 1,4; 1,2; 0,9; 1,5 a 1,7. Určte: a) 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ; b) ľavostranný interval spoľahlivosti pre μ s koeficientom spoľahlivosti 0,9; c) pravostranný interval spoľahlivosti pre μ na hladine významnosti 0,01. [a) $\langle 1{,}2185; 1{,}5815\rangle$; b) $\langle 1{,}2814; \infty)$; c) $(-\infty; 1{,}6154\rangle$]

11.6. Za predpokladu, že čas príchodu študentov na prednášku sa riadi normálnym rozdelením pravdepodobnosti s nameranými hodnotami na náhodnom výbere z prvého príkladu, určte a) 99,5 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu času príchodu na prednášku; b) 99 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre rozptyl času príchodu na prednášku. [a) $\langle -0{,}2649; 4{,}5649\rangle$; b) $(0; 24{,}7870\rangle$]

11.7. Zo základného súboru s normálnym rozdelením pravdepodobnosti sa urobil náhodný výber s nameranými hodnotami 22,4; 28,0; 20,1; 27,4; 25,6; 23,9; 24,8; 26,4; 27,0 a 25,4. Pre strednú hodnotu μ určte 95 %-ný obojstranný a oba jednostranné intervaly spoľahlivosti. [$\langle 23{,}7993; 27{,}0007\rangle$; $\langle 24{,}1029; \infty)$; $(-\infty; 26{,}6971\rangle$]

11.8. Na náhodnom výbere sto vyrobených súčiastok sa zisťovala ich hmotnosť. Na základe výsledkov meraní bola určená modifikovaná výberová disperzia $s^{*2} = 134{,}7$. Vypočítajte: a) 99 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre rozptyl a smerodajnú odchýlku základného súboru; b) ľavostranný interval spoľahlivosti pre σ^2 s koeficientom spoľahlivosti 0,95; c) pravostranný interval spoľahlivosti pre disperziu na hladine významnosti 0,05.

$$\begin{bmatrix} \text{a) } \langle 95{,}9465; 200{,}5004\rangle;\ \langle 9{,}7952; 14{,}1598\rangle; \\ \text{b) } \langle 108{,}2189; \infty);\ \text{c) } (0; 173{,}0816\rangle \end{bmatrix}$$

11.9. Zo základného súboru bol urobený náhodný výber s nameranými intervalovými hodnotami a ich frekvenciami, ktoré sú uvedené v treťom príklade. Určte: a) interval, v ktorom sa nachádza stredná hodnota μ s pravdepodobnosťou 0,95; b) hodnotu, pod ktorú sa s pravdepodobnosťou 0,95 stredná hodnota nedostane; c) hranice, v ktorých sa nachádza smerodajná odchýlka s pravdepodobnosťou 0,95; d) hodnotu, ktorú s pravdepodobnosťou 0,95 rozptyl neprekročí. [a) $\langle 21{,}5094; 22{,}1706\rangle$; b) 21,5629; c) $\langle 2{,}4398; 2{,}9093\rangle$; d) 8,2149]

11.10. Pri tradičnom spôsobe opracovania súčiastok sa dosahovali priemerné hodnoty 4,4 istej kvalitatívnej vlastnosti so smerodajnou odchýlkou $\sigma = 0{,}4$. Pokusne sa zavádza nová metóda opracovania súčiastok, ktorou opracovali 20 súčiastok a dosiahli sa takéto výsledky: 4,5; 4,3; 4,1; 4,9; 4,6; 3,6; 4,7; 5,1; 4,8; 4,0; 3,7; 4,4; 4,9; 4,9; 5,2; 5,1; 4,7; 4,9; 4,6; 4,8. Na hladine významnosti 0,05 testujte hypotézu $\mathcal{H}_0: \ \mu = 4{,}4$ oproti $\mathcal{H}_1: \ \mu > 4{,}4$ za predpokladu normálneho rozdelenia pravdepodobnosti hodnôt sledovanej vlastnosti.

$[Y = 2{,}1243 > norminv(0.95) = 1{,}6449 \Rightarrow \mathcal{H}_1]$

11.11. Z krabice sme náhodne vybrali 10 klincov s dĺžkami [v mm]: 82, 80, 82, 81, 81, 80, 81, 81, 82 a 81. Na hladine významnosti 5 % otestujte, či sa stredná hodnota dĺžok klincov významne líši od hodnoty 80 mm udanej na krabici, za predpokladu normálneho rozdelenia pravdepodobnosti dĺžok všetkých klincov.

$[\mathcal{H}_0\colon\ \mu = 80;\ \mathcal{H}_1\colon\ \mu \neq 80;\ |t| = 4{,}7143 > tinv(0.975, 9) = 2{,}2622 \Rightarrow \mathcal{H}_1]$

11.12. Na náhodnom výbere bola meraná koncentrácia istej chemickej látky v roztoku (v %) s týmito výsledkami: 30, 32, 34, 40, 36, 37, 36, 38, 35, 42. Na hladine významnosti 0,05 testujte hypotézu $\mathcal{H}_0\colon\ \mu = 38$ oproti $\mathcal{H}_1\colon\ \mu < 38$ za predpokladu, že základný súbor má normálne rozdelenie pravdepodobnosti.

$[t = -1{,}7770 \not< -tinv(0.95, 9) = -1{,}8331 \Rightarrow \mathcal{H}_0]$

11.13. Linka mestskej autobusovej dopravy má v dobe dopravnej špičky priemernú rýchlosť v centre mesta 8 km/hod. Zisťovalo sa, či by zmena trasy viedla k zvýšeniu priemernej rýchlosti. Nová trasa bola prejdená v desiatich náhodne vybraných dňoch a v dobe dopravnej špičky boli zistené tieto priemerné rýchlosti: 8,5; 9,5; 7,8; 8,2; 9,0; 7,5; 8,2; 7,8; 9,0 a 8,5. Na hladine významnosti a) 0,01; b) 0,05 zistite, či zmena trasy vedie k zvýšeniu priemernej rýchlosti za predpokladu normálneho rozdelenia pravdepodobnosti priemernej rýchlosti.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{H}_0\colon\ \mu = 8 \quad \mathcal{H}_1\colon\ \mu > 8 \\ \text{a) } t = 2{,}0112 \not> tinv(0.99, 9) = 2{,}8214 \Rightarrow \mathcal{H}_0; \\ \text{b) } t = 2{,}0112 > tinv(0.95, 9) = 1{,}8331 \Rightarrow \mathcal{H}_1 \end{array}\right]$$

11.14. Vzorky chemickej látky boli analyzované polarografickou metódou s nameranými výsledkami 38,2; 36,4; 37,7; 36,1; 37,9; 37,8 a titračnou metódou s nameranými výsledkami 39,5; 38,7; 37,8; 38,6; 39,2; 39,1; 38,9; 39,2. Je známe, že pri oboch meraniach ide o normálne rozdelenie pravdepodobnosti s rovnakými disperziami. Na hladine významnosti 5 % overte hypotézu o rovcennosti oboch metód.

$$\left[\begin{array}{l}\mathcal{H}_0\colon\ \mu_p=\mu_t \quad \mathcal{H}_1\colon\ \mu_p\neq\mu_t\\ |t|=4{,}0864>tinv(0.975,12)=2{,}1788\Rightarrow\mathcal{H}_1\end{array}\right]$$

11.15. Napätie v jadre určitého typu mikroprocesora má prípustnú variabilitu, ktorá je vyjadrená smerodajnou odchýlkou 0,025 [V]. Náhodne vybraných 9 mikroprocesorov tohto typu dalo takéto hodnoty napätia [V]: 1,02; 1,05; 0,97; 1,01; 0,98; 1,03; 0,96; 1,00 a 0,98. Na hladine významnosti 0,05 overte, či je dodržaná prípustná variabilita napätia u tohto typu mikroprocesora alebo je v skutočnosti vyššia. (Predpokladáme normálne rozdelenie pravdepodobnosti napätia).

$$\left[\begin{array}{l}\mathcal{H}_0\colon\ \sigma^2=0{,}025^2 \quad \mathcal{H}_1\colon\ \sigma^2>0{,}025^2\\ \chi^2=11{,}5200\not>chi2inv(0.95,8)=15{,}5073\Rightarrow\mathcal{H}_0\end{array}\right]$$

11.16. Podľa informácií výrobcu je variabilita životnosti vyrábaných obrazoviek vyjadrená smerodajnou odchýlkou 45 hod. O životnosti náhodne vybraných 50 obrazoviek, vyrobených u tohto výrobcu, boli zistené tieto údaje (intervalové triedenie):

I_j	1860– –1900	1900– –1940	1940– –1980	1980– –2020	2020– –2060	2060– –2100	2100– –2140
n_j	1	4	12	14	15	3	1

Testom na hladine významnosti 2 % overte, či sa dá prijať predpoklad, že je variabilita životnosti obrazoviek taká, ako tvrdí výrobca alebo nie (predpokladáme normálne rozdelenie pravdepodobnosti životnosti obrazoviek).

$$\left[\begin{array}{l}\mathcal{H}_0\colon\ \sigma^2=45^2 \quad \mathcal{H}_1\colon\ \sigma^2\neq 45^2\\ \chi^2=57{,}6632\in\langle 28{,}9406;74{,}9195\rangle=\\ \quad =\langle chi2inv(0.01,49),\ chi2inv(0.99,49)\rangle\Rightarrow\mathcal{H}_0\end{array}\right]$$

11.17. Prístroj meral dobu reakcie na svetelný signál v stotinách sekundy u desiatich náhodne vybraných vodičov z povolania, pričom bol zistený výberový priemer $\overline{x}_p=34$ a u dvadsiatich čerstvých absolventov autoškoly, kde bol zistený výberový priemer $\overline{x}_a=42$, pričom poznáme disperzie $\sigma_p^2=3$ a $\sigma_a^2=6$. Na hladine významnosti 0,05 rozhodnite, či doba reakcie na svetelný signál závisí od dĺžky praxe vodiča (v oboch prípadoch predpokladáme normálne rozdelenie pravdepodobnosti doby reakcie vodičov na svetelný signál).

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{H}_0\colon\ \mu_p = \mu_a \quad \mathcal{H}_1\colon\ \mu_p \neq \mu_a \\ |Y| = 10{,}3280 > norminv(0.975) = 1{,}9600 \Rightarrow \mathcal{H}_1 \end{array}\right]$$

11.18. Určitý výrobok sa vyrába dvoma technologickými postupmi. Kontrolným meraním boli zistené pri náhodne vybraných výrobkoch tieto údaje o určitej kvalitatívnej vlastnosti: pri postupe A: 13, 15, 15, 14 a 13 a pri postupe B: 13, 12, 14, 13, 13, 15 a 16. Na hladine významnosti 5 % rozhodnite, či sa disperzia kvality pri oboch technologických postupoch významne líši (predpokladáme normálne rozdelenie pravdepodobnosti hodnôt sledovanej vlastnosti).

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{H}_0\colon\ \sigma_B^2 = \sigma_A^2 \quad \mathcal{H}_1\colon\ \sigma_B^2 \neq \sigma_A^2 \\ F = \dfrac{s_B^{*2}}{s_A^{*2}} = 1{,}90480 \not> finv(0.975, 6, 4) = 6{,}2272 \Rightarrow \mathcal{H}_0 \end{array}\right]$$

12. Korelačná a regresná analýza

V praktických úlohách často potrebujeme rozhodnúť o závislosti náhodnej premennej od jednej alebo niekoľkých náhodných premenných. Medzi dvoma náhodnými premennými môže

1. existovať funkčná závislosť (poznáme konkrétny predpis, ktorý udáva súvislosť oboch náhodných premenných);
2. existovať stochastická (náhodná) závislosť;
3. neexistovať závislosť, t. j. náhodné premenné sú nezávislé.

Prvým prípadom sa nebudeme hlbšie zaoberať. Ak sú náhodné premenné X a Y nezávislé, tak pre koeficient korelácie $\rho(X, Y)$ platí $\rho(X, Y) = 0$ (pripomíname, že $|\rho(X, Y)| \leqq 1$). Táto podmienka je však nutnou podmienkou nezávislosti náhodných premenných, ale nie postačujúcou. V prípade $\rho(X, Y) = 0$ nazývame náhodné premenné X a Y **nekorelované** a v prípade $\rho(X, Y) \neq 0$ im hovoríme **korelované**. Koeficient korelácie ρ poskytuje informáciu **o miere závislosti** (hovoríme tomu aj **tesnosť väzby**) náhodných pemenných X a Y. Časť matematickej štatistiky, ktorá sa zaoberá štúdiom tejto miery závíslosti hovoríme **korelačná analýza**. Tvarom (typom) závislosti dvoch náhodných premenných sa zaoberá **regresná analýza**.

Je samozrejmé, že korelačná aj regresná analýza v matematickej štatistike je založená na náhodných výberoch a z nich získaných výberových charakteristík. Budeme predpokladať, že v rámci náhodného výberu V_n sme namerali náhodné hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ náhodnej premennej X a im zodpovedajúce hodnoty $y_1, y_2, \ldots, y_n$ náhodnej premennej Y. Tým je náhodný výber V_n z usporiadanej dvojice náhodných premenných (X, Y) reprezentovaný usporiadanými dvojicami $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ (pozri napr. ľubovoľný príklad v časti regresná analýza).

12.1. Korelačná analýza

Budeme sa zaoberať len bodovými odhadmi koeficientu korelácie $\rho(X, Y)$ systému dvoch náhodných premenných. Ich odhady sú prirodzeným pokračovaním bodových odhadov strednej hodnoty a disperzie jednej náhodnej premennej (pozri poznámku o diskrétnom rovnomernom rozdelení pri definíciach výberového priemeru a rozptylu).

Definícia 12.1. Nech (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ sú namerané hodnoty nezávislého náhodného výberu V_n systému dvoch náhodných premenných (X, Y), nech $\overline{x}$ a $\overline{y}$ sú ich výberové priemery a nech s_x a s_y sú ich výberové smerodajné odchýlky.
Výberová kovariancia k_{xy} je číslo

$$k_{xy} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y}), \tag{12.1}$$

výberová modifikovaná kovariancia k^*_{xy} je číslo

$$k^*_{xy} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y}) = \frac{n}{n-1} \cdot k_{xy} \tag{12.2}$$

a **výberový korelačný koeficient** r_{xy} je číslo

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{k^*_{xy}}{s^*_x \cdot s^*_y}. \tag{12.3}$$

Poznámka 12.1. Pripomíname, že

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i; \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}; \quad s^*_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2};$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i; \quad s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}; \quad \text{a} \quad s_y^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}.$$

Ak zavedieme prirodzené označenia:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \qquad \text{a} \qquad \overline{x\cdot y} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i\,,$$

tak jednoduchými úpravami dostaneme

$$s_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \qquad s_y^2 = \overline{y^2} - (\overline{y})^2, \qquad k_{xy} = \overline{x\cdot y} - \overline{x}\cdot\overline{y} \tag{12.4}$$

a pre výberový korelačný koeficient

$$r_{xy} = \frac{\overline{x\cdot y} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}}\,. \tag{12.5}$$

Výberový korelačný koeficient r_{xy} je bodovým odhadom korelačného koeficientu $\rho(X, Y)$ systému dvoch náhodných premenných X a Y. Aj je koeficient r_{xy} rovný nule alebo blízke k nule, tak náhodné premenné X a Y môžeme považovať za štatisticky nekorelované, a teda „temer nezávislé“. Z druhej strany, ak je hodnota $|r_{xy}|$ blízka k jednej, tak je tu „štatistické podozrenie“ o lineárnej závislosti medzi X a Y. Toto sú, bohužiaľ, nie vždy správne závery. Vyžadovalo by si to preniknúť hlbšie do problematiky štatistického posudzovania miery závislosti medzi náhodnými premennými.

12.2. Regresná analýza

Nech x je pevná (nie náhodná) alebo náhodná premenná a Y je náhodná premenná a nech tzv. **podmienená stredná hodnota náhodnej premennej** Y je funkciou (závisí od) premennej x a parametrov a_0, a_1, $\dots$, a_k, t. j.

$$E(Y|x) = \varphi = \varphi(x;\, a_0, a_1, \dots, a_k) \tag{12.6}$$

Predpokladajme, že tvar funkcie φ poznáme, ale hodnoty parametrov a_0, a_1, …, a_k sú nám neznáme. Funkciu φ z (12.6) nazývame **regresnou funkciou** a parametre a_0, a_1, …, a_k **regresnými parametrami** alebo **regresnými koeficientami**.

My sa budeme zaoberať len tzv. **lineárnym prípadom** keď funkcia φ je lineárnou funkciou parametrov $a_0, a_1, \dots, a_k$, ináč povedané: keď sa dá vyjadriť v tvare

$$\varphi = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \cdots + a_k\varphi_k = \sum_{j=0}^{k} a_j\varphi_j\,, \tag{12.7}$$

kde $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ sú známe funkcie premennej x (nezávisia od regresných koeficientov).

Príklad 12.1. Pre regresnú funkciu $\varphi(x; a_0, a_1) = a_0 + a_1 x$ je $\varphi_0(x) = 1 = x^0$ a $\varphi_1(x) = x = x^1$ (to je prípad tzv. **regresnej priamky**) a pre regresnú funkciu $\varphi(x; a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ je $\varphi_0(x) = 1 = x^0$, $\varphi_1(x) = x = x^1$ a $\varphi_2(x) = x^2$ (to je prípad tzv. **regresnej paraboly** alebo **kvadratickej regresie**).

Uvažujme n usporiadaných dvojíc reálnych čísel (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) (x_i je vstupná hodnota a y_i je výstupná hodnota). Základný model regresnej analýzy predpokladá, že

1. x je pevná (nenáhodná) premenná, a teda aj $\varphi_i(x_j)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, n$) sú pevné premenné;

2. matica

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_k(x_1) & \varphi_k(x_2) & \dots & \varphi_k(x_n) \end{pmatrix} \tag{12.8}$$

   má hodnosť $k+1$ (počet riadkov v matici A);

3. $k+1<n$ (viete zdôvodniť túto požiadavku?);

4. pevne zvolenej hodnote x_i prislúcha náhodná premenná Y_i so strednou hodnotou

$$E(Y_i) = \varphi(x_i;\, a_0, a_1, \ldots, a_k) = \sum_{j=0}^{k} a_j\varphi_j(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

   a disperziou

$$D(Y_i) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

5. pre kovariancie náhodných premenných $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ platí

$$k(Y_i, Y_\ell) = 0 \quad \text{pre každé} \quad i, \ell \in \{1, 2, \ldots, n\},\ i \neq \ell.$$

Náhodné premenné $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ majú teda rovnaký rozptyl $\sigma^2 > 0$ a sú nekorelované.

Najvhodnejšou metódou na získanie odhadov $a_0^*, a_1^*, \ldots a_k^*$ regresných koeficientov a_0, a_1, ..., a_k z (12.7) je **metóda najmenších štvorcov**. Pri tejto metóde (pozri časť aproximácie funkcií) sú odhady a_j^* regresných koeficientov a_j získavané z požiadavky, aby súčet štvorcov

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{n} \big[y_i - \varphi(x_i)\big]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \sum_{j=0}^{k} a_j\varphi_j(x_i)\right]^2 \tag{12.9}$$

bol minimálny.

Odhady $a_0^*, a_1^*, \ldots a_k^*$ dostaneme riešením sústavy rovníc

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k$$

alebo použitím tzv. **diskrétneho skalárneho súčinu**

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot g(x_i)$$

riešením sústavy $k+1$ lineárnych rovníc s $k+1$ neznámymi (čo sú hľadané odhady $a_0^*, a_1^*, \dots a_k^*$):

$$\left.\begin{array}{rcl} a_0^* S_{00} + a_1^* S_{01} + \ldots + a_k^* S_{0k} & = & S_{0y} \\ a_0^* S_{10} + a_1^* S_{11} + \ldots + a_k^* S_{1k} & = & S_{1y} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^* S_{k0} + a_1^* S_{k1} + \ldots + a_k^* S_{kk} & = & S_{ky}, \end{array}\right\} \qquad (12.10)$$

pričom

$$S_{j\ell} = S_{\ell j} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(x_i) \cdot \varphi_\ell(x_i) \quad \text{a} \quad S_{jy} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(x_i) \cdot y_i \qquad (12.11)$$

pre $j, \ell \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Sústavu (12.10) nazývame **sústavou normálnych rovníc**.[6]

12.3. Lineárna regresia

V praxi sa najčastejšie používa špeciálny model, ktorý bol analyzovaný v poslednom príklade (bežne sa mu hovorí **lineárna regresia**): $\varphi(x; a_0, a_1) = a_0 + a_1 x$, t. j. $\varphi_0(x) = 1 = x^0$

[6]Niekedy je užitočný tretí prístup: ak $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ a $\mathbf{a}^* = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_k^*)^T$ sú stĺpcové vektory, tak sústavu normálnych rovníc (12.10) môžeme vyjadriť v tvare $A^T A\mathbf{a}^* = A^T\mathbf{y}$, kde A je matica (12.8) a A^T je matica k nej transponovaná. Matica A má hodnosť $k+1$ a tak aj matica $A^T A$ má hodnosť $k+1$, a preto k nej existuje inverzná matica $(A^T A)^{-1}$. To ale znamená, že $\mathbf{a}^* = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}$.

a $\varphi_1(x) = x = x^1$. Budeme sa ním podrobnejšie zaoberať. Podľa (12.11) je

$$S_{00} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n, \quad S_{01} = S_{10} = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$S_{11} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad S_{0y} = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{a} \quad S_{1y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$

a sústava normálnych rovníc (12.10) má tvar:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_0^* \cdot n + a_1^* \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & = & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a_0^* \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1^* \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & = & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}\right\} \tag{12.12}$$

s neznámymi odhadmi a_0^* a a_1^*. Túto sústavu môžeme riešiť napr. podľa Cramerovho pravidla:

$$D_S = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

$$D_{a_0^*} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)$$

a

$$D_{a_1^*} = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{vmatrix} = n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right).$$

Potom

$$a_0^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\big)^2} \ \text{ a } \ a_1^* = \frac{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\big)^2}. \tag{12.13}$$

Úpravami dostaneme pre odhad a_1^*

$$a_1^* = \frac{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\big)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} = \frac{k_{xy}}{s_x^2}$$

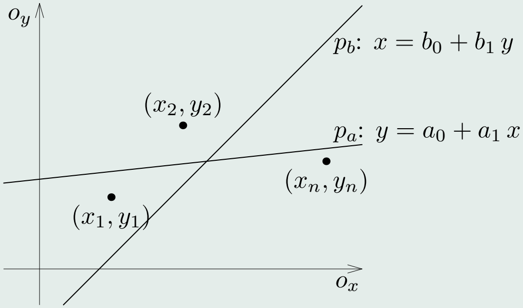
a obdobnou úpravou získame

$$a_0 = \frac{\overline{x^2} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}.$$

Tým sme dokázali, že pre odhady a_0^*, a_1^* regresných koeficientov a_0, a_1 platí

$$a_0^* = \frac{\overline{x^2} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} \qquad \text{a} \qquad a_1^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} = \frac{k_{xy}}{s_x^2}. \tag{12.14}$$

Aplikujme túto lineárnu regresiu tak, že so zachovaním potrebných požiadaviek „navzájom zameníme x a y“, t. j. majme regresnú funkciu $\psi(y; b_0, b_1) = b_0 + b_1 y$ s neznámymi



Obr. 12.1: Regresné priamky

regresnými koeficientami b_0 a b_1. Obdobnou úvahou dostaneme pre ich odhady b_0^* a b_1^*

$$b_0^* = \frac{\overline{y^2} \cdot \overline{x} - \overline{y} \cdot \overline{yx}}{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2} \qquad \text{a} \qquad b_1^* = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2} = \frac{k_{yx}}{s_y^2}. \tag{12.15}$$

Ľahko podľa (12.1) nahliadneme, že $k_{xy} = k_{yx}$, a preto na základe (12.3)

$$a_1^* \cdot b_1^* = \frac{k_{xy}}{s_x^2} \cdot \frac{k_{yx}}{s_y^2} = \left[\frac{k_{xy}}{s_x \cdot s_y}\right]^2 = \left[r_{xy}\right]^2.$$

Teda

$$\left[r_{xy}\right]^2 = a_1^* \cdot b_1^* \tag{12.16}$$

Nech p_a je regresná priamka (tzv. **prvá regresná priamka** znázornená na obr. 12.1 v súradnicovom systéme $\mathcal{O}_{xy}$), ktorá zodpovedá modelu $\varphi(x; a_0, a_1) = a_0 + a_1 x$ a p_b je regresná priamka (tzv. **druhá regresná priamka** znázornená v súradnicovom systéme

$\mathcal{O}_{yx}$), ktorá zodpovedá modelu $\psi(y; b_0, b_1) = b_0 + b_1 y$. Dokázaná rovnosť

$$a_1^* \cdot b_1^* = \left[r_{xy}\right]^2 \tag{12.17}$$

nás informuje o tom, že súčin odhadov a_1^* a b_1^* ich smerníc je druhou mocninou výberového korelačného koeficientu. Čím je tento súčin „bližší“ k jednej, tým sú tie priamky „bližšie“ k sebe. Z druhej strany, čím je tento súčin „bližší“ k jednej, tým viac je oprávnený náš predpoklad o lineárnej závislosti oboch premenných.

Týmto sme zďaleka nevyčerpali problematiku lineárnej regresie. V odporúčanej literatúre môžeme nájsť napr. intervaly spoľahlivosti pre regresné koeficienty, testy linearity regresie, regresnú analýzu viac premenných atď.

Príklad 12.2. U deviatich náhodne vybraných otcov bola zistená ich výška a výška ich dospelých prvorodených synov s týmito výsledkami

výška otca (x_i)	174	180	176	168	182	188	176	177	174
výška otca (y_i)	177	182	176	173	180	191	179	181	176

.

Určme odhady regresných koeficientov prvej a druhej regresnej priamky a výberový korelačný koeficient.

Riešenie. Je zrejmé, že $n = 9$ a

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 1595, \quad \sum_{i=1}^{9} y_i = 1615, \quad \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 282\,925, \quad \sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 286\,431$$

a sústava normálnych rovníc (12.14) má tvar

$$9 \cdot a_0^* + 1595 \cdot a_1^* = 1615 \qquad 1595 \cdot a_0^* + 282\,925 \cdot a_1^* = 286\,431$$

ktorej riešením je $a_0^* \approx 28{,}8826$ a $a_1^* \approx 0{,}8496$. Teda $y = 28{,}8826 + 0{,}8496 \cdot x$ je analytické vyjadrenie prvej regresnej priamky.

Pre druhú regresnú priamku spočítame súčet $\sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 290\,017$ a sústava zodpovedajúcich normálnych rovníc má tvar

$$9\cdot b_0^* + 1615\cdot b_1^* = 1595 \qquad 1615\cdot b_0^* + 290\,017\cdot b_1^* = 286\,431$$

s riešením $b_0^* \approx -4{,}6421$ a $b_1^* \approx 1{,}0135$. Teda $x = -4{,}6421 + 1{,}0135\cdot y$ je analytické vyjadrenie druhej regresnej priamky.

Výberový korelačný koeficient určíme napríklad podľa (12.5).Zrejme

$$\overline{x\cdot y} = \frac{286\,431}{9}; \quad \overline{x} = \frac{1595}{9}; \quad \overline{x^2} = \frac{282\,925}{9}; \quad \overline{y} = \frac{1615}{9}; \quad \overline{y^2} = \frac{290\,017}{9}$$

a po dosadení týchto hodnôt do (12.5)dostaneme $r_{xy} \approx 0{,}9279$.

Podľa (12.17) je $a_1^* \cdot b_1^* \approx 0{,}8496 \cdot 1{,}0135 = 0{,}8611 \approx 0{,}9279^2$, čo je v súlade s predchádzajúcimi výpočtami.

V MATLABe sú tieto výpočty jednoduché. Môžeme postupovať napr. takto: najprv zadáme x_i a y_i (pozor na poradie):

$$x = [174, 180, 176, 168, 182, 188, 176, 177, 174];$$

$$y = [177, 182, 176, 173, 180, 191, 179, 181, 176]$$

a pomocou $polyfit(x, y, 1)$ získame odhady a_1^* a a_0^* a pomocou $polyfit(y, x, 1)$ odhady b_1^* a b_0^*. Výberový korelačný koeficient je prvok na vedľajšej diagonále korelačnej matice, ktorú získame pomocou $corrcoef(x, y)$. Takto pomocou $r = corrcoef(x, y)$; $r(1, 2)$ dostaneme požadovaný výberový korelačný koeficient.

12.4. Niektoré prípady nelineárnej regresie

V praxi sa často medzi nelineárne regresie zaraďuje tzv. **polynomická regresia** (hoci v zmysle našej definície z (12.7) ide o lineárnu regresiu), keď funkcie φ_j sú určené predpisom

$\varphi_j(x) = x^j$, $j \in \{0, 1, \dots k\}$. Hovoríme jej aj **polynomická regresia stupňa** k, lebo funkcia φ je polynómom stupňa k:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j \, .$$

Matica A z (12.8) má v tom prípade tvar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^k & x_2^k & \dots & x_n^k \end{pmatrix}, \qquad k+1 < n. \tag{12.18}$$

V prípade tzv. **kvadratickej regresie** je $k = 2$ a $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Sústava normálnych rovníc (12.10) má tvar

$$\left.\begin{aligned} a_0^* \cdot n + a_1^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_1^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^4 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{aligned}\right\} \tag{12.19}$$

Príklad 12.3. Odhadnime koeficienty kvadratickej regresie z predchádzajúceho príkladu.

Riešenie. Odhady a_0^*, a_1^*, a_2^* môžeme získať riešením sústavy rovníc (12.19) alebo v MATLABe po zadaní x a y (pozri predchádzajúci príklad) pomocou $polyfit(x, y, 2)$. Dostaneme $a_0^* = -875{,}6204$, $a_1^* = 10{,}581$ a $a_2^* = -0{,}0262$.

V niektorých prípadoch je možné regresnú funkciu vhodnou transformáciou upraviť na lineárny tvar $y = a_0 + a_1 x$ s regresnými koeficientami a_0, a_1, ktorých odhady a_0^*, a_1^* sú riešením normálnej sústavy (12.12). Táto sústava je určená usporiadanými dvojicami (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. Ukážeme niektoré možnosti týchto transformácií.

- **Hyperbolická regresia 1. druhu** je tvaru $y = a + \frac{b}{x}$. Substitúciou $t = \frac{1}{x}$ dostaneme $y = a + bt$, t. j. $a = a_0$, $b = b_0$ a úlohu (x_i, y_i) preberá $(\frac{1}{x_i}, y_i)$.
- **Hyperbolická regresia 2. druhu** je tvaru $y = \frac{1}{a+bx}$. Substitúciou $u = \frac{1}{y}$ dostaneme $u = a + bx$, t. j. $a = a_0$, $b = b_0$ a úlohu (x_i, y_i) preberá $(x_i, \frac{1}{y_i})$.
- **Exponenciálna regresia** je tvaru $y = A \cdot B^x$. Logaritmovaním tejto rovnosti dostaneme $\ln y = \ln A + \ln B \cdot x$. Takto pre $u = \ln y$, $a_0 = \ln A$ a $a_1 = \ln B\, a_1$ je $u = a_0 + a_1 x$, t. j. úlohu (x_i, y_i) preberá $(x_i, \ln y_i)$ a hľadané odhady pôvodných regresných koeficientov dostaneme po výpočte odhadov a_0^*, a_1^* regresných koeficientov a_0, a_1 takto: $A^* = \mathrm{e}^{a_0^*}$ a $B^* = \mathrm{e}^{a_1^*}$.

Príklad 12.4. Namerané hodnoty (x_i, y_i) funkčnej závislosti tvaru $y = A \cdot x^B$ sú uvedené v tabuľke

x_i	1	2	3	4	5	7
y_i	4,9	3,8	3,2	2,9	2,6	2,3

. Určme odhady regresných koeficientov A a B.

Riešenie. Logaritmovaním predpokladanej funkčnej závislosti dostaneme $\ln y = \ln A + B \cdot \ln x$. Substitúciami $u = \ln y$, $t = \ln x$, $a_0 = \ln A$ a $a_1 = B$ ju prepíšeme na tvar $u = a_0 + a_1 t$. Tu na výpočet odhadov a_0^*, a_1^* regresných koeficientov a_0, a_1 použijeme sústavu normálnych (12.12) rovníc (úlohu (x_i, y_i) preberá $(\ln x_i, \ln y_i)$), $n = 5$):

$$\begin{aligned} a_0^* \cdot n + a_1^* \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i &= \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \\ a_0^* \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + a_1^* \cdot \sum_{i=1}^{n} \big(\ln x_i\big)^2 &= \sum_{i=1}^{n} \big(\ln x_i\big) \cdot \big(\ln y_i\big)\,, \end{aligned}$$

ktorá po vyčíslení zodpovedajúcich súm má tvar

$$\begin{aligned} 6 \cdot a_0^* + 6{,}7334 \cdot a_1^* &= 6{,}9405 \\ 6{,}7334 \cdot a_0^* + 9{,}9861 \cdot a_1^* &= 6{,}8378 \end{aligned}$$

s riešením $a_0^* = 1{,}5960$ a $a_1^* = -0{,}3914$. Potom $A^* = \mathrm{e}^{a_0^*} = \mathrm{e}^{1{,}5960} \approx 4{,}9333$ a $B^* = a_1^* = -0{,}3914$.

V MATLABe je výpočet jednoduchý: napr. po zadaní vstupných údajov $x = [1, 2, 3, 4, 5, 7]$ a $y = [4.9, 3.8, 3.2, 2.9, 2.6, 2.3]$ pomocou $xL = log(x)$ a $yL = log(y)$ nadefinujeme vstupné údaje pretransformovanej úlohy. Odhady a_0^*, a_1^* jej regresných koeficientov získame pomocou $polyfit(xL, yL, 1)$. Dostaneme $a_0^* = 1{,}5961$ a $a_1^* = -0{,}3914$. Odhad regresného koeficientu A dostaneme v MATLABe príkazom $exp(1.5961)$. Zvyšné úvahy sú rovnaké ako bez MATLABu.

Úlohy

12.1. V tabuľke sú výsledky meraní otáčok $[min^{-1}]$ a výkonu [kW] motora:

otáčky	2 000	2 500	3 000	3 500	4 000
výkon	29	43	55	64	71

. Určte: a) výberovú modifikovanú kovarianciu a výberový korelačný koeficient výkonu motora a jeho otáčok; b) Odhadnite regresné koeficienty prvej a druhej regresnej priamky.

[a) $k_{xy}^* = 13\,125$; $r_{xy} = 0{,}9907$;
b) $y = 0{,}021 \cdot x - 10{,}6$; $x = 46{,}7415 \cdot y + 550{,}7479$]

12.2. Na základe nameraných hodnôt (x_i, y_i), ktoré sú uvedené v tabuľke:

x_i	1	2	2	3	4	6	1	5	3	3
y_i	1,1	1,4	1,5	1,7	1,7	2,0	0,9	1,8	1,6	1,5

určte odhady regresných koeficientov kvadratickej závislosti.

$[y = 0{,}6823 + 0{,}4028 \cdot x - 0{,}0325 \cdot x^2]$

12.3. Na základe nameraných hodnôt (x_i, y_i), ktoré sú uvedené v tabuľke:

x_i	0	0,3	0,5	0,7	1,0
y_i	7,8	4,4	5,0	2,0	1,1

určte odhady regresných koeficientov funkčnej závislosti typu $y = a \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot x}$.

$[y = 8{,}7320 \cdot \mathrm{e}^{-1{,}9605 \cdot x}]$

13. Prílohy

13.1. Numerická matematika v MATLABe

13.1.1. Riešenie rovnice $f(x) = 0$

Príklad 13.1. Určte kladný koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$. Nech $x_0 = 1{,}3$.

Riešenie. Výsledok získaný priamo použitím funkcie

```
fzero('funkcia',x0)
```

je uvedený iba na 4 desatinné miesta.[7]

```
>> fzero('x^3-x-1',1.3)
ans = 1.3247
```

Koreň danej rovnice vypíšeme s väčšou presnosťou zmenou formátu:

```
>> format long
>> fzero('x^3-x-1.',100)
ans = 1.32471795724475
```

Ďalšia možnosť je zadanie intervalu, v ktorom sa nachádza koreň:

```
x=fzero('funkcia',[dolhranica horhranica])
```

```
>> format long;x=fzero('x^3-x-1.',[0 2])
x = 1.32471795724475
```

Ďalšia možnosť je zadanie koeficientov algebrickej rovnice (dostaneme aj komplexné korene). Použijeme funkciu `roots`:

[7] MATLAB vypisuje výsledky do niekoľkých riadkov, my ich budeme vypisovať skrátene.

```
>> x=roots([1 0 -1 -1])
x =
  1.32471795724475
 -0.66235897862237 + 0.56227951206230i
 -0.66235897862237 - 0.56227951206230i
```

Výpočet koreňa uvedenej rovnice môžeme urobiť tiež pomocou iteračnej metódy takto:

```
>> n=10; xs=1.3; EPS=0.001; i=1;
>> for i=1:n, xn=(1+xs)^(1/3),i=i+1;xs=xn; end
```

Výsledky po jednotlivých priblíženiach budú:

```
xn = 1.3200
xn = 1.3238
xn = 1.3245
xn = 1.3247
```

Iný spôsob:

```
>> clear
>> x(1)=1.3; EPS=0.0001;i=1;n=10;
>> for i=1:n
           x(i+1)=(1+x(i))^(1/3);
                if abs(x(i)-x(i+1))<EPS
                break
                end
          eval i
          eval x(i)
      end
```

Výsledky po i-tej iterácii budú:

```
i = 2    ans = 1.32000612179591
i = 3    ans = 1.32382235399548
i = 4    ans = 1.32454781845535
i = 5    ans = 1.32468563914389
```

Riešenie pomocou funkcie definovanej v súbore `itf.m`:

```
function Fi=itf(x);
% zápis funkcie
Fi=(1+x)^(1/3);
```

```
>> format long
>> xs=1.3;EPS=0.001;i=1;n=10;
>> f=@itf;
>> for i=1:10
          xn=feval(f,xs);
              if abs(xs-xn)<EPS
              break
              end
         xs=xn;
     end
>> eval i
i = 3
>> eval xn
xn = 1.32454781845535
```

13.1.2. Sústavy lineárnych rovníc

Maticu zadávame po riadkoch:

```
>> A=[0.1 -0.2 0.3;-0.2 0.1 0.4;0 -0.3 0.1]
A =
    0.1000   -0.2000    0.3000
   -0.2000    0.1000    0.4000
         0   -0.3000    0.1000
>> Ainv=inv(A)
Ainv =
    4.8148   -2.5926   -4.0741
    0.7407    0.3704   -3.7037
    2.2222    1.1111   -1.1111
```

V predchádzajúcom príklade sme určili inverznú maticu. Pseudoinverzná matica, určená nižšie, sa používa napríklad pri riešení sústav lineárnych rovníc v zmysle najmenších štvorcov:

```
>> pinv(A)
ans =
    4.8148   -2.5926   -4.0741
    0.7407    0.3704   -3.7037
    2.2222    1.1111   -1.1111
```

Samozrejme máme k dispozícii rôzne normy. Stĺpcová norma:

```
>> norm(A,1)
ans = 0.8000
```

Euklidova norma:

```
>> norm(A,2)
ans = 0.5323
```

Riadková norma:

```
>> norm(A,inf)
ans = 0.7000
```

Príklad 13.2. Riešme sústavu rovníc $10x+y-z=10$, $x+9y-z=9$, $x+y-10z=-8$.

Riešenie. Pomocou MATLABu môžeme použiť nasledujúci postup:

```
>> A=[10,1,-1;1,9,-1;1,1,-10]; b=[10,9,-8]';
>> x=A\b;
x =
     1
     1
     1
```

Namiesto príkazu `x=A_` môžeme vypočítať riešenie aj pomocou inverznej matice príkazom `x=inv(A)*b`. Možný je aj nižšie uvedený postup:

```
>> clear
>> syms x y z real
>> f1=10*x+y-z-10;
>> f2=x+9*y-z-9;
>> f3=x+y-10*z+8;
>> [f1,f2,f3]
ans = [ 10*x+y-z-10,   x+9*y-z-9,  x+y-10*z+8]
>> [x, y,z]=solve(f1,f2,f3)
x = 1
y = 1
z = 1
```

13.1.3. Sústavy nelineárnych rovníc

Príklad 13.3. Nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$.

Riešenie. Pomocou MATLABu môžeme použiť nasledujúci postup (podobný ako pri sústavách lineárnych rovníc):

```
>> syms x y
>> f=x^3+3*x*y^2-15*x-12*y
f = x^3+3*x*y^2-15*x-12*y
>> fx=diff(f,x)
fx = 3*x^2+3*y^2-15
>> fy=diff(f,y)
fy = 6*x*y-12
>> [x,y] = solve(fx, fy)
 x =
[  2]
[  1]
[ -1]
[ -2]
y =
[  1]
[  2]
[ -2]
[ -1]
```

Teda body $P_1 = (2;1)$, $P_2 = (1;2)$, $P_1 = (-1;-2)$ a $P_1 = (-2;-1)$ sú stacionárne body danej funkcie. Použili sme podobný postup ako pri riešení sústavy lineárnych rovníc.

Príklad 13.4. Nájdime riešenie sústavy rovníc $x^2 + y^2 = 5$, $x^2 - y^2 = 1$.

Riešenie.

```
>> syms x y;
>> f1=x^2+y^2-5;
>> f2=x^2-y^2-1;
>> [x,y] = solve(f1, f2)
x =
[  3^(1/2)]
[ -3^(1/2)]
[  3^(1/2)]
[ -3^(1/2)]
 y =
[  2^(1/2)]
[  2^(1/2)]
[ -2^(1/2)]
[ -2^(1/2)]
```

Príklad 13.5. Nájdime riešenie sústavy rovníc $\sin(x)-y-1{,}32=0$, $\cos(y)-x+0{,}85=$ $=0$.

Riešenie.

```
>> syms x y;
>> f1=sin(x)-y-1.32;
>> f2=cos(y)-x+0.85;
>> [x,y] = solve(f1, f2)
x = cos(-.34422103640675697265217342075016)+17/20
y = -.34422103640675697265217342075016
>> xn=simplify(x)
xn = 1.7913386099639217857940900472361
```

Program pre Newtonovu metódu, založenú na iteráciách[8]

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) - \big(f_1(x_n, y_n), f_2(x_n, y_n)\big) \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1}$$

napíšeme do súboru `new.m`:

```
function [Fin]=new(x,y)
syms x y f1 f2 J;                  %
f1=sin(x)-y-1.32;
f2=cos(y)-x+0.85;
J=jacobian([f1;f2],[x,y]);
Fin=[x,y]-[f1,f2]*inv(J);
```

Výpočet prvého priblíženia:

```
>> format long;
>> x=1.8; y=-0.35; eval(new)
ans = 1.79136480039926  -0.34419043368442
```

Výpočet druhej aproximácie:

```
>> x=1.79136480039926; y=-0.34419043368442; eval(new)
ans = 1.79133861047958  -0.34422103618491
```

Poznámka 13.1. Pre všeobecnejší program je možné použiť postup podobný ako pri iteračnej metóde pre rovnicu $f(x) = 0$.

[8] Na tomto mieste počítame s riadkovými vektormi!

13.1.4. Aproximácia funkcie

Príklad 13.6. Nájdime aproximačný polynóm pre funkciu zadanú pomocou tabuľky

x	-1	0	3	4	5
y	1	0	9	16	25

(hodnoty funkcie $y = x^2$) a vypočítajme hodnotu tejto funkcie v bode $x = 2$.

Riešenie.

Použitím MATLABovských funkcií

`polyfit(x,y,n)` a `polyval(názov,bod)`

postupne pre $n = 5$ a $n = 2$ dostaneme koeficienty a hľadané hodnoty odpovedajúcich polynómov:

```
>> x=[-1 0 3 4 5];y=[1 0 9 16 25];
>> aprox5=polyfit(x,y,5)
aprox5= -0.0000  -0.0000  0.0000  1.0000  0  0.0000
```

Teda polynóm pre $n = 5$ je $L_5(x) = 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$.

Použitím funkcie `polyval(názov,bod)` dostaneme hodnotu aproximácie v danom bode:

```
>> y5=polyval(aprox5,2)
y5 = 4.0000
>> aprox=polyfit(x,y,2)
aprox = 1.0000   -0.0000   -0.0000
```

Teda polynóm pre $n = 2$ je $L_2(x) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$.

```
>> y2=polyval(aprox2,2)
y2 = 4.0000
```

Lagrangeov interpolačný polynóm má tvar

$$L(s) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{s - x(j)}{x(i) - x(j)}\, y(i).$$

Pre danú tabuľku hodnôt môžeme zvoliť napríklad nasledujúci algoritmus:

```
>> x=[-1 0 3 4 5]; y=[1 0 9 16 25]; s=2; Lx=0; n=5;
>> for i=1:n
     D=1;
       for j=1:n
         if j ~= i
         D=D*(s-x(j))/(x(i)-x(j));
         end
         if j == i
         end
       end
     Lx=Lx+D*y(i);
     end
eval Lx
Lx = 4.0000
```

Príklad 13.7. Funkciu zadanú pomocou tabuľky

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	3,5	9,4	15,3	25,4	35,3	49,8	63,2	81

Aproximujme:

1. priamkou,
2. parabolou,

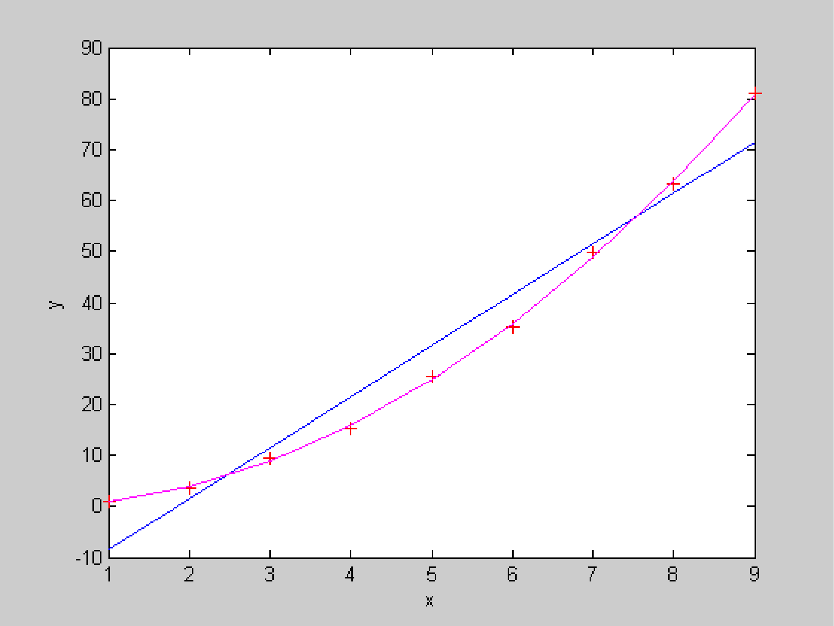
pomocou metódy najmenších štvorcov a zobrazme graficky tieto aproximácie.

Riešenie. Riešenie vMATLABe je možné pomocou MATLABovskej funkcie

```
polyfit(x,y,n)
```

```
>> x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9];
>> y=[1 3.5 9.4 15.3 25.4 35.3 49.8 63.2 81];
>> priamka=polyfit(x,y,1)
priamka = 9.9983  -18.4472
>> parabola=polyfit(x,y,2)
parabola = 0.9969    0.0297   -0.1714
>> ypriamka=polyval(priamka,x);
>> yparabola=polyval(parabola,x);
>> axis([0 10 0 90]);
>> plot(x,y,'r+',x,ypriamka,'b',x,yparabola,'m');
>> xlabel('x'),ylabel('y');
```

Rovnica priamky je $y = 9{,}9983x - 18{,}4472$ a rovnica paraboly je $y = 0{,}9969x^2 + 0{,}0297x - 0{,}1714$ (pozri obrázok 13.1).



Obr. 13.1: Výsledok aproximácie v MATLABe

13.1.5. Výpočet integrálov

Príklad 13.8. Vypočítajme $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie. Pomocou MATLABu:

Použitím symbolickej časti a MATLABovskej funkcie

```
int(funkcia,dol_hranica,horná_hranica)
```

môžeme vypočítať aj presné riešenie mnohých integrálov:

```
>> syms x
>> I=int(1/(x+1),0,1)
I = log(2)
```

Výpočet integrálu funkcie zadanej pomocou tabuľky jej hodnôt pomocou lichobežníkovej metódy a MATLABovskej funkcie

```
trapz(x,y)
```

```
>> x=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1];
>> y=[1 0.909 0.8333 0.7692 0.7143 0.6667 0.6250 ...
      0.5882 0.5556 0.5263 0.5];
>> I=trapz(x,y)
I = 0.6938
>> format long
>> Int=quad('1./(1.+x)',0,1,1e-6)
Int = 0.69314719986297
```

Hodnota integrálu vypočítaná pomocou lichobežníkovej metódy s krokom 0,1 je `I`. Hodnota `Int` je výsledok použitia funkcie `quad` – hodnota integrálu je vypočítaná s presnosťou 10^{-6}.

Metódy môžeme aj samostatne naprogramovať. Najprv vytvoríme súbor `integral.m`

```
function f=integral(x);
% m  súbor pre podintegrálnu funkciu
f=1/(1+x);
```

a zadefinovanú funkciu použijeme v nasledujúcom programe na výpočet integrálu pomocou lichobežníkovej metódy:

```
>> clear
>> syms a b n x
>> f=@integral;
>> a=0; b=1; n=10; h=(b-a)/n;
>> S=(feval(f,a)+feval(f,b))/2;
>> for i=1:n-1
      a=a+h;
      S=S+feval(f,a);
   end
>> S=h*S
S = 0.6938
```

Podobne pre riešenie pomocou Simpsonovej metódy

```
>> clear
>> format long
>> f=@integral;
>> a=0;b=1;n=10;
>> h=(b-a)/(2*n);
>> S=feval(f,a)+feval(f,b);
>> j=1;
>> for i=1:2*n-1
     a=a+h;
     S=S+(3+j)*feval(f,a);
     j=-j;
   end
>> S=S*h/3
S = 0.69314737466512
```

13.1.6. Obyčajné diferenciálne rovnice. Metóda Rungeho-Kuttova

Na riešenie diferenciálnych rovníc v prostredí MATLABu je možné použitie funkcií `ode23` alebo `ode45`. Rovnicu $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ prepíšeme na sústavu diferenciálnych rovníc pomocou substitúcií $y = y_1$, $y' = y_2$, $\ldots$, $y_n = y^{(n-1)}$. Funkcia

```
[t,y]=ode45('fundif',[t0 tkoncová],[y(t0) y(t0) ...])
```

určí riešenie na zadanom intervale hodnôt t.

Príklad 13.9. Pre $t \in \langle 0, 1\rangle$ určme riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}$, ktoré spĺňa začiatočné podmienky $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Riešenie. Do súboru `fundif.m` zapíšeme zadanie systému diferenciálnych rovníc:

```
function dy=fundif(t,y)
% zápis diferenciálnej rovnice m-súbor
dy=[y(2);3*y(2)-2*y(1)+2*exp(3*t)];
```

Použitím funkcie `ode45` získame hodnoty premenných t, y a y':

```
>> [t,y]=ode45('fundif',[0 1],[1 3])
t =
         0
    0.0167
    0.0335
    ...
    0.9835
    0.9917
    1.0000
y =
    1.0000    3.0000
    1.0515    3.1546
    1.1057    3.3171
     ...
   19.1150   57.3451
   19.5943   58.7829
   20.0855   60.2566
```

Príklad 13.10. Vypočítajme $y(0{,}2)$, ak $y(t)$ je riešenie diferenciálnej rovnice $y' = 100y$ a $y(0) = 1$.

Riešenie.

Do suboru `rigid.m` zapíšeme rovnicu:

```
function dy = rigid(t,y)
% zápis diferenciálnej rovnice do m - súboru
dy = zeros(10,1);
% stlpcovy vektor
dy(1) = 100*y(1);
```

Použitím funkcie `ode45` v MATLABe dostávame pre zvolenú presnosť 10^{-4}:

```
>> clear
>> format long
>> options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 ]);
>> [T,Y] = ode45(@rigid,[0 0.2],1,options)
T =
                  0
   0.00031697863849
   0.00063395727698
   0.00095093591548
    ...
   0.19776475056705
   0.19888237528353
   0.20000000000000
Y =
  1.0e+008 *
   0.00000001000000
   0.00000001032206
   0.00000001065448
    ...
   3.88041718444411
   4.33925334269280
   4.85235474303735
```

Riešením je $y(t) = \mathrm{e}^{100t}$ a jeho hodnota pre $t = 0{,}2$ je

```
>> exp(20)
ans = 4.851651954097903e+008
```

Hoci absolútna chyba je obrovská, relatívna chyba je prijateľná, aj keď je o niečo väčšia, ako požadovaná presnosť:

```
>> d=4.85235474303735e+008-4.851651954097903e+008
d = 7.027889394474030e+004
>> r=abs(4.85235474303735e+008-exp(20))/exp(20)
r = 1.448555968351767e-004
```

Ak použijeme vzorce (oficiálny ťahák)

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_1/2),$$

$$k_3 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_2/2),$$

$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3),$$

$$y(x_i + h) \approx y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6},$$

bez testovania vhodnosti kroku $h = 0{,}2$ dostávame $k_1 = 0{,}2 \cdot 100 \cdot 1 = 20$; $k_2 = 0{,}2 \cdot 100 \cdot (1 + 20/2) = 220$; $k_3 = 0{,}2 \cdot 100 \cdot (1 + 220/2) = 2220$; $k_4 = 0{,}2 \cdot 100 \cdot (1 + 2220) = 44420$. Teda

$$y(0{,}2) \approx 1 + \frac{20 + 2 \cdot 220 + 2 \cdot 2220 + 44420}{6} = 8220.$$

Uvedený jednoduchý príklad upozorňuje na opatrné používanie metód numerického riešenia diferenciálnych rovníc. Vidíme, že v tomto prípade je testovacia konštanta pre krok

$$\mathrm{test}_h = \left| \frac{k_3 - k_2}{k_2 - k_1} \right| = 10,$$

pričom by sme mali uvažovať krok, kde $\text{test}_h \approx 0{,}05$.

Príklad 13.11. Určme riešenie sústavy diferenciálnych rovníc $y_1' = y_2 y_3$, $y_2' = -y_1 y_3$, $y_3' = -0{,}5 y_1 y_2$, so začiatočnými podmienkami $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$, na intervale $[1{,}12]$. Výsledok znázornime graficky.

Riešenie. Pomocou funkcie

```
options = odeset('name1',value1,'name2',value2,...)
```

ktorej informácia hlási

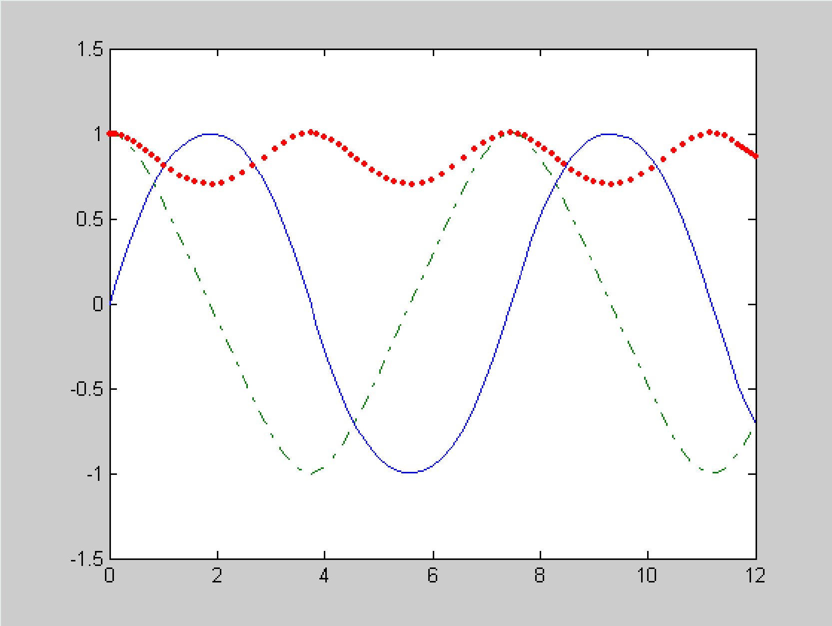
```
   options = odeset('name1',value1,'name2',value2,...) creates an integrator
options structure in which the named properties have the specified
values. Any unspecified properties have default values. It is sufficient
to type only the leading characters that uniquely identify a property
name. Case is ignored for property names.
```

nastavíme voľby programu. Najskôr zadáme sústavu, napríklad do súboru `rigid2.m`:

```
function dy = rigid2(t,y)
% zápis sústavy diferenciálnych rovníc do m - súboru
dy = zeros(3,1);
%  stlpcový vektor
dy(1) = y(2) * y(3);
dy(2) = -y(1) * y(3);
dy(3) = -0.51 * y(1) * y(2);
```

Po nastavení volieb a určení riešenia môžeme rovno vykresliť grafy funkcií y_1, y_2 a y_3 príkazom `plot`, výsledok vidíte na obrázku 13.2:

```
>> options=odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);
>> [T,Y] = ode45(@rigid2,[0 12],[0 1 1],options);
>> plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'-.',T,Y(:,3),'.')
```



Obr. 13.2: Výsledok numerického riešenia nelineárnej sústavy diferenciálnych rovníc

Riešenie bez vytvorenia grafu:

```
>> options=odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);
>> [T,Y] = ode45(@rigid2,[0 12],[0 1 1],options)
T =
         0
    0.0317
    0.0634
    ...
   11.8473
   11.9237
   12.0000
Y =
      0         1.0000    1.0000
    0.0317    0.9995    0.9997
    0.0633    0.9980    0.9990
    ...
   -0.6041   -0.7972    0.9024
   -0.6570   -0.7542    0.8833
   -0.7058   -0.7087    0.8639
```

Uvedené sú iba tri prvé a tri posledné hodnoty.

13.2. Pravdepodobnosť a matematická štatistika v MATLABe

13.2.1. Úvod

Ak nebudeme programovať v MATLABe mnohokrát vystačíme s použitím „kalkulačky“:

```
Kalkulačka:
Demos-Statistics-Probability Distributions-Run this Demo
```

Pri programovaní (hromadnom použití) je možné použiť MATLABovské funkcie tak, ako je to uvedené v nasledujúcich príkladoch. Niektoré príklady sú prevzaté z odporúčanej literatúry (Gavalec, Kováčová, Ostertagová a Skřivánek, 2002).

Príklad 13.12. Prístroje, ktoré majú istú výrobnú chybu sa v záručnej dobe pokazia v 60 % prípadov. Z ostatných prístrojov sa pokazí iba 5 %. Výrobca dodáva 1 % výrobkov s uvedenou chybou. Určme pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný prístroj sa v záručnej dobe pokazí.

Riešenie. A – náhodný jav, že prístroj sa pokazí, H_1 – prístroj je chybný, H_2 – prístroj je bezchybný. $P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$, $P(H_1) = 0{,}01$, $P(H_2) = 0{,}99$, $P(A|H_1) = 0{,}6$, $P(A|H_2) = 0{,}05$:

```
>> ph=[.01,.99]; pah=[.6,.05]; pa=sum(ph.*pah)
pa = 0.0555
```

Príklad 13.13. Prístroj z predchádzajúceho príkladu sa pokazil. Aká je pravdepodobnosť toho, že mal výrobnú chybu?

Riešenie.

```
>> ph=[.01,.99];pah=[.6,.05];x=ph.*pah;pha=x/sum(x);pha(1)
ans = 0.1081
```

alebo

```
>> ph=[.01,.99]; pah=[.6,.05];
>> pha=ph(1)*pah(1)/(ph*pah')
pha = 0.1081
```

Bernoulliho vzorec

$$P_{k,n,p} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, , \ldots, n \ (q = 1 - p).$$

MATLABovská funkcia

```
binopdf(k,n,p)
```

vracia hodnotu pravdepodobnosti podľa Bernoulliho vzorca:

```
>> binopdf(2,3,1/6)
ans = 0.0694
```

Podobne môžeme použiť ďalšie MATLABovské funkcie (niekedy je postačujúca „kalkulačka“)

```
Y = binocdf(X,N,P);  X = binoinv(Y,N,P)
Y = geocdf(X,P);  X = geoinv(Y,P);  Y = geopdf(X,P)
P = poisscdf(X,LAMBDA);  X = poissinv(P,LAMBDA);
                         Y = poisspdf(X,LAMBDA)
P = expcdf(X,MU);  X = expinv(P,MU);  Y = exppdf(X,MU)
P = normcdf(X,MU,SIGMA);  X = norminv(P,MU,SIGMA);
                          Y = normpdf(X,MU,SIGMA)
P = tcdf(X,V);  X = tinv(P,V);  Y = tpdf(X,V)
P = chi2cdf(X,V);  X = chi2inv(P,V);  Y = chi2pdf(X,V)
P = fcdf(X,V1,V2);  X = finv(P,V1,V2);  Y = fpdf(X,V1,V2)
```

13.2.2. Výpočet strednej hodnoty, disperzie a smerodajnej odchýlky

Príklad 13.14. Diskrétna náhodná premenná X je daná pravdepodobnostnou tabuľkou

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0, 1296

Určme strednú hodnotu, disperziu a smerodajnú odchýlku náhodnej premennej X.

Riešenie.

```
>> xi=[0 1 2 3 4]; pi=[0.0256 0.1536 0.3456 0.3456 0.1296];
>> E=xi*pi'
E = 2.4000
```

alebo môžeme použiť priradenie `E=sum(xi.*pi)`.

Výpočet disperzie (rozptylu, variácie):

```
>> D=sum(xi.^2.*pi)-E^2
D = 0.9600
```

Výpočet štandardnej odchýlky:

```
>> sigma=sqrt(D)
sigma = 0.9798
```

Je treba upozorniť, že MATLABovská funkcia `std(x)` odpovedá

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

a MATLABovská funkcia `std(x,1)` odpovedá

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

13.2.3. Intervalový odhad pre strednú hodnotu

Príklad 13.15. Zo základného súboru s normálnym rozdelením sme urobili náhodný výber s realizáciami: 22,4; 28,0; 20,1; 27,4; 23,9; 24,8; 26,4; 27,0; 25,4; 25,6. Určme 95 % interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu: a) obojstranný; b) ľavostranný; c) pravostranný.

Riešenie.

```
>> x=[22.4,28.0,20.1,27.4,23.9,24.8,26.4,27.0,25.4,25.6];
>> n=length(x)
n = 10
>> m=mean(x);[h,p,ci] = ttest(x,m,0.05,0)
h = 0
p = 1
ci = 23.3614   26.8386
```

```
>> m=mean(x);[h,p,ci] = ttest(x,m,0.05,1)
h = 0
p = 0.5000
ci = 23.6912       Inf
```

```
>> m=mean(x);[h,p,ci] = ttest(x,m,0.05,-1)
h = 0
p = 0.5000
ci = -Inf   26.5088
```

Riešenie pomocou EXCELu:

```
   22,4
   28
   20,1
   27,4
   25,6
   23,9
   24,8
   26,4
   27
   25,4

stdev     2,430363
mean=m    25,1
delta=d   1,506327
          a=m-d       b=m+d
          23,59367    26,60633
```

Delta je počítané pomocou štatistickej funkcie `CONFIDENCE`.

13.2.4. Testovanie štatistických hypotéz

Nasledujúci test, používaný pri známej hodnote σ, je popísaný v oddieli 11.4, kde sa nazýva Y-test:

```
[h,p,ci,zval] = ztest(x,m,sigma,alpha,tail)
```

Vstupné údaje majú nasledujúci zmysel:

h je výsledok testu. Ak $h = 0$, hypotézu H_0 nezamietame, ak $h = 1$, H_0 na hladine významnosti α zamietame;

p je pravdepodobnosť, že nulová hypoéza je správna;

`ci` je interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;

`zval` je hodnota Z štatistiky (označovaná vyššie Y);

`x` je vzorka, o ktorej sa predpokladá, že je to výber premennej s normálnym rozdelením;

`m` je stredná hodnota;

`sigma` je známa smerodajná odchýlka;

`alpha` je hladina významnosti;

`tail = 0` znamená obojstranný odhad, implicitné nastavenie;

`tail = 1` znamená ľavostranný odhad;

`tail = -1` znamená pravostranný odhad.

Meral sa percentuálny obsah cínu vo vzorkách rudy. Výsledky sú v tabuľke:

x_i	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
n_i	1	3	4	10	15	20	11	5	3	2

Predpokladáme, že obsah cínu má normálne rozdelenie s disperziou $\sigma^2 = 85$. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte hypotézu $H_0\colon \mu = 52$ proti $H_1\colon \mu \neq 52$.

Riešenie.

A)

```
>> [h,p,ci,zval] = ztest(x,52,sigma,alpha,0)
h = 0
p = 0.2429
ci = 51.1568   55.3297
zval = 1.1679
```

Záver: pretože $h = 0$, hypotézu H_0 nezamietame.

B) Uvedieme možnosť pre strednú hodnotu rovnú výberovému priemeru

```
>> x=[30,35*ones(1,3),40*ones(1,4),45*ones(1,10),...
50*ones(1,15),55*ones(1,20),60*ones(1,11),65*ones(1,5),...
70*ones(1,3),75*ones(1,2)];
>> m=mean(x)
m = 53.2432
>> sigma=std(x)
sigma = 9.1574
>> alpha=0.05;
>> [h,p,ci,zval] = ztest(x,m,sigma,alpha,0)
h = 0
p = 1
ci = 51.1568   55.3297
zval = 0
```

Záver: pretože $h = 0$, hypotézu H_0 nezamietame.

C) Postup pomocou oficiálneho ťaháka:

```
>> x=[30,35*ones(1,3),40*ones(1,4),45*ones(1,10),...
50*ones(1,15),55*ones(1,20),60*ones(1,11),65*ones(1,5),...
70*ones(1,3),75*ones(1,2)];
>> n=length(x);Y=(mean(x)-52)*sqrt(n)/sqrt(85)
Y = 1.1600
>> sigma=sqrt(var(x))
sigma = 9.1574
>> n=length(x);Y=(mean(x)-52)*sqrt(n)/sigma
Y = 1.1679
>> c=norminv(0.975)
c = 1.9600
```

Záver: pretože $h = 0$, hypotézu H_0 nezamietame.

V prípade neznámej hodnoty σ používame t-test, tiež popísaný v oddieli 11.4:

```
[h,sig,ci] = ttest(x,m,alpha,tail)
```

Príklad 13.16. Zo základného súboru, o ktorom predpokladáme, že sa riadi normálnym rozdelením, bol realizovaný náhodný výber: 30, 32, 34, 40, 36, 37, 36, 38, 35, 42. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte hypotézu $H_0\colon \mu = 38$ proti $H_1\colon \mu < 38$.

Riešenie.

```
>> x=[30,32,34,40,36,37,36,38,35,42]; n=10; alfa=0.05;
>> t=(mean(x)-38)*sqrt(n)/std(x)
t = -1.7770
>> [h,p,ci] = ttest(x,38)
h = 0
p = 0.1093
ci = 33.4540   38.5460
>> m=mean(x); [h,p,ci] = ttest(x,m,alfa,-1)
h = 0
p = 0.5000
ci = -Inf   38.0631
>> m=mean(x); [h,p,ci] = ttest(x,m,alfa,1)
h = 0
p = 0.5000
ci = 33.9369       Inf
>> m=mean(x); [h,p,ci] = ttest(x,m,alfa,0)
h = 0
p = 1
ci = 33.4540   38.5460
```

Záver: hypotézu H_0 nezamietame.

Príklad 13.17. Z krabice klincov sme vybrali 10 kusov. Ich dĺžky (v mm) sú 82, 80, 82, 81, 81, 80, 81, 81, 82, 81. Otestujte, či stredná hodnota dĺžky klincov sa na hladine významnosti 5 % líši od hodnoty 80 mm udanej na krabici.

Riešenie.

```
>> x=[82,80,82,81,81,80,81,81,82,81];
>> t=(mean(x)-80)*sqrt(10)/std(x)
t = 4.7143
>> m=mean(x);[h,p,ci] = ttest(x,m,0.05,0)
h = 0
p = 1
ci = 80.5722   81.6278
```

Záver: hypotézu H_0 nezamietame.

Ak chceme otestovať stredné hodnoty dvoch vzoriek, o ktorých predpokladáme, že majú normálne rozdelenie s rovnakou (ale neznámou) disperziou, použijeme funkciu:

```
[h,p,ci,stats] = ttest2(x,y,alpha,tail)
```

`tail = 0` definuje alternatívnu hypotézu v tvare: „stredné hodnoty sa nerovnajú“;

`tail = 1` alternatívna hypotéza má tvar: „stredná hodnota X je väčšia, ako stredná hodnota Y“;

`tail = 0` alternatívna hypotéza má tvar: „stredná hodnota X je menšia, ako stredná hodnota Y“;

`stats` je dvojprvková štruktúra: prvok `tstat` je hodnota štatistiky a `df` je počet stupňov voľnosti.

Príklad 13.18. Vzorky chemickej látky sme analyzovali dvoma metódami: a) polarograficko metódou, b) titračnou metódou. Obdržali sme výsledky: a) 38, 236, 437, 736, 137, 937, 8 b) 39, 538, 737, 838, 639, 239, 138, 939, 2. Na hladine významnosti 5 % testujte hypotézu o rovnocennosti oboch metód, t. j. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ proti $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

Riešenie.

```
>> x=[38.2,36.4,37.7,36.1,37.9,37.8];
>> y=[39.5,38.7,37.8,38.6,39.2,39.1,38.9,39.2];
>> [h,p,ci,stats] = ttest2(x,y,0.05,0)
h = 1
p = 0.0015
ci = -2.3381   -0.7119
```

Záver: hypotézu H_0 zamietame.

14. Literatúra

Baculíková, B. — Daňo, I.: *Numerické metódy. Zbierka úloh.* KM FEI TU Košice, 2003, http://www.tuke.sk/fei-km/NM/numerikao.pdf.

Bača, M. — Doboš, J. — Knežo, D. — Schusterová, J.: *Numerická matematika.* Košice, 2003, ISBN 80-8073-483-6. 48

Bachvalov, N. S. — Židkov, N. P. — Kobeľkov, G. M.: *Čislennyje metody.* Moskva, Nauka, 1987. 75

Bučko, M.: *Počet pravdepodobnosti a matematická štatistika*, Bratislava, ALFA, 1990.

Buša, J.: *Octave. Rozšírený úvod.* Košice, FEI TU, ISBN 80-8073-595-6, 2006, 105 s.

Buša, J.: *Octave. Rozšírený úvod.* Košice, FEI TU, ISBN 80-8073-596-4, 2006, online na people.tuke.sk/jan.busa/kega/octave/octave.pdf. 7

Demidovič, B. P. — Maron, I. A.: *Základy numerické matematiky.* Praha, SNTL, 1966. 41

Gavalec, M. — Kováčová, N. — Ostertagová, E. — Skřivánek, J.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika v počítačovom prostredí MATLABu.* Košice, Elfa, 2002. 249

Hátle, J. — Likeš, J. *Základy počtu pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.* Praha/Bratislava, SNTL/ALFA, 1972.

Huťka, V. — Jakeš, J.: *Zbierka úloh z počtu pravdepodobnosti.* Bratislava, VŠE, 1974.

Kahaner, D. — Moler, C. — Nash, S.: *Numerical methods and Software*, Prentice-Hall International, Inc., 1989.

Kaukič, M.: *Numerická analýza I. Základné problémy a metódy.* Žilina, MC Energy s. r. o., 1998.

Kaukič, M.: *Základy programovania v Pylabe.* Košice, FEI TU, ISBN 80-8073-634-0, 2006, 60 s.

Kaukič, M.: *Základy programovania v Pylabe.* Košice, FEI TU, ISBN 80-8073-635-9, 2006, na people.tuke.sk/jan.busa/kega/pylab/pylab.pdf. 7

Likeš, J. — Machek, J.: *Počet pravdepodobnosti.* Praha SNTL, 1981.

Ostertagová, E.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika v príkladoch.* Košice, ELFA, 2005, ISBN 80-8086-005-X, 123 s.

Penjak, V. — Doboš, J. — Raisová, H. — Pavlisková, A. — Heretová, Z.: *MATEMATIKA IV.* Košice, VŠT, 1991.

Pirč, V.: *Numerické metódy.* Košice, ES TU, 1991.

Pirč, V. — Buša, J.: *Numerické metódy.* Košice, elfa, ISBN 80-89066-25-9, 2002, 131 s. 26, 33, 45, 75

Pribiš, J.: *Scilab.* Košice, FEI TU, ISBN 80-8073-654-5, 2006.

Pribiš, J.: *Scilab.* Košice, FEI TU, ISBN 80-8073-655-3, 2006, online na people.tuke.sk/jan.busa/kega/scilab/scilab.pdf. 7

Ralston, A.: *Základy numerické matematiky.* Praha, Academia, 1973.

Riečanová, Z. — Horváth, J. — Olejček, V. — Riečan, B. — Volauf, P.: *Numerické metódy a matematická štatistika.* Praha, SNTL, Bratislava ALFA, 1987. 71