1.Numerické riešenie nelineárnych rovníc

1.1 Grafická separácia

Príklad 1: Graficky separujte všetky reálne korene nasledujúcich rovníc:

a) $x^5 - x + 3 = 0$, b) $x^4 - x^3 - 2 = 0$, c) $e^x - x^2 + 1 = 0$, d) $x^2 - 4 - x = 0$.

Riešenie:

a) Upravíme rovnicu $x^5 - x + 3 = 0$ (osamostatníme výraz x^5 na jednu stranu a všetko ostatné prenesieme na druhú stranu) $x^5 = x - 3$

Na oboch stranách rovnice dostaneme predpis funkcií, ktorých grafy vieme zostrojiť $g(x) = x^5$, $h(x) = x - 3$.

V prípade prvej funkcie, ktorá je mocninová, pre dve ľubovoľné hodnoty *x* dopočítame ich *y* – ové súradnice (tab. 1) a použijeme na zostrojenie grafu *g*(*x*), ktorým je parabola. Súradnice jej vrcholu sú (0, 0).

x	1	-1
y = *g*(*x*)	1	-1

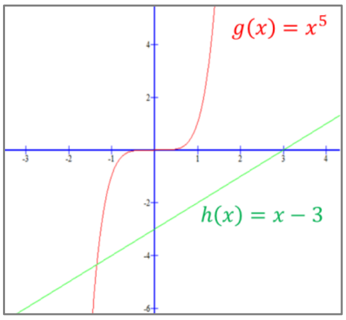
Tab. 1

Pre zostrojenie grafu *h*(*x*) stačí zvoliť dve hodnoty *x*, lebo grafom je priamka (tab. 2)

x	0	3
y = *g*(*x*)	-3	0

Tab. 2

Zostrojíme grafy funkcií *g*(*x*) a *h*(*x*) do spoločného súradnicového systému (obr. 1). Z obr. 1 vidieť, že grafy funkcií majú jeden priesečník, jeho *x* – ová súradnica leží v intervale (-2, -1).



Obr. 1

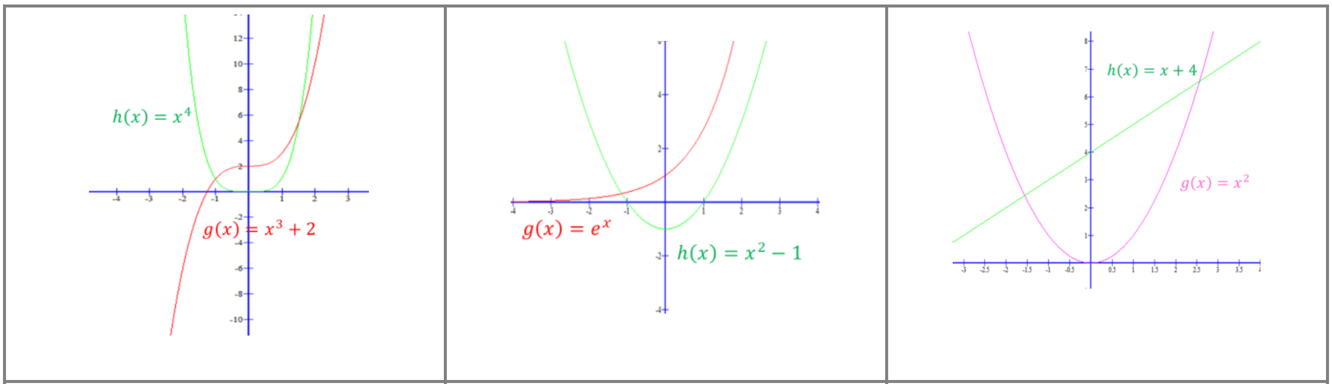
Táto súradnica priesečníka bude predstavovať **približnú hodnotu koreňa rovnice** $f(x) = x^5 - x + 3 = 0$. Rovnica má jeden koreň, ktorý bude ležať v danom intervale.

Poznámka: Ak by grafy po separácii mali viac priesečníkov, znamená to, že rovnica bude mať viac koreňov, ktoré budú ležať v rôznych intervaloch.

b) Z grafickej separácie (obr. 2a), vidieť, že grafy majú dva priesečníky, ktorých *x* – ové súradnice sú v intervaloch (-1, 0), (1, 2), teda daná rovnica má jeden záporný koreň z prvého intervalu a druhý kladný koreň z intervalu (1, 2).

c) Daná rovnica má jeden koreň v intervale (-2, -1), ktorý sme získali grafickou separáciou (obr. 2b).

d) Po grafickej separácii (obr. 2c) dostaneme dva priesečníky funkcií, ktorých *x* – ové súradnice sú v intervaloch (-2, -1), (2, 3).



a) b) c)

Obr. 2

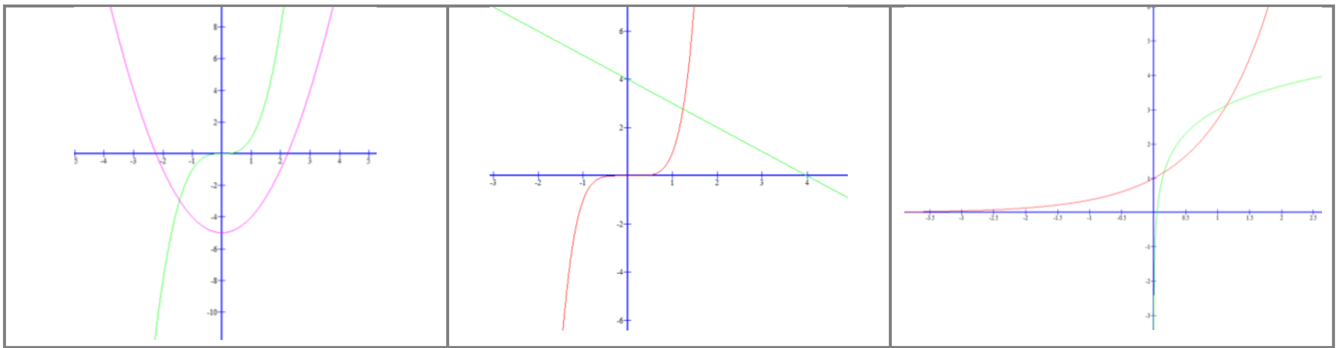
Úlohy:

1. Graficky separujte nasledujúce rovnice a určte všetky ich priesečníky a intervaly priesečníkov:

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 5 = 0$ [jeden priesečník na intervale (-2, -1), obr. 3a]

b) $f(x) = x^5 + x - 4 = 0$ [jeden priesečník na intervale (1, 2), obr. 3b]

c) $f(x) = e^x - \ln x - 3 = 0$ [dva priesečníky na intervaloch (0, 1) a (1, 2), obr. 3c]



a) b) c)

Obr. 3

2. Graficky separujte nasledujúce rovnice a určte koľko majú kladných koreňov:

a) $f(x) = e^{2x} - x^4 - 3 = 0$ [jeden kladný koreň na intervale (0,1)]

b) $f(x) = \ln x - 2x^2 + 5 = 0$ [dva kladné korene na intervaloch (0,1) a (1,2)]

c) $f(x) = - 2x^2 + 4 - 2x = 0$ [jeden kladný koreň na intervale (0,2)]

d) $f(x) = x^5 - \ln x - 2 = 0,$ [dva kladné korene na intervaloch (0,1) a (1,2)]

3. Graficky separujte nasledujúce rovnice a určte koľko majú záporných koreňov:

a) $f(x) = x^6 - 3x - 3 = 0$ [jeden záporný koreň na intervale (-1, 0)]

b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4 = 0$ [dva záporné korene na intervaloch (-3,-2) a (-1,0)]

Grafy zostrojte ručne, na overenie správnosti môžete použiť ľubovoľný program napr. **Graph** alebo použite na https://sagecell.sagemath.org/ program **SageCellMath**, ktorý netreba inštalovať do PC. Do príkazového okna napíšete v Sage už separované funkcie (pozri **Príklad**).

Predpis funkcií v Sage:

exponenciálna: f(x) = exp (x)

logaritmická: f(x) = ln (x)

mocninová: f(x) = x*x*x

lineárna: f(x) = 2*x -3

Príklad:

f(x)= 3*x+1

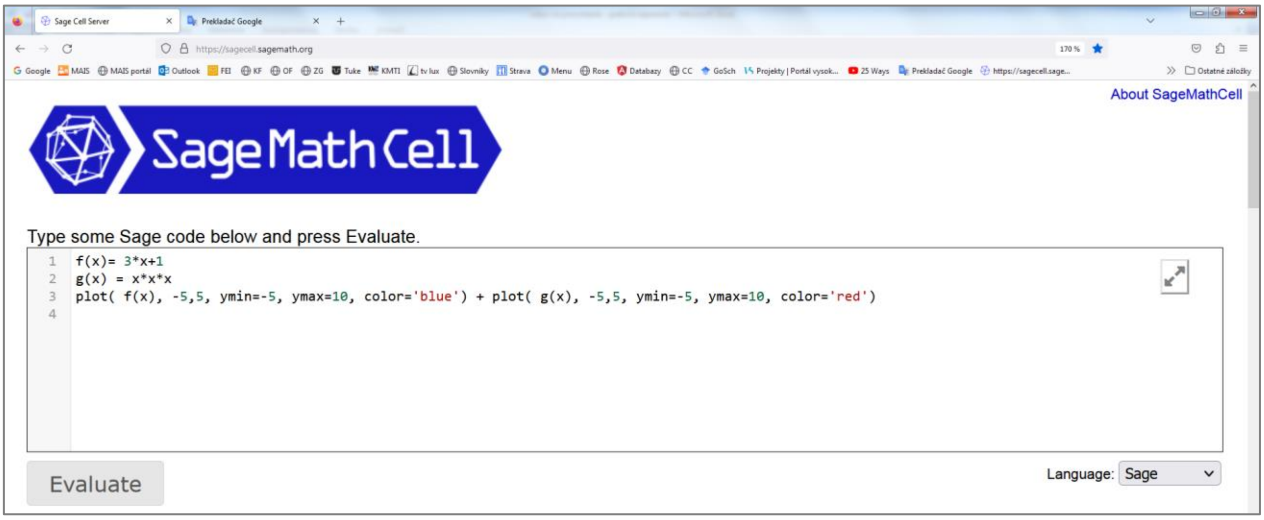
g(x) = x*x*x

plot(f(x), -5,5, ymin=-5, ymax=10, color='blue') + plot(g(x), -5,5, ymin=-5, ymax=10, color='red')

Na vykreslenie grafov stlačíte **Evaluate.**

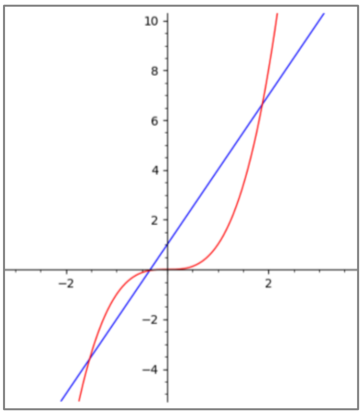
Hodnoty **max** a **min** pre *x* – ové a pre *y* – ové súradnice si volíte sami, rovnako farbu krivky.

Ukážka príkazového okna:



Obr. 4

Ukážka riešenia:



Obr. 5

1.2 Metóda polovičného delenia intervalu (bisekcie)

Príklad 2: Metódou polovičného delenia intervalu určte menší reálny koreň rovnice $\mathrm{f}(x) = \ln x - x + 3 = 0$ s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-2}$.

Riešenie:

Pri metóde bisekcie pri riešení použijeme nasledujúci postup:

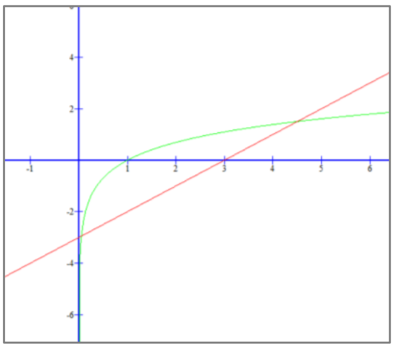
1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa – postupujeme rovnako ako v príklade 1. Upravíme danú rovnicu do tvaru $\ln \mathrm{x} = \mathrm{x} - 3$. Na oboch stranách rovnice dostaneme predpis funkcií, ktorých grafy vieme zostrojiť $g(x) = \ln x$, $h(x) = x - 3.$

V prípade prvej funkcie, ktorá je logaritmická, vieme, že je definovaná pre $x > 0$ a prechádza bodom o súradniciach (1, 0). Pre zostrojenie grafu druhej funkcie stačí zvoliť dve hodnoty *x*, lebo grafom je priamka (tab. 3).

x	0	3
y = *h*(*x*)	-3	0

Tab. 3

Zostrojíme grafy funkcií *g*(*x*) a *h*(*x*) do spoločného súradnicového systému (obr. 6). Z obr. 2 vyplýva, že grafy funkcií majú dva priesečníky, ktorých *x* – ové súradnice ležia v intervaloch (0, 1) a (4, 5).



Obr. 6

2. Definujeme interval $\langle \mathrm{a} , \mathrm{b} \rangle$ a overíme, či sa koreň α nachádza v zvolenom intervale

Menší koreň leží v intervale (0,1). Keďže funkcia logaritmus je definovaná pre $x > 0$ a z obr. 2 vidieť, že koreň leží bližšie k hodnote 0, zvolíme interval ⟨0,01 ,0,5⟩. Overíme, či koreň sa nachádza v zvolenom intervale, $\boldsymbol{\alpha} \,\boldsymbol{\epsilon}\, \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ ak $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) < \mathbf{0}$. V tomto prípade, na určenie f(a) a f(b) použijeme vzťah $\mathrm{f}(x) = \ln x - x + 3$, kde za *x* dosadíme hodnoty 0,01 a 0,5: $\mathrm{f}(0{,}01) = \ln 0{,}01 - 0{,}01 + 3 = -1{,}62,$

$$\mathrm{f}(0{,}5) = \ln 0{,}5 - 0{,}5 + 3 = 1{,}81.$$

Potom f(0,01) · f(0,5) < 0, je splnená podmienka, že koreň sa nachádza v zvolenom intervale a môžeme daný interval použiť.

Poznámka: Ak pri výpočte dostaneme **f(a) · f(b) > 0**, potom sa koreň nenachádza v danom intervale a treba ho zmeniť (zmenšiť alebo zväčšiť) alebo môže mať rovnica f(x) = 0 na intervale (a, b) párny počet koreňov. Napr. rovnica $\mathrm{f}(x) = x^4 - 4 + x^2 = 0$ má na intervale (-2, 2) dva korene, aj keď f(-2) · f(2) > 0.

3. Určíme podmienku ukončenia delenia intervalu – táto podmienka je daná vzťahom $|\mathbf{b_n} - \mathbf{a_n}| < \mathbf{2\varepsilon}$, teda pre tento prípad $|b_n - a_n| < 2.5.10^{-2} = 0{,}1$. Ak bude splnená táto podmienka a súčasne bude platiť $\mathbf{f(b_n).f(a_n) < 0}$, ukončíme iteračný proces (proces opakovania delenia intervalu).

4. Určíme počiatočné hodnoty $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{b_n}$, $\mathbf{c_n}$ – pre n = 0 (n - poradie iterácie, opakovania) budú počiatočné hodnoty a_0 = a = 0,01, b_0 = b = 0,5 a c_0 sa určí podľa vzťahu $\mathbf{c_n} = \frac{\mathbf{a_n+b_n}}{\mathbf{2}}$, teda $c_0 = \frac{0{,}01+0{,}5}{2} = 0{,}255$.

5. Urobíme n delení intervalu $\langle \mathbf{a_n}, \mathbf{b_n} \rangle$ na interval $\langle \mathbf{a_n}, \mathbf{c_n} \rangle$ alebo $\langle \mathbf{c_n}, \mathbf{b_n} \rangle$ - pri delení intervalu zapisujeme hodnoty do tabuľky, kde sa riadime týmito pravidlami.

Ak platí pre danú iteráciu, že

$\mathbf{f(a_n).f(c_n) < 0}$, potom interval $\langle \mathbf{a_{n+1}}, \mathbf{b_{n+1}} \rangle$ nahradíme intervalom $\langle \mathbf{a_n}, \mathbf{c_n} \rangle$

$\mathbf{f(a_n).f(c_n) > 0}$, potom interval $\langle \mathbf{a_{n+1}}, \mathbf{b_{n+1}} \rangle$ nahradíme intervalom $\langle \mathbf{c_n}, \mathbf{b_n} \rangle$

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	c_n	$f(c_n)$	$f(a_n).f(c_n)$	$\lvert b_n - a_n \rvert$
0	0,01	-	0,5	+	0,255	+	- $\langle a_n, c_n \rangle$	$0{,}49 > 0{,}1$
1	0,01	-	0,255	+	0,1325	+	- $\langle a_n, c_n \rangle$	$0{,}215 > 0{,}1$
2	0,01	-	0,1325	+	0,07125	+	- $\langle a_n, c_n \rangle$	$0{,}1275 > 0{,}1$
3	0,01	-	0,07125	+	0,040625			$0{,}02 < 0{,}1$

Tab. 4

Poznámka: V tab. 4 sme v druhom riadku pre n = 1 nahradili b_1 výrazom $c_0 = 0{,}255$ a hodnotu a_1 sme ponechali rovnakú ako v predchádzajúcom riadku $a_1 = a_0 = 0{,}01$ na základe pravidla pre $\mathbf{f(a_0).f(c_0) < 0}$.

Z tab. 4 vyplýva, že delenie ukončíme pre 3. iteráciu, kde $|b_3 - a_3| = 0{,}02 < 0{,}1$ a súčasne $f(a_3).f(b_3) < 0$.

Pomôcka: Ak chceme vedieť ešte pred delením intervalu koľko opakovaní treba urobiť, aby sme dostali hodnotu koreňa s požadovanou presnosťou ε pre zvolený interval, môžeme použiť vzťah $\frac{b-a}{\varepsilon} < 2^{n+1}$. V tomto prípade $\frac{0{,}5-0{,}01}{5.10^{-2}} < 2^{n+1}$, po úprave $9{,}8 < 2^{n+1} = 2^4 = 16$. Potom $n + 1 = 4$, počet potrebných opakovaní cyklu, aby sme dostali hodnotu koreňa s požadovanou presnosťou je $n = 4 - 1 = 3$.

6. Aproximujeme koreň pomocou c_n a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť

Približná hodnota koreňa rovnice je daná $c_3 = 0{,}036875$, ktorú zaokrúhlime podľa danej presnosti $\varepsilon = 5.10^{-2}$ na dve desatinné miesta, presnú hodnotu koreňa aproximujeme $\alpha \approx 0{,}04$.

Poznámka: Ak by v zadaní úlohy bol daný počet iterácií a nie presnosť ε, v takom prípade ukončíme výpočet pri danom počte iterácií a urobíme odhad chyby určenia koreňa podľa vzťahu $|\boldsymbol{c_n} - \boldsymbol{\alpha}| < \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{2^{n+1}}}$, kde c_n je približná hodnota koreňa a α je jeho presná hodnota.

Úlohy:

1. Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $\ln x + x = 0$. Reálny koreň vypočítajte metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-3}$. $[\alpha \approx 0{,}566]$
2. Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $x^5 - 6x^2 + 1 = 0$. Menší kladný reálny koreň vypočítajte metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-4}$. $[\alpha \approx 0{,}4106]$

3. Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $x^3 + 4x^2 - 2 = 0$. Väčší záporný reálny koreň vypočítajte metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-4}$. $[\alpha \approx -0{,}7892]$

4. Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $x^4 + 2x^3 - 5 = 0$. Menší reálny koreň vypočítajte metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-4}$. $[\alpha \approx -2{,}3738]$

5. Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $e^x + x - 2 = 0$. Väčší záporný reálny koreň vypočítajte metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-3}$. $[\alpha \approx 0{,}441]$

6. Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $x^5 - x + 3 = 0$. Reálny koreň vypočítajte metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-1}$. $[\alpha \approx -1{,}2]$

7. Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $x^2 - 4 + x = 0$. Všetky reálne korene vypočítajte metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-2}$. $[\alpha_1 \approx 1{,}53, \alpha_2 \approx -2{,}53]$

8. Metódou polovičného delenia intervalu určte väčší reálny koreň rovnice z riešeného príkladu 2. Urobte 4 iterácie a odhadnite chybu určenia koreňa. $[|c_n - \alpha| < 0{,}03125]$