MAT 2

podmienky získania KZ → 2x zápočtová písomka

1. ZP
35+15
(50b)
8. týždeň semestra
na cvičeniach

2. ZP
35 + 15
(50b)
1. týždeň skúš.
(20.5 a 21.5.)

info – mail od cvičiacich
\ stránka KMTI, predmet MAT II

! zatiaľ sa neprihlasujte do MOODLE !

Študenti KM (dr. HUTNÍKOVÁ)

POLYNÓMY

Def) $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$

výraz $P_n(x) = \boxed{a_n} x^{\boxed{n}} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

nazývame polynóm v premennej x.

a_i $(i = 0, \dots, n)$ koeficienty polynómu

ak $a_n \neq 0$, tak n nazývame stupeň polynómu.

$st\, P_n(x) = n$.

príklad: $P_1(x) = x + \boxed{1}$ absolútny člen

$P_3(x) = 4x^3 + 2x - 4$

4, 0, 2, −4

Vlastnosti polynómov:

1) rovnosť dvoch polynómov: dva polynómy sa rovnajú, ak sú rovnakého stupňa a majú rovnaké koeficienty (pri rovnakých mocninách x).

2) delenie polynómov:

majme $P_n(x)$, $Q_m(x)$, nech $n \geq m$, potom existujú 2 jednoznačne určené polynómy $S(x)$, $R(x)$ také, že

$$P_n(x) = Q_m(x) \cdot S(x) + R(x)$$

resp.

$$\boxed{\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}} = \boxed{S(x)} + \frac{\boxed{R(x)}}{Q_m(x)}$$

(delím $P_n(x)$ polynómom $Q_m(x)$)

$R(x)$ je zvyšok po delení: a) $R(x) = 0$

$$\boxed{P_n(x) = Q_m(x) \cdot S(x)}$$

(polynóm $Q_m(x)$ delí $P_n(x)$ bezo zvyšku)

b) ak $\boxed{R(x) \neq 0}$

$st\, R(x) < m$

Príklad

① $P_n(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$; $n = 3$

$Q_m(x) = x^2 - 3x + 2$, $m = 2$

? $\boxed{\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}}$? ? $\cancel{\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}}$?

ÁNO nie

$$(\boxed{x^3} - 2x^2 + x - 1) : (\boxed{x^2} - 3x + 2) = x + 1$$

$$-(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$\boxed{\boxed{x^2} - x - 1}$$

$$-(x^2 - 3x + 2)$$

$$\boxed{2x - 3}$$ koniec delenia

zvyšok po delení

$x^3 : x^2 = x$

$x^2 : x^2 = 1$

? $2x : x^2 \overset{?}{=} 2$

UŽ sa nedá deliť

$$(x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 - 3x + 2) = x + 1 + \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

②

$P_n(x) = x^3 - 1$; $n = 3$

$Q_m(x) = x - 1$, $m = 1$

vzorec: SUPER

$\boxed{x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)}$

kontrola

$? \frac{Q}{P} ?$ NIE $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

$n \geq m$

$(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$

$-(x^3 - x^2)$

$x^2 - 1$

$-(x^2 - x)$

$x - 1$

$-(x - 1)$

zvyšok 0

$x^3 : x = x^2$

$x^2 : x = x$

$x : x = 1$

polynóm $x-1$ delí polynóm x^3-1

$\boxed{x^3 - 1 = (x-1).(x^2+x+1)}$ vzorec

resp. $\frac{x^3-1}{x-1} = \boxed{x^2 + x + 1}$

VÝPOČET HODNOTY POLYNÓMU v čísle

pr. $P_3(x) = x^3 - 1$

$P_3(0) = -1$

$P_3(1) = 0$

$P_4(x) = -x^4 + 2x^2 - 7x + 4$

$P_4(0) = 4$

$P_4(2) =$

2 − 32 ?

2 − 18 ?

výpočet časovo náročnejší.

Šikovný spôsob: $\boxed{\text{naučíme sa}}$

majme polynóm $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \overset{a_2.x^2}{\ldots} + a_1 x + a_0$

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1})$$

$$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 \ldots\ldots + x a_n)\ldots)$$

hodnota polynómu $\boxed{x = \alpha}$

$$P_n(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \ldots\ldots + \alpha a_n)\ldots)$$

TABUĽKA: HORNEROVA SCHÉMA

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}.		a_2	a_1	a_0
α		$\alpha.b_n$	$\alpha.b_{n-1}$			$\alpha.b_2$	$\alpha.b_1$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}			b_1	b_0

$b_0 = P_n(\alpha)$

← koef. polyn. $P_n(x)$

$b_n = a_n$

$\boxed{b_{n-1}} = a_{n-1} + \alpha . b_n = \boxed{a_{n-1} + \alpha . a_n}$

$b_{n-2} = a_{n-2} + \alpha . b_{n-1} = a_{n-2} + \alpha(a_{n-1} + \alpha a_n)$

$\vdots$

$b_0 = a_0 + \alpha . b_1 = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha \boxed{b_2}) =$

$= a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha b_3)) \ldots -$

$= a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \ldots \alpha a_n)\ldots)$

príklady: 1) $P_4(x) = -x^4 + 2x^2 - 7x + 4$;

$P_4(2) = ?$

HORNEROVA SCHÉMA:

	−1	0	2	−7	4
2		−1·2	−2·2	−2·2	−11·2
	−1	−2	−2	−11	−18 $= P_4(2)$

2) $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

$P_3(3) = ?$

	1	−2	−2	−3
3		3	3	3
	1	1	1	$\boxed{0} = P_3(3)$

$x^2 + x + 1$

3 je koreň polynómu $P_3 = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ lebo $P_3(3) = 0$.

Def. $\boxed{\text{KOREŇ POLYNÓMU}}$

poznámka: $P_n(x) = 0$

$\boxed{\text{polynóm} = 0}$

algebraická rovnica

$P_3(x) = 0$ kubická rovnica

$P_4(x) = 0$ sú vzorce

$\boxed{P_5(x) = 0}$ už nie sú vzorce

platí: Ak α je koreň polynómu $P_n(x)$, potom $(x-\alpha)$ delí polynóm.

$$P_n(x) = (x-\alpha) \cdot Q_{n-1}(x)$$

príklad: $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

$P_3(3) = 0$ 3 je koreň

$$(x^3 - 2x^2 - 2x - 3) : (x-3) = x^2 + x + 1$$

$x^2 : x = x$

$$\begin{array}{l}
-(x^3 - 3x^2) \\
\hline
\quad x^2 - 2x - 3 \\
\quad -(x^2 - 3x) \\
\hline
\qquad x - 3 \\
\qquad x - 3 \\
\hline
\qquad 0
\end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x-3) \cdot \boxed{(x^2 + x + 1)}$$

koreň polynómu

pojem: násobný koreň polynómu.

α je (k-násobný).

ak $(x-\alpha)^k$ delí polynóm $P_n(x)$

vraciam sa k príkladu:

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = \boxed{\underbrace{(x-3)}_{3 \text{ je koreň}}(x^2+x+1)}$$

↓ rozklad na súčin koreň. činiteľov v $\mathbb{R}$.

hľadajme ďalšie korene:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

stačí riešiť kvadr. rovnicu

$$D = b^2 - 4ac = -3 < 0$$

nemá ($\mathbb{R}$ korene), ale komplexné má

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= \alpha + \beta i \\ x_2 &= \alpha - \beta i \end{aligned}}$$

nepočítame.

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = \underbrace{(x-3)^1 \cdot (x-(\alpha+\beta i))^1 \cdot (x-(\alpha-\beta i))^1}_{\text{rozklad na súčin koreňových činiteľov v } \mathbb{C} \ (\text{KČ})}$$

! budeme sa venovať rozkladu na súčin koreňových činiteľov v $\mathbb{R}$.

↓ obsahuje členy

$(x-\alpha)$; α ... reálny koreň

$(x-\alpha)^k$; α je k-násobný koreň

(x^2+px+q) kde x^2+px+q nemá $\mathbb{R}$ korene.

$(x^2+px+q)^k$

možné rozklady:

$$P_2(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$$

$$P_2(x) = (x-\alpha)^2$$

$$P_2(x) = x^2 + px + q \quad (\text{nemá } \mathbb{R} \text{ koreň})$$

$$P_3(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$P_3(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$$

$$P_3(x) = (x-\alpha)^3$$

$$P_3(x) = (x-\alpha)(x^2+px+q) \quad (\text{viď náš príklad}).$$

! polynóm 3. stupňa má stále reálny koreň.

$$P_4(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$
$$P_4(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$P_4(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$
$$P_4(x) = (x-\alpha)^3(x-\beta)$$
$$P_4(x) = (x-\alpha)^4$$
$$P_4(x) = \underbrace{(x-\alpha)(x-\beta)}(x^2+px+q)$$
$$P_4(x) = (x^2+p_1x+q_1)\cdot(x^2+p_2x+q_2)$$

↙ nemá reálne koreň

polynóm 4. stupňa: buď 4 reálne korene, alebo 2 reálne korene, alebo žiadny.

$\boxed{\text{VETA}}$ super pomôcka pri hľadaní koreňov

Nech $P_n(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientami.
Nech $\alpha = \frac{p}{q}$ je koreň $P_n(x)$, potom $p \mid a_0 \wedge q \mid a_n$.

príklady: ROZLOŽME daný polynóm na súčin koreňových činiteľov v R.

↓ teda hľadám reálne korene.

① $P_3(x) = \underline{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$

$$1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

! ak súčet koeficientov = 0, potom 1 je koreň

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(\text{polynóm 2. stupňa})$$

↙ určím ho napr. pomocou HORNEROVEJ SCHÉMY

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0 = $P_3(1)$

$x^2 - 5x + 6$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)\boxed{(x^2-5x+6)}$$
$$(x-2)(x-3)$$

pozriem a vidím resp. Vietove vzťahy.

$$= (x-1)(x-2)(x-3)$$

máme 3 reálne korene: 1, 2, 3

② $P_3(x) = \boxed{1}x^3 + 7x^2 + 16x + 12$

$1 + 7 + 16 + 12 \neq 0$

1 nie je koreň

ak mám všetky koeficienty kladné, určite nemáme kladný koreň.

použijeme vety:

možné racionálne korene:

$\alpha = \frac{p}{q}$; $p \mid a_0 = 12$; $p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 3, \pm 6, \pm 12$

$q \mid a_n = 1$; $q = \pm 1$

možné racion. korene:

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

+ my vieme, že musí byť záporný, teda

možné rac. korene sú

$\underbrace{-1, -2, -3, -4, -6, -12}_{\text{zistím, či áno, alebo nie pomocou HORNER. S}}$

	1	7	16	12
-1		-1	-6	-10
	1	6	10	$\boxed{2} = P_3(-1)$

-1 nie je koreň

	1	7	16	12
-2		-2	-10	-12
	1	5	6	$0 = P_3(-2)$

$x^2 + 5x + 6$

-2 je koreň

môžem písať:

$$x^3 + 7x^2 + 16x + 12 = (x+2)(x^2 + 5x + 6) =$$

-2 je koreň

$$= (x+2)(x+2)(x+3) =$$

$$\boxed{= (x+2)^2 (x+3)}$$

-2 je dvojnásobný koreň

-3 je jednoduchý koreň.