NEURČITÝ INTEGRÁL

Def. PRIMITÍVNA FUNKCIA.
Funkciu $F(x)$ nazývame primitívnou k $f(x)$ na J, ak $\forall x \in J$ platí $F'(x) = f(x)$.

---

príklad: $F_1(x) = 4x^3 - 2x^2 + 8x$

$F_1(x)$ je primitívna k $f(x)$ → $f(x) = 12x^2 - 4x + 8$

$F_2(x) = 4x^3 - 2x^2 + 8x + 16$ konšt.

aj $F_2(x)$ je primitívna k $f(x)$

platí: Ak k funkcii $f(x)$ existuje primitívna funkcia, potom k $f(x)$ existuje nekonečne veľa primitívnych funkcií.

VETA: Nech $F(x)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na J. Potom aj $G(x) = F(x) + c$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na J.

Dôkaz: predpoklad $F'(x) = f(x)$

$$\left[F(x) + c\right]'_{x \in J} = F'(x) + [c]' = F'(x) = f(x)$$

DEFINÍCIA: NEURČITÝ INTEGRÁL
Množinu $\{F(x) + c;\ c \in \mathbb{R}\}$ všetkých primitívnych funkcií k f na J nazývame neurčitý integrál funkcie f.

Zapisujeme

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{integrand}}\, \underbrace{dx}_{\text{diferenciál}} = \underbrace{F(x)}_{\text{primitívna funkcia}} + \overbrace{C}^{\text{integračná konštanta}}$$

VETA existencia primitívnej funkcie (integrovateľnosť funkcie)
Nech f je **spojitá**! na J, potom k nej existuje na J primitívna funkcia $F(x)$. (teda f je integrovateľná)

význam vety: je TEORETICKÝ:
viem, že existuje $F(x)$, ale nezaručuje, že viem nájsť $\boxed{\text{predpis}}$ $F(x)$.

príklad: $\int e^{x^2} dx$ → je spojitá, ale nevieme nájsť predpis primitívnej funkcie.

ÚLOHY (OTÁZKY) v súvislosti s neurčitým integrálom.

1) Kedy existuje primitívna funkcia? — MÁME ODPOVEĎ $f(x)$ spojitá
2) Koľko existuje primitívnych funkcií? — nekonečne veľa
3) Ako nájsť predpis primitívnej funkcie? Ako počítať integrál? — PROCES INTEGROVANIA
4) Aký má význam neurčitý integrál? NAČO? — odpoveď: URČITÝ INTEGRÁL → má geometrické aplikácie (obsah rovinnej oblasti, dĺžka krivky...)

príklad z úvodu prednášky
viem $\begin{cases} F(x) = 4x^3 - 2x^2 + 8x \\ f(x) = 12x^2 - 4x + 8 \end{cases}$

$$\int \underbrace{(12x^2 - 4x + 8)}_{f(x)}\, dx = 4x^3 - 2x^2 + 8x + C$$

$\boxed{\text{proces integrovania}}$ = obsah nasledujúcich prednášok.

VETA o linearite neurčitého integrálu

$$\boxed{\int \left(a f(x) + b g(x)\right) dx = a \int f(x)\,dx + b \int g(x)\,dx}$$

resp. $\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx$

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

! základné integračné vzorce — MUSÍME SA NAUČIŤ! ← nie všetky, lebo vieme derivovať a časť vzorcov poznáme. :)

vzťahy platia na množinách, kde sú uvedené funkcie definované.

$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$; $\alpha \neq -1$ — p. $\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$

$\boxed{\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C}$

$\boxed{\int \dfrac{1}{a^2+x^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C}$ ukážeme si jeho platnosť.

$\int \dfrac{1}{1-x^2} dx = \dfrac{1}{2} \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+k}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$

$\boxed{\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C}$ odvodíme platnosť.

vedieť integračné vzorce je ZÁKLAD!

PRÍKLADY — použije základné vzorce + úpravy.

1) $\int \left(5x^2 + 4x - \dfrac{8}{x}\right) dx = \int 5x^2 dx + \int 4x\,dx - \int \dfrac{8}{x} dx$
$= 5\int x^2 dx + 4\int x\,dx - 8\int \dfrac{1}{x} dx = 5 \cdot \dfrac{x^{2+1}}{2+1} + 4 \cdot \dfrac{x^2}{2} -$
$- 8 \cdot \ln|x| + C = \dfrac{5x^3}{3} + 2x^2 - 8\ln|x| + C$

2) $\int \left(7 \cdot e^x + \dfrac{1}{4}\sqrt[3]{x^4} + 5 \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\right) dx =$
$= 7\int e^x dx + \dfrac{1}{4}\int \underbrace{\sqrt[3]{x^4}}_{= x^{\frac{4}{3}}} dx + 5 \int \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}}_{= x^{-\frac{5}{4}}} dx =$
$= 7 \cdot e^x + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + 5 \cdot \dfrac{x^{-\frac{5}{4}+1}}{-\frac{5}{4}+1} + C =$
$= 7e^x + \dfrac{1}{4} \dfrac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + 5 \cdot \dfrac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} + C$
$= 7e^x + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{7} \cdot \sqrt[3]{x^7} - 4 \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} + C$

3) $\int \dfrac{x^2}{x^2+1} dx = \int \dfrac{x^2 \overbrace{+1-1}^{=0}}{x^2+1} dx = \int \left(\underbrace{\dfrac{x^2+1}{x^2+1}}_{=1} - \dfrac{1}{x^2+1}\right) dx =$

máme vzorec $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$
(pri integrovaní často používame aj „VHODNÉ" ÚPRAVY).

$= \int 1\,dx - \int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \boxed{x - \operatorname{arctg} x + C}$

$\int 8\,dx = 8x + C$

SUBSTITUČNÁ METÓDA (pre neurčitý integrál)

VETA Nech $\varphi: (a,b) \to (\alpha,\beta)$ má spojitú deriváciu.
Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k $f(t)$ na (α,β).
Potom $F(\varphi(x))$ je primitívna funkcia k $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ na (a,b).

Zapisujeme:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{substitúcia} \\ \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\,dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int f(t)\,dt = F(t) + C = \boxed{F(\varphi(x))} + C$$

Dôkaz: chcem ukázať, že $F(\varphi(x))$ je primitívna $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

derivujeme $\left[F(\varphi(x))\right]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = F'(t) \cdot \varphi'(x) =$
$x \in (a,b)$, $\varphi: (a,b) \to (\alpha,\beta)$; $\varphi(x) = t$, $t \in (\alpha,\beta)$
$= f(t) \cdot \varphi'(x) =$
$= \boxed{f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}$ je primitívna k

využijem substitúciu ukážeme platnosť:

$$\boxed{\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx} = \left| \begin{array}{l} \text{substitúcia} \\ \boxed{f(x) = t} \\ f'(x)\,dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \dfrac{dt}{t} = \int \dfrac{1}{t} dt = \ln|t| + C \underset{\text{vrátim sa k } x}{=} \boxed{\ln|f(x)| + C}$$

$$\int \dfrac{1}{a^2 + x^2} dx = \int \dfrac{1}{a^2\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} dx = \dfrac{1}{a^2} \int \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx =$$

chcem z a^2 1

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t \\ \frac{1}{a} dx = dt \\ dx = a\,dt \end{array} \right| = \dfrac{1}{a^2} \int \dfrac{1}{1+t^2}\, a\,dt = \dfrac{1}{a} \int \dfrac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C;$$

PRÍKLADY

1) $\int \sin x \cdot \cos x\, dx = \left| \begin{array}{ll} \sin x = t & \text{subst. vzťah} \\ \cos x\, dx = dt & \text{derivácia} \end{array} \right| =$

$= \int t\, dt = \dfrac{t^2}{2} + C = \dfrac{\sin^2 x}{2} + C;$

super :)

2) $\int \dfrac{e^x}{4 + e^x} dx = \left| \begin{array}{l} 4 + e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \dfrac{1}{t} dt =$:)

$= \ln|t| + C = \ln(4 + e^x) + C$

3) $\int \dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = t \\ \frac{1}{1+x^2} dx = dt \end{array} \right| =$

$= \int t^2 dt = \dfrac{t^3}{3} + C = \dfrac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + C;$