Technická univerzita v Košiciach

KATEDRA MATEMATIKY A
TEORETICKEJ INFORMATIKY

MATEMATIKA II v príkladoch

FEI

Blanka Baculíková – Anna Grinčová

Košice 2022

Technická univerzita v Košiciach

KATEDRA MATEMATIKY A TEORETICKEJ INFORMATIKY

MATEMATIKA II v príkladoch

FEI

Blanka Baculíková – Anna Grinčová

Košice 2022

RECENZOVALI: prof. RNDr. Jozef Džurina, CSc.
doc. RNDr. Miriam Andrejiová, PhD.

1. vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

ISBN

OBSAH

ÚVOD

Táto učebná pomôcka je určená pre študentov prvého ročníka bakalárskej formy štúdia Fakulty elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach (FEI TU), ale môže poslúžiť aj študentom iných fakúlt.

Učebnica je rozdelená do šiestich kapitol, ktoré obsahujú základné teoretické poznatky potrebné k riešeniu príkladov, vzorové riešené aj neriešené úlohy k učivu preberanému v predmete Matematika II.

Cieľom tejto učebnej pomôcky nebolo podať ucelený teoretický prehľad riešenej problematiky v predmete Matematika II, preto je vhodné kombinovať používanie tejto učebnice s voľne dostupnými e-learningovými materiálmi Katedry matematiky a teoretickej informatiky FEI TU.

Na záver ďakujeme prof. RNDr. Jozefovi Džurinovi, CSc. a doc. RNDr. Miriam Andrejiovej, za starostlivé prečítanie rukopisu a za cenné pripomienky, ktorými prispeli k zlepšeniu textu tejto
učebnice.

Autorky

1 POLYNÓMY A ALGEBRICKÉ ROVNICE

1.1 Operácie s polynómami

Polynómy sa sčítavajú a odčítavajú tak, že sa sčítajú, resp. odčítajú koeficienty polynómov pri rovnakej mocnine premennej x.

Príklad 1 *Vypočítajme* $(x^3-7x^2+5x-2)+(5x^2-6x+4)$,
$(x^3-7x^2+5x-2)-(5x^2-6x+4)$.

Riešenie:

$$(x^3-7x^2+5x-2)+(5x^2-6x+4)=(1+0)x^3+(-7+5)x^2+(5-6)x\ \ +(-2+4)=$$
$$=x^3-2x^2-x+2$$

$$(x^3-7x^2+5x-2)-(5x^2-6x+4)=(1-0)x^3+(-7-5)x^2+[5-(-6)]x+(-2-4)=$$
$$=x^3-12x^2+11x-6$$

Polynómy sa násobia ako mnohočleny, teda násobí sa každý člen s každým.

Príklad 2 *Vypočítajme* $(x^2+2x-3)\cdot(x+6)$

Riešenie:

$$(x^2+2x-3)\cdot(x+6)=x^2\cdot x+x^2\cdot 6+2x\cdot x+2x\cdot 6-3\cdot x-3\cdot 6=x^3+6x^2+2x^2+12x-3x-18=$$

$$=x^3+8x^2+9x-18$$

Delenie polynómov si ukážeme v nasledujúcom príklade.

Príklad 3 *Vypočítajme* $(x^5-4x^4+3x^2-2x+5):(x^2+3x-2)$.

Riešenie:

$$(x^5-4x^4+3x^2-2x+5):(x^2+3x-2)=x^3-7x^2+23x-80$$
$$\underline{-x^5-3x^4+2x^3}$$
$$-7x^4+2x^3+3x^2-2x+5$$
$$\underline{7x^4+21x^3-14x^2}$$
$$23x^3-11x^2-2x+5$$
$$\underline{-23x^3-69x^2+46x}$$
$$-80x^2+44x+5$$
$$\underline{80x^2+240x-160}$$
$$\textit{zvyšok}\quad 284x-155$$

Výsledok sa môže zapísať aj v tvare, ktorý sa používa pri rozklade na elementárne zlomky:

$$(x^5-4x^4+3x^2-2x+5):(x^2+3x-2)=x^3-7x^2+23x-80+\frac{284x-155}{x^2+3x-2}.$$

Príklad 4 *Nájdime kanonický rozklad polynómu* x^4-9x^2 *v množine* $\mathbf{R}$ *aj* $\mathbf{C}$.

Riešenie: Polynóm rozložíme na súčin vyberaním spoločného výrazu pred zátvorku a použitím vzťahu $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$$x^4-9x^2=x^2(x^2-9)=x^2(x-3)(x+3)$$

V množine $\mathbf{R}$ aj v $\mathbf{C}$ je výsledok v tvare $x^4-9x^2=x^2(x-3)(x+3)$.

Príklad 5 *Nájdime kanonický rozklad polynómu* x^3+x^2+4x+4 *v množine* $\mathbf{R}$ *aj* $\mathbf{C}$.

Riešenie: V tomto prípade využijeme postupné vyberanie spoločných výrazov pred zátvorku.

$$x^3+x^2+4x+4=(x^3+x^2)+(4x+4)=x^2(x+1)+4(x+1)=(x+1)(x^2+4)$$

Výraz x^2+4 v množine $\mathbf{R}$ nemá korene, ale v množine $\mathbf{C}$ rozložíme x^2+4 podľa vzťahu $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$$x^2+4=x^2-(-4)=(x-2i)(x+2i)$$

V množine $\mathbf{R}$ je výsledok v tvare $x^3+x^2+4x+4=(x+1)(x^2+4)$.
V množine $\mathbf{C}$ je výsledok v tvare $x^3+x^2+4x+4=(x+1)(x-2i)(x+2i)$.

Príklad 6 *Nájdime kanonický rozklad polynómu* x^3-2x^2-5x+6 *v množine* $\mathbf{R}$ *aj* $\mathbf{C}$.

Riešenie: Postup využitý pri predchádzajúcich úlohách sa nedá aplikovať v tejto úlohe. Pri kanonickom rozklade použijeme Hornerovu schému. Možnými koreňmi daného polynómu sú čísla v tvare $\frac{D(6)}{D(1)}=\left\{\frac{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6}{\pm1}\right\}=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$. Sú to čísla v tvare zlomku, kde v čitateli sú delitele absolútneho koeficienta, teda čísla 6. V menovateli sú delitele vedúceho koeficienta polynómu, teda čísla 1. Postupne budeme overovať, či niektorý člen danej množiny je koreňom polynómu. Ak je tomu tak, zvyšok po delení (posledné číslo v riadku) je rovné 0.

	1	**-2**	**-5**	**6**
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	**0**
3		3	6	
	1	2	**0**	

V prvom riadku tabuľky sú koeficienty polynómu usporiadané od najvyššej mocniny.
V každom ďalšom riadku, ktorého posledným číslom je nula, sú koeficienty o jeden stupeň nižšieho polynómu.

V množine **R** aj v **C** je výsledok v tvare $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$.

Príklad 7 *Nájdime kanonický rozklad polynómu* $x^3-x^2-8x+12$ *v množine* **R** *aj* **C**.

Riešenie: Tak, ako v predchádzajúcej úlohe, aj tu využijeme Hornerovu schému, pričom množinu potenciálnych koreňov tvoria čísla $\frac{D(12)}{D(1)}=\left\{\frac{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12}{\pm1}\right\}=$ $\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12\}$.

	1	**-1**	**-8**	**12**
2		2	2	-12
	1	1	-6	**0**
2		2	6	
	1	3	**0**	

Všetky korene polynómu sú reálne, teda v **R** aj v **C** je výsledok v tvare
$x^3-x^2-8x+12=(x-2)^2(x+3)$.

Príklad 8 *Nájdime kanonický rozklad polynómu* $2x^3+3x^2-11x-6$ *v množine* **R** *aj* **C**.

Riešenie: Množinu potenciálnych koreňov tvoria čísla v tvare zlomku, kde v čitateli sú delitele absolútneho koeficienta, teda čísla -6. V menovateli sú delitele vedúceho koeficienta polynómu, teda čísla 2. $\frac{D(-6)}{D(2)}=\left\{\frac{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6}{\pm1,\pm2}\right\}=\left\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}\right\}$.

	2	**3**	**-11**	**-6**
2		4	14	6
	2	7	3	**0**
-3		-6	-3	
	2	1	**0**	

Všetky korene polynómu sú reálne, teda v **R** aj v **C** je výsledok v tvare
$2x^3+3x^2-11x-6=(x-2)(x+3)(2x+1)$.

Príklad 9 *Nájdime kanonický rozklad polynómu* $x^4+2x^3+6x^2+10x+5$ *v množine* **R** *aj v množine* **C**.

Riešenie: Vzhľadom na to, že všetky koeficienty daného polynómu sú rovnakého (kladného) znamienka, v tomto prípade prichádzajú do úvahy len záporné korene. Množinu potenciálnych koreňov tvoria čísla v tvare zlomku, kde v čitateli sú delitele absolútneho koeficienta, teda čísla 5. V menovateli sú delitele vedúceho koeficienta polynómu, teda čísla 1. $\frac{D(5)}{D(1)}=\left\{\frac{\pm1,\pm5}{\pm1}\right\}=\{-1,-5\}$.

	1	**2**	**6**	**10**	**5**
-1		-1	-1	-5	-5
	1	1	5	5	**0**
-1		-1	0	-5	
	1	0	5	**0**	

V množine **R** je výsledok v tvare $x^4+2x^3+6x^2+10x+5=(x+1)^2(x^2+5)$.
V množine **C** je výsledok v tvare $x^4+2x^3+6x^2+10x+5=(x+1)^2(x+\sqrt{5}\,i)(x-\sqrt{5}\,i)$.

V úlohách 1 – 17 vypočítajte:

Výsledky:

1. $(x^3+2x^2-2x+1):(x^2-1)$ — $x+2$ a zvyšok $-x+3$

2. $(x^3+6x^2-6x+7):(x^3-x^2+x-6)$ — 1 a zvyšok $7x^2-7x+13$

3. $(4x^4+3x^3-2x^2+x):(x^2+x-3)$ — $4x^2-x+11$ a zvyšok $-13x+33$

4. $(x^5+7x^3+2x^2+5):(x^3-2x+4)$ — x^2+9 a zvyšok $-2x^2+18x-31$

5. $(x^4+4x^3+x^2+30x+14):(x^3+4x^2-x-4)$ — x a zvyšok $2x^2+34x+14$

6. $(x^4-3x^2+17x-23):(x^3-7x+6)$ — x a zvyšok $4x^2+11x-23$

7. $(6x^4-12x^3-11x^2+17x+4):(x^3-2x^2-x+2)$ — $6x$ a zvyšok $-5x^2+5x+4$

8. $(x^4-2x^3-5x^2-7x+31):(x^3-4x^2+x+6)$ — $x+2$ a zvyšok $2x^2-15x+19$

9. $(x^4+3x^3-6x^2+17x+36):(x^4+2x^3-4x^2+7x+30)$ — 1 a zvyšok $x^3-2x^2+10x+6$

10. $(5x^3+9x^2-22x-8):(x^3-4x)$ — 5 a zvyšok $9x^2-2x-8$

11. $(x^5-x^4+3x^3-6x^2-2x-4):(x^4-x^3+2x^2-2x)$ — x a zvyšok x^3-4x^2-2x-4

12. $(2x^4-3x^3-10x^2+17x-12):(x^3-2x^2-5x+6)$ — $2x+1$ a zvyšok $2x^2+10x-18$

13. $(7x^4+41x^3+90x^2+88x+26):(x^4+5x^3+11x^2+11x+4)$ — 7 a zvyšok $6x^3+13x^2+11x-2$

14. $(3x^5-15x^4+21x^3+4x^2-28x+12):(x^4-5x^3+8x^2-4x)$ — $3x$ a zvyšok $-3x^3+16x^2-28x+12$

15. $(x^5 - 6x^4 + 5x^3 + 26x^2 - 65x + 30) : (x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8)$
$x - 3$ a zvyšok $-2x^3 + 8x^2 - 21x + 6$

16. $(5x^5 + 27x^4 + 45x^3 + 11x^2 - 26x - 12) : (x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 12x^2 + 4x)$
5 a zvyšok $-3x^4 - 20x^3 - 49x^2 - 46x - 12$

17. $(7x^5 + 14x^4 + 41x^3 + 72x^2 + 20x - 6) : (x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 10x + 5)$
$7x$ a zvyšok $-x^3 + 2x^2 - 15x - 6$

V úlohách 18 – 72 urobte kanonický rozklad polynómu v **R** aj v **C**:

		Výsledky:
18.	$x^3 - 7x - 6$	$(x+1)(x+2)(x-3)$
19.	$x^3 - 2x^2 - x + 2$	$(x-1)(x+1)(x-2)$
20.	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	$(x-1)(x-2)(x-3)$
21.	$x^3 - 3x^2 - 10x + 24$	$(x-2)(x+3)(x-4)$
22.	$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$	$(2x-1)(x-1)(x+3)$
23.	$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$	$(3x-1)(x-1)(x+2)$
24.	$2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$	$(2x-3)(x+1)(x+3)$
25.	$3x^3 + 11x^2 + 12x + 4$	$(3x+2)(x+1)(x+2)$
26.	$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$	$(x-1)^2(x-2)$
27.	$x^3 + 5x^2 + 7x + 3$	$(x+1)^2(x+3)$
28.	$x^3 - 12x + 16$	$(x-2)^2(x+4)$
29.	$x^3 + 8x^2 + 21x + 18$	$(x+3)^2(x+2)$
30.	$x^3 - x^2 + 4x - 4$	$(x-1)(x^2+4)$
		$(x-1)(x-2i)(x+2i)$
31.	$x^3 - x^2 + 3x + 5$	$(x+1)(x^2-2x+5)$

		$(x+1)(x-1-2i)(x-1+2i)$
32.	x^3+x-10	$(x-2)(x^2+2x+5)$
		$(x-2)(x+1-2i)(x+1+2i)$
33.	x^3-5x^2+8x-6	$(x-3)(x^2-2x+2)$
		$(x-3)(x-1-i)(x-1+i)$
34.	$x^3-6x^2+12x-8$	$(x-2)^3$
35.	x^3+3x^2+3x+1	$(x+1)^3$
36.	$x^3-9x^2+27x-27$	$(x-3)^3$
37.	$x^4+3x^3-7x^2-27x-18$	$(x+1)(x+2)(x-3)(x+3)$
38.	$x^4-6x^3+7x^2+6x-8$	$(x-1)(x+1)(x-2)(x-4)$
39.	$x^4-2x^3-13x^2+38x-24$	$(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)$
40.	$x^4-x^3-7x^2+13x-6$	$(x-1)^2(x-2)(x+3)$
41.	$x^4+7x^3+17x^2+17x+6$	$(x+1)^2(x+2)(x+3)$
42.	$x^4+3x^3-12x^2-20x+48$	$(x-2)^2(x+4)(x+3)$
43.	$x^4-3x^3+6x^2-12x+8$	$(x-1)(x-2)(x^2+4)$ $(x-1)(x-2)(x-2i)(x+2i)$
44.	$x^4+x^3+x^2+11x+10$	$(x+1)(x+2)(x^2-2x+5)$ $(x+1)(x+2)(x-1-2i)(x-1+2i)$
45.	$x^4-6x^3+13x^2-14x+6$	$(x-1)(x-3)(x^2-2x+2)$ $(x-1)(x-3)(x-1-i)(x-1+i)$
46.	x^4-2x^2+1	$(x-1)^2(x+1)^2$
47.	x^4-8x^2+16	$(x-2)^2(x+2)^2$
48.	x^4-18x^2+81	$(x-3)^2(x+3)^2$

49. $x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2$ $\quad (x-1)^2(x+1)^2(x+2)$

50. $x^5-6x^4-3x^3+88x^2-204x+144$ $\quad (x-2)^2(x-3)^2(x+4)$

51. $x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4$ $\quad (x+1)^3(x-2)^2$

52. $x^5-5x^4-5x^3+45x^2-108$ $\quad (x-3)^3(x+2)^2$

53. $x^5-4x^4+6x^3-6x^2+5x-2$ $\quad (x-1)^2(x-2)(x^2+1)$
$(x-1)^2(x-2)(x-i)(x+i)$

54. $x^5+5x^4+11x^3+23x^2+28x+12$ $\quad (x+1)^2(x+3)(x^2+4)$
$(x+1)^2(x+3)(x-2i)(x+2i)$

55. $x^5-2x^4-7x^3+40x^2-92x+80$ $\quad (x-2)^2(x+4)(x^2-2x+5)$
$(x-2)^2(x+4)(x-1-2i)(x-1+2i)$

56. $x^5+6x^4+7x^3-8x^2+6x+36$ $\quad (x+3)^2(x+2)(x^2-2x+2)$
$(x+3)^2(x+2)(x-1-i)(x-1+i)$

57. $4x^5-17x^4+24x^3-13x^2+2x$ $\quad (4x-1)(x-1)^2(x-2)x$

58. $3x^5+17x^4-6x^3-96x^2+32x$ $\quad (3x-1)(x+4)^2(x-2)x$

59. $3x^5-7x^4+5x^3-x^2$ $\quad (3x-1)(x-1)^2x^2$

60. $2x^5+9x^4+6x^3-81$ $\quad (2x-3)(x+3)^2(x^2+3)$
$(2x-3)(x+3)^2(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)$

61. $5x^5+32x^4+72x^3+64x^2+16x$ $\quad (5x+2)(x+2)^3x$

62. $3x^5-5x^4+7x^2-9x+4$ $\quad (3x+4)(x-1)^2(x^2-x+1)$
$(3x+4)(x-1)^2(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

63. $2x^5+11x^4+22x^3+18x^2-8$ $\quad (2x-1)(x+2)^2(x^2+2x+2)$
$(2x-1)(x+2)^2(x+1-i)(x+1+i)$

64. $5x^5-43x^4+117x^3-81x^2-54x$ $\quad (5x+2)(x-3)^3x$

65. $5x^5-3x^4-52x^3+128x+48$ $\quad (5x+2)(x+2)^2(x-2)(x-3)$

66. $2x^5 - 7x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 9$ $\qquad (2x-3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$

67. $3x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 8$ $\qquad (3x+2)(x-1)^2(x^2+2x+4)$

$(3x+2)(x-1)^2(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

68. $2x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 20x^2$ $\qquad (2x-5)(x+2)^2x^2$

69. $3x^5 - 28x^4 + 54x^3 + 60x^2 - 25x$ $\qquad (3x-1)(x-5)^2(x+1)x$

70. $3x^5 + 20x^4 + 48x^3 + 48x^2 + 16x$ $\qquad (3x+2)(x+2)^3x$

71. $2x^5 - 9x^4 - 2x^3 + 36x^2 - 27$ $\qquad (2x+3)(x-3)^2(x-1)(x+1)$

72. $2x^5 - 3x^4 - x^3 - 19x - 15$ $\qquad (2x-5)(x+1)^2(x^2-x+3)$

$(2x-5)(x+1)^2(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i)(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i)$

1.2 Algebrické rovnice

Príklad 1 *Riešme rovnicu* $x^3 + x - 10 = 0$ *v množine* $\mathbf{R}$ *aj* $\mathbf{C}$.

Riešenie: Aj v tejto úlohe môžeme využiť Hornerovu schému. Množina potenciálnych koreňov je $\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$.

	1	**0**	**1**	**-10**
2		2	4	10
	1	2	5	**0**

Rovnicu môžeme zapísať v tvare $(x-2)(x^2+2x+5)=0$. Jediný reálny koreň je $x=2$.
V množine $\mathbf{R}$ je výsledok $K=\{2\}$.

Korene polynómu x^2+2x+5 sú komplexné, vypočítame ich pomocou kvadratickej rovnice

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm 2i$$

V množine $\mathbf{C}$ je výsledok v tvare $K = \{2, -1 \pm 2i\}$.

Príklad 2 *Riešme rovnicu* $x^4 - x^3 - 8x^2 - 4x - 48 = 0$ *v množine* **R** *aj v množine* **C**.

Riešenie: Použijeme Hornerovu schému, pričom ako korene overujeme čísla z množiny $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8 \pm 12 \pm 24 \pm 48\}$.

	1	**-1**	**-8**	**-4**	**-48**
4		4	12	16	48
	1	3	4	12	**0**
-3		-3	0	-12	
	1	0	4	**0**	

Rovnicu môžeme zapísať v tvare $(x-4)(x+3)(x^2+4) = 0$. Reálne korene sú $x_1 = 4, x_2 = -3$.
V množine **R** je výsledok v tvare $K = \{-3, 4\}$.

Polynóm $x^2 + 4$ má dva komplexne združené korene $x_{1,2} = \pm 2i$ (kap. 1.1 Príklad 5).
V množine **C** je výsledok v tvare $K = \{-3, 4, \pm 2i\}$.

V úlohách 1 – 14 riešte v **R** rovnice:

		Výsledky:
1.	$x^3 - x^2 = 0$	$x_{1,2} = 0, x_3 = 1$
2.	$x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$	$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -4$
3.	$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$	$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -3$
4.	$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$	$x_{1,2} = -2, x_3 = -1$
5.	$x^3 - 3x + 2 = 0$	$x_{1,2} = 1, x_3 = -2$
6.	$x^4 - 1 = 0$	$x_1 = 1, x_2 = -1$
7.	$x^5 - 3x^3 - 4x = 0$	$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$
8.	$x^5 + 8x^3 - 9x = 0$	$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$
9.	$x^4 - 5x^2 - 8x - 12 = 0$	$x_1 = -2, x_2 = 3$
10.	$x^4 + 2x^3 + x + 2 = 0$	$x_1 = -1, x_2 = -2$
11.	$x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 7x + 30 = 0$	$x_1 = -2, x_2 = -3$
12.	$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 8x + 8 = 0$	$x_{1,2} = -2$

13. $x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x = 0$ $\qquad x_1 = 0,\ x_2 = 1$

14. $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ $\qquad x_{1,2} = -1,\ x_3 = \frac{1}{2}$

1.3 Rozklad na elementárne (parciálne) zlomky

Každú rýdzoracionálnu funkciu vieme rozložiť na súčet elementárnych (parciálnych) zlomkov, ktoré môžu mať v množine $\mathbf{R}$ tieto tvary

$$\frac{A}{ax+b},\quad \frac{B}{(ax+b)^n},\quad \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c},\quad \frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^n},$$

kde $A, B, C, D, E, F, a, b, c$ sú reálne čísla, n je prirodzené číslo a kvadratický trojčlen ax^2+bx+c nemá reálne korene.

Príklad 3 *Rozložme na parciálne zlomky funkciu* $\frac{2x^2+3x-23}{x^3-4x^2+x+6}$ *v množine* $\mathbf{R}$.

Riešenie: Funkcia $\frac{2x^2+3x-23}{x^3-4x^2+x+6}$ je rýdzoracionálna (stupeň polynómu v čitateli je nižší ako stupeň polynómu v menovateli).
Polynóm v menovateli je potrebné rozložiť na súčin koreňových činiteľov (kanonický rozklad).
S využitím Hornerovej schémy je $x^3-4x^2+x+6 = (x+1)(x-2)(x-3)$.

Funkciu $\frac{2x^2+3x-23}{x^3-4x^2+x+6}$ môžeme prepísať a vytvoriť parciálne zlomky.

$$\frac{2x^2+3x-23}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Tri neznáme koeficienty A, B, C vypočítame dosadzovacou metódou tak, že do upravenej rovnice (po odstránení zlomkov) postupne budeme dosadzovať namiesto premennej x tri rôzne (vhodné) čísla. Využívame pritom, že hodnoty polynómov na ľavej a pravej strane rovnice sa rovnajú po dosadení ľubovoľného čísla za premennú x.

$$\frac{2x^2+3x-23}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \Big/ (x+1)(x-2)(x-3)$$

$$2x^2+3x-23 = A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2)$$

$$x=-1:\quad 2-3-23 = A(-1-2)(-1-3) + B(-1+1)(-1-3) + C(-1+1)(-1-2)$$

$$-24 = 12A$$

$$\underline{\underline{A=-2}}$$

$$x = 2: \quad 8 + 6 - 23 = A(2-2)(2-3) + B(2+1)(2-3) + C(2+1)(2-2)$$
$$-9 = -3B$$
$$\underline{\underline{B = 3}}$$

$$x = 3: \quad 18 + 9 - 23 = A(3 - 2(3-3) + B(3+1)(3-3) + C(3+1)(3-2)$$
$$4 = 4C$$
$$\underline{\underline{C = 1}}$$

Rozklad na parciálne zlomky je $\dfrac{2x^2 + 3x - 23}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{-2}{x+1} + \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$.

Príklad 4 *Rozložme na parciálne zlomky funkciu* $\dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + x}$ *v množine* $\mathbf{R}$.

Riešenie: Funkcia $\dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + x}$ nie je rýdzoracionálna (stupeň polynómu v čitateli nie je nižší ako stupeň polynómu v menovateli), takže najprv je potrebné predeliť čitateľa menovateľom.

$$(x^3 - 2x + 1) : (x^2 + x) = x - 1 + \frac{-x+1}{x^2 + x}$$

Ďalej postupujeme ako v Príklade 1, polynóm v menovateli rozložíme na súčin koreňových činiteľov (kanonický rozklad).

$$x^2 + x = x(x+1)$$

Zvyšok po delení $\dfrac{-x+1}{x^2 + x}$ je už rýdzoracionálna funkcia, ktorú môžeme prepísať a vytvoriť parciálne zlomky.

$\dfrac{-x+1}{x(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$. Koeficienty A, B vypočítame podobne ako v Príklade 1.

$$\frac{-x+1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Big/ x(x+1)$$

$$-x + 1 = A(x+1) + Bx$$

$$x = 0: \quad 0 + 1 = A(0+1) + B \cdot 0$$
$$\underline{\underline{1 = A}}$$

$x=-1$: $\quad 1+1=A(-1+1)+B(-1)$

$$2=-B$$

$$\underline{\underline{B=-2}}$$

Rozklad na parciálne zlomky je $\dfrac{x^3-2x+1}{x^2+x}=x-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+1}$.

Príklad 5 *Rozložme na parciálne zlomky funkciu* $\dfrac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}$ *v množine* $\mathbf{R}$.

Riešenie: Funkcia $\dfrac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}$ je rýdzoracionálna (stupeň polynómu v čitateli je nižší ako stupeň polynómu v menovateli).
Polynóm v menovateli je potrebné rozložiť na súčin koreňových činiteľov (kanonický rozklad).
Postupným vyberaním pred zátvorku je $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$.

Funkciu $\dfrac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}$ môžeme prepísať a vytvoriť parciálne zlomky.

$$\frac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Tri neznáme koeficienty A, B, C vypočítame dosadzovacou metódou tak, že do upravenej rovnice (po odstránení zlomkov) postupne budeme dosadzovať namiesto premennej x tri rôzne (vhodné) čísla. Využívame pritom, že hodnoty polynómov na ľavej a pravej strane rovnice sa rovnajú po dosadení ľubovoľného čísla za premennú x.

$$\frac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\Big/(x-1)^2(x+1)$$

$$-x^2+5=A(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)^2$$

$x=1$: $\quad -1+5=A(1+1)+B(1-1)(1+1)+C(1-1)^2$

$$4=2A$$

$$\underline{\underline{A=2}}$$

$x=-1$: $\quad -1+5=A(-1+1)+B(-1-1)(-1+1)+C(-1-1)^2$

$$4=4C$$

$$\underline{\underline{C=1}}$$

$x=0: \quad 0+5=A(0+1)+B(0-1)(0+1)+C(0-1)^2$

$$5=2-B+1$$

$$\underline{\underline{B=-2}}$$

Rozklad na parciálne zlomky je $\dfrac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$.

Príklad 6 *Rozložme na parciálne zlomky funkciu* $\dfrac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}$ *v množine* $\mathbf{R}$.

Riešenie: Funkcia $\dfrac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}$ je rýdzoracionálna (stupeň polynómu v čitateli je nižší ako stupeň polynómu v menovateli).
Polynóm v menovateli je potrebné rozložiť na súčin koreňových činiteľov (kanonický rozklad).
Použitím Hornerovej schémy je $x^3-3x^2+2x-6=(x-3)(x^2+2)$.

Funkciu $\dfrac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}$ môžeme prepísať a vytvoriť parciálne zlomky.

$$\frac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Tri neznáme koeficienty A, B, C vypočítame dosadzovacou metódou tak, že do upravenej rovnice (po odstránení zlomkov) postupne budeme dosadzovať namiesto premennej x tri rôzne (vhodné) čísla. Využívame pritom, že hodnoty polynómov na ľavej a pravej strane rovnice sa rovnajú po dosadení ľubovoľného čísla za premennú x.

$$\frac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+2}\Big/(x-3)(x^2+2)$$

$$5x^2-7x+9=A(x^2+2)+(Bx+C)(x-3)$$

$x=3: \quad 45-21+9=A(9+2)+(3B+C)(3-3)$

$$33=11A$$

$$\underline{\underline{A=3}}$$

$x=0: \quad 9=3(0+2)+(0\cdot B+C)(0-3)$

$$9=6-3C$$

$$\underline{\underline{C=-1}}$$

$x=1: \quad 5-7+9=3(1+2)+(B-1)(1-3)$

$$7=9-2B+2$$

$$\underline{\underline{B=2}}$$

Rozklad na parciálne zlomky je $\dfrac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}=\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{2x-1}{x^2+2}$.

V úlohách 1 – 31 rozložte v **R** na parciálne zlomky:

Výsledky:

1.	$\dfrac{2x^2+10x-18}{x^3-2x^2-5x+6}$	$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x-3}$
2.	$\dfrac{6x^2-22x+18}{x^3-6x^2+11x-6}$	$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$
3.	$\dfrac{4x^3-3x^2-18x+1}{x^4+x^3-7x^2-x+6}$	$\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x+3}$
4.	$\dfrac{x^4+4x^3+x^2+30x+14}{x^3+4x^2-x-4}$	$x-\dfrac{6}{x+4}+\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}$
5.	$\dfrac{6x^4-12x^3-11x^2+17x+4}{x^3-2x^2-x+2}$	$6x-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$
6.	$\dfrac{x^4-3x^2+17x-23}{x^3-7x+6}$	$x+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}$
7.	$\dfrac{x^4-2x^3-5x^2-7x+31}{x^3-4x^2+x+6}$	$x+2+\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}$
8.	$\dfrac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}$	$5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{x+2}$
9.	$\dfrac{2x^4-3x^3-10x^2+17x-12}{x^3-2x^2-5x+6}$	$2x+1+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x-3}$
10.	$\dfrac{x^2-2x-4}{x^3-x^2+4x-4}$	$\dfrac{2x}{x^2+4}-\dfrac{1}{x-1}$
11.	$\dfrac{4x^2+8x+16}{x^3+4x^2+9x+6}$	$\dfrac{x-2}{x^2+3x+6}+\dfrac{3}{x+1}$
12.	$\dfrac{x^2+3x+1}{x^3+5x^2+8x+4}$	$\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$
13.	$\dfrac{x^3+x^2-4x+5}{x^3-3x+2}$	$1+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+2}$
14.	$\dfrac{4x^2+3x+2}{2x^3+3x^2-1}$	$-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{2x-1}$
15.	$\dfrac{3x^3+4x^2-26x-36}{x^4+3x^3-2x^2-12x-8}$	$\dfrac{2}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}$
16.	$\dfrac{3x^5-15x^4+21x^3+4x^2-28x+12}{x^4-5x^3+8x^2-4x}$	$3x-\dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{3}{x}$

17. $\dfrac{x^5-6x^4+5x^3+26x^2-65x+30}{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}$ $\quad x-3-\dfrac{5}{(x-2)^2}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}$

18. $\dfrac{5x^5+27x^4+45x^3+11x^2-26x-12}{x^5+6x^4+13x^3+12x^2+4x}$ $\quad 5-\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{(x+2)^2}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x}$

19. $\dfrac{4x^4+4x^3-13x^2+4x-12}{x^5-3x^3-4x}$ $\quad \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{x}{x^2+1}$

20. $\dfrac{-3x^4-4x^3-23x^2-46x+36}{x^5+8x^3-9x}$ $\quad -\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{x^2+9}$

21. $\dfrac{x^3-9x+2}{x^4-x^3-x+1}$ $\quad -\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{x+4}{x^2+x+1}$

22. $\dfrac{x^3+6x^2-6x+7}{x^3-x^2+x-6}$ $\quad 1+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4x-2}{x^2+x+3}$

23. $\dfrac{x-3}{x^4-3x^3+5x^2-5x+2}$ $\quad \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{-x+1}{x^2-x+2}$

24. $\dfrac{7x^5+14x^4+41x^3+72x^2+20x-6}{x^4+2x^3+6x^2+10x+5}$ $\quad 7x-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{2x-1}{x^2+5}$

25. $\dfrac{7x^4+41x^3+90x^2+88x+26}{x^4+5x^3+11x^2+11x+4}$ $\quad 7+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{3x-2}{x^2+3x+4}$

26. $\dfrac{5x^4-7x^3+20x^2+39x+6}{2x^5+x^4+2x^3-11x^2+2x+4}$ $\quad -\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{3x-2}{x^2+2x+4}$

27. $\dfrac{6x^3-2x-16}{x^4-5x^2-8x-12}$ $\quad \dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{x+1}{x^2+x+2}$

28. $\dfrac{x^2+7x+3}{x^4+2x^3+x+2}$ $\quad \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-x+1}$

29. $\dfrac{x^4+3x^3-6x^2+17x+36}{x^4+2x^3-4x^2+7x+30}$ $\quad 1-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-3x+5}$

30. $\dfrac{x^3+5x^2+4x+2}{x^4+4x^3+6x^2+8x+8}$ $\quad \dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{x}{x^2+2}$

31. $\dfrac{x^5-x^4+3x^3-6x^2-2x-4}{x^4-x^3+2x^2-2x}$ $\quad x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2x}{x^2+2}$

2 NEURČITÝ INTEGRÁL

2.1 Základné vzorce integrovania

- $\int 1 dx = x + C$
- $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, pre $a \neq -1$, $a \in R$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$
- $\int e^x \, dx = e^x + C,$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, pre $a > 0, a \neq 1$, $a \in R$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C,$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C,$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$,
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$,
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$
- $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, pre $a \neq 0$, $a \in R$
- $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$
- $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, pre $a \neq 0$, $a \in R$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$, pre $a \neq 0$, $a \in R$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$,
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$.

2.2 Integrovanie rozkladom a úpravou

Integrovanú funkciu sa snažíme rozložiť na súčet, resp. rozdiel jednoduchších funkcií, pričom využívame známe algebrické alebo goniometrické vzťahy. Pri integrovaní využívame základné vzorce integrovania.

Platí veta o lineárnosti:

$$\int [a \cdot f(x) + b \cdot g(x)]\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx.$$

Príklad 1 *Vypočítajme* $\int (8x^3 + 2e^x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^4})\, dx.$

Riešenie: $\int (8x^3 + 2e^x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^4})\, dx = 8\int x^3 dx + 2\int e^x dx - 3\int \frac{1}{x} dx + 2\int x^{-4} dx =$

$$= 8\frac{x^4}{4} + 2e^x - 3\ln|x| + 2\frac{x^{-3}}{-3} + C = 2x^4 + 2e^x - 3\ln|x| - \frac{2}{3x^3} + C\,.$$

Príklad 2 *Vypočítajme* $\int \sqrt{x}(x + \sqrt{x})\, dx$

Riešenie: Integračnú funkciu roznásobíme a upravíme

$$\int \sqrt{x}(x + \sqrt{x^3})\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x + x^{\frac{3}{2}})\, dx = \int (x^{\frac{1}{2}}x^1 + x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}})\, dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^2)\, dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{x^3}{3} + C\,.$$

Príklad 3 *Vypočítajme* $\int \frac{x^2 + x + 5}{x}\, dx\,.$

Riešenie: Integračnú funkciu rozdelíme na jednoduchšie zlomky a upravíme

$$\int \frac{x^2 + x + 5}{x}\, dx = \int (\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{5}{x})\, dx = \int (x + 1 + 5\frac{1}{x})\, dx = \frac{x^2}{2} + x + 5\ln|x| + C\,.$$

Príklad 4 *Vypočítajme* $\int (3x - 2)^2\, dx.$

Riešenie: Integračnú funkciu umocníme a upravíme

$$\int (3x - 2)^2\, dx = \int (9x^2 - 12x + 4)\, dx = 9\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^2}{2} + 4x + C = 3x^3 - 6x^2 + 4x + C\,.$$

Príklad 5 *Vypočítajme* $\int \frac{3x^2}{x^3 + 7}\, dx.$

Riešenie: Všimnime si, že integračná funkcia má v čitateli výraz, korý je deriváciou funkcie z menovateľa. Preto s využitím vzorca $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ je

$\int \frac{3x^2}{x^3+7} dx = \ln|x^3+7| + C$.

Príklad 6 *Vypočítajme* $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3} dx.$

Riešenie: $$\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x^8+2x^4+1}{x^4}}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{(x^4+1)^2}}{x^5} dx =$$

$$= \int \frac{x^4+1}{x^5} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$$

Príklad 7 *Vypočítajme* $\int \frac{(2^x+3^x)^2}{6^x} dx.$

Riešenie: $$\int \frac{(2^x+3^x)^2}{6^x} dx = \int \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^x\right] dx = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}} + 2x + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln 2 - \ln 3} + 2x + C$$

Príklad 8 *Vypočítajme* $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$

Riešenie: $$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{tg}x + x) + C .$$

V úlohách 1 – 51 vypočítajte neurčité integrály:

		Výsledky:
1.	$\int (5x^5 + 6x^2 - 8x + 12)\, dx$	$\frac{5}{6}x^6 + 2x^3 - 4x^2 + 12x + C$
2.	$\int (x^2 - 8x + 2)\, dx$	$\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 2x + C$

3.	$\int (16x^3+9x^2-4x-1)\,dx$	$4x^4+3x^3-2x^2-x+C$
4.	$\int (\frac{1}{3}x^4+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{5})\,dx$	$\frac{1}{15}x^5+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{5}x+C$
5.	$\int (\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{5x})\,dx$	$-\frac{1}{3x}-\frac{1}{5}\ln\lvert x\rvert+C$
6.	$\int (\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{3x^3})\,dx$	$2\ln\lvert x\rvert+\frac{3}{x}-\frac{1}{3x^2}+C$
7.	$\int (\frac{5}{x^6}-\frac{7}{8x^8})\,dx$	$-\frac{1}{x^5}+\frac{1}{8x^7}+C$
8.	$\int (\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x^5})\,dx$	$\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^9}+C$
9.	$\int (\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2\sqrt{x}+C$
10.	$\int (\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}+3x^2\cdot\sqrt{x})\,dx$	$\frac{1}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{7}\sqrt{x^7}+C$
11.	$\int (\frac{x^2}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}})dx$	$\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+C$
12.	$\int (5e^x-\sqrt{3}\cdot x^5+\frac{3}{1-x^2})\,dx$	$5e^x-\frac{\sqrt{3}}{6}x^6+\frac{3}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert+C$
13.	$\int (\sqrt[3]{x}+3^x-2x^3)\,dx$	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{2}x^4+C$
14.	$\int x^2(2x-3)\,dx$	$\frac{1}{2}x^4-x^3+C$
15.	$\int x(x+1)(x-2)\,dx$	$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+C$
16.	$\int (x+3)^2\,dx$	$\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+C$
17.	$\int (x-\frac{1}{x})^2\,dx$	$\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{x}+C$
18.	$\int (3\sqrt{x}-2x)^2\,dx$	$\frac{9}{2}x^2-\frac{24}{5}\sqrt{x^5}+\frac{4}{3}x^3+C$

19.	$\int\left[(x^2+2x+1)^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right]dx$	$\frac{(x+1)^7}{7}+\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{2x^2}+c$
20.	$\int\frac{6-x}{x^2}\,dx$	$-\frac{6}{x}-\ln\lvert x\rvert+C$
21.	$\int\frac{x^5-7x^3+5}{x^3}\,dx$	$\frac{1}{3}x^3-7x-\frac{5}{2x^2}+C$
22.	$\int\frac{(x+1)^2}{x^3}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$
23.	$\int\frac{x^2-2x+6}{\sqrt{x}}\,dx$	$\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+12\sqrt{x}+C$
24.	$\int\frac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}+x^2-2}{x^2}\,dx$	$-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4}{\sqrt{x}}+x+\frac{2}{x}+C$
25.	$\int\frac{x(\sqrt[3]{x}-x^3\cdot\sqrt{x})}{\sqrt[4]{x}}\,dx$	$\frac{12}{25}\sqrt[12]{x^{25}}-\frac{4}{21}\sqrt[4]{x^{21}}+C$
26.	$\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$	$\arcsin x+\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+1}\right\rvert+C$
27.	$\int\frac{x^2-1}{x+1}\,dx$	$\frac{1}{2}x^2-x+C$
28.	$\int\frac{x^2-5x+6}{x-2}\,dx$	$\frac{1}{2}x^2-3x+C$
29.	$\int\frac{x^2+2x+1}{x+1}\,dx$	$\frac{1}{2}x^2+x+C$
30.	$\int\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x}\,dx$	$\frac{1}{2}x^2-3x+C$
31.	$\int\frac{x^3-1}{x-1}\,dx$	$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$
32.	$\int\frac{x^4-4}{x^2-2}\,dx$	$\frac{1}{3}x^3+2x+C$
33.	$\int e^x\cdot 2^x\,dx$	$\frac{e^x\cdot 2^x}{1+\ln 2}+C$

34.	$\int e^x \cdot a^x \, dx$	$\dfrac{e^x a^x}{1+\ln a} + c$
35.	$\int e^x (2 - \dfrac{e^{-x}}{x}) \, dx$	$2e^x - \ln\lvert x\rvert + C$
36.	$\int (10^{-x} + \dfrac{x^2+2}{1+x^2}) \, dx$	$-\dfrac{10^{-x}}{\ln 10} + x + \operatorname{arctg} x + C$
37.	$\int \dfrac{dx}{4-2x^2}$	$\dfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left\lvert \dfrac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x} \right\rvert + C$
38.	$\int \dfrac{5}{8x^2-32} \, dx$	$\dfrac{5}{32} \ln\left\lvert \dfrac{2-x}{2+x} \right\rvert + C$
39.	$\int \dfrac{3}{9-3x^2} \, dx$	$\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left\lvert \dfrac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x} \right\rvert + C$
40.	$\int \dfrac{2x}{x^2-3} \, dx$	$\ln\lvert x^2-3\rvert + C$
41.	$\int \dfrac{x}{x^2-3} \, dx$	$\dfrac{1}{2} \ln\lvert x^2-3\rvert + C$
42.	$\int \dfrac{x^2}{x^3+1} \, dx$	$\dfrac{1}{3} \ln\lvert x^3+1\rvert + C$
43.	$\int \dfrac{3x^3}{2-x^4} \, dx$	$-\dfrac{3}{4} \ln\lvert 2-x^4\rvert + C$
44.	$\int \dfrac{e^x}{3+e^x} \, dx$	$\ln\lvert 3+e^x\rvert + C$
45.	$\int \dfrac{1}{x \ln x} \, dx$	$\ln\lvert \ln x\rvert + C$
46.	$\int \dfrac{1}{x(4+\ln x)} \, dx$	$\ln\lvert 4+\ln x\rvert + C$
47.	$\int (5\cos x - \sqrt{3}x^5 + \dfrac{3}{1+x^2}) \, dx$	$5\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{6} x^6 + 3\operatorname{arctg} x + C$
48.	$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$	$\operatorname{tg} x - x + C$
49.	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} \, dx$	$-\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x + C$

50. $\int (\text{tg } x + \text{cotg } x)\, dx$ $\qquad \ln|\text{tg } x| + C$

51. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}\, dx$ $\qquad \ln|\arcsin x| + C$

2.3 Integrovanie substitučnou metódou

Integrál z funkcie $f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ môžeme zjednodušiť zavedením novej premennej t pomocou vhodnej substitúcie $\varphi(x)=t$. Dostávame:

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \left|\begin{array}{c}\varphi(x)=t\\ \varphi'(x)dx=dt\end{array}\right| = \int f(t)dt\,.$$

Príklad 1 *Vypočítajme integrál* $\int 2x(x^2+17)^5\, dx$.

Riešenie: V danom príklade je funkcia $\varphi(x)=x^2+17$ a $\varphi'(x)=2x$. Zavedením substitúcie dostávame integrál z jednoduchšej funkcie. Píšeme:

$$\int 2x(x^2+17)^5 dx = \left|\begin{array}{c}x^2+17=t\\ 2x\,dx=dt\end{array}\right| = \int t^5\, dt = \frac{t^6}{6}+C = \frac{(x^2+17)^6}{6}+C\,.$$

Príklad 2 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x^3+5}}\, dx$.

Riešenie: V danom príklade je funkcia $\varphi(x)=2x^3+5$ a $\varphi'(x)=6x^2$. Zavedením substitúcie dostávame integrál z jednoduchšej funkcie. Píšeme:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x^3+5}}\, dx = \left|\begin{array}{c}2x^3+5=t\\ 6x^2dx=dt\\ x^2dx=\dfrac{dt}{6}\end{array}\right| = \frac{1}{6}\int\frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{3}\sqrt{t}+C = \frac{1}{3}\sqrt{2x^3+5}+C\,.$$

Príklad 3 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{\ln(\text{arctg } x)}{(1+x^2)\,\text{arctg } x}\, dx$.

Riešenie: V danom príklade je funkcia $\varphi(x)=\ln(\text{arctg } x)$ a $\varphi'(x)=\frac{1}{\text{arctg } x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

Zavedením substitúcie dostávame integrál z jednoduchšej funkcie. Píšeme:

$$\int \frac{\ln(\text{arctg } x)}{(1+x^2)\,\text{arctg } x}\, dx = \left|\begin{array}{c}\ln(\text{arctg } x)=t\\ \dfrac{1}{\text{arctg } x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}dx=dt\end{array}\right| = \int t\, dt = \frac{t^2}{2}+C = \frac{\ln^2(\text{arctg } x)}{2}+C.$$

Príklad 4 *Vypočítajme integrál* $\int x \operatorname{tg}(1-x^2)\, dx$.

Riešenie: V danom príklade je funkcia $\varphi(x)=1-x^2$ a $\varphi'(x)=-2x$. Zavedením substitúcie dostávame integrál z funkcie $\operatorname{tg} t$, ktorý rozpíšeme na podiel $\frac{\sin t}{\cos t}$. Píšeme:

$$\int x \operatorname{tg}(1-x^2)\, dx = \left| \begin{array}{c} 1-x^2=t \\ -2xdx=dt \\ xdx=-\frac{dt}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \operatorname{tg} t\, dt = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin t}{\cos t} dt = \frac{1}{2}\ln\left|\cos t\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\cos(1-x^2)\right| + C.$$

Príklad 5 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+20}}\, dx$.

Riešenie: Ak polynóm v menovateli upravíme na štvorec a zavedieme vhodnú substitúciu, môžeme použiť vzorec $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$. Píšeme:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+20}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+11}}\, dx = \left| \begin{array}{l} x-3=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+11}}\, dt = \ln\left|t+\sqrt{t^2+11}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2+11}\right| + C = \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+20}\right| + C.$$

V úlohách 1 – 62 vypočítajte neurčité integrály:

		Výsledky:
1.	$\int (x+3)^{20} dx$	$\frac{1}{21}(x+3)^{21}+C$
2.	$\int (4x-2)^{13} dx$	$\frac{1}{56}(4x-2)^{14}+C$
3.	$\int (1-x)^{-3} dx$	$\frac{1}{2(1-x)^2}+C$
4.	$\int \frac{2}{(x+17)^5} dx$	$-\frac{1}{2(x+17)^4}+C$
5.	$\int \sqrt{x+7}\, dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{(x+7)^3}$ +C
6.	$\int \sqrt{3x-2}\, dx$	$\frac{2}{9}\sqrt{(3x-2)^3}+C$

7.	$\int \sqrt[3]{(2x+1)^4}\, dx$	$\frac{3}{14}\sqrt[3]{(2x+1)^7}+C$
8.	$\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}}\, dx$	$-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C$
9.	$\int 2x(x^2+2)^3\, dx$	$\frac{(x^2+2)^4}{4}+C$
10.	$\int x^2\cdot(x^3+4)^6\, dx$	$\frac{1}{21}(x^3+4)^7+C$
11.	$\int x\cdot\sqrt{x^2+5}\, dx$	$\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}+C$
12.	$\int x\cdot\sqrt[3]{x^2+2}\, dx$	$\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2)^4}+C$
13.	$\int x^2\cdot\sqrt[6]{x^3+2}\, dx$	$\frac{2}{7}\sqrt[6]{(x^3+2)^7}+C$
14.	$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$	$\sqrt{1+x^2}+C$
15.	$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-2}}\, dx$	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-2)^2}+C$
16.	$\int \frac{x}{\sqrt{4-5x^2}}\, dx$	$-\frac{1}{5}\sqrt{4-5x^2}+C$
17.	$\int \frac{4}{8-3x}\, dx$	$-\frac{4}{3}\ln\lvert 8-3x\rvert+C$
18.	$\int \frac{x^3}{(1-x)^{25}}\, dx$	$\frac{1}{24(1-x)^{24}}-\frac{3}{23(1-x)^{23}}+$ $+\frac{3}{22(1-x)^{22}}-\frac{1}{21(1-x)^{21}}+C$
19.	$\int \frac{x^2}{1+x^6}\, dx$	$\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3+C$
20.	$\int x\cdot\sqrt[3]{x+2}\, dx$	$\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+2)^7}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^4}+C$
21.	$\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx$	$\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5}-3\sqrt[3]{(x+1)^2}+C$
22.	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-4}}\, dx$	$\frac{1}{3}\ln\left\lvert x^3+\sqrt{x^6-4}\right\rvert+C$

23.	$\int \frac{1}{9x^2+4}dx$	$\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{2}\right)+C$
24.	$\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx$	$\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x}{3}\right)+C$
25.	$\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}dx$	$\frac{1}{3}\arcsin\left(x+\frac{1}{3}\right)+C$
26.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$	$\ln\left\|x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}\right\|+C$
27.	$\int e^{4x}\,dx$	$\frac{1}{4}e^{4x}+C$
28.	$\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$	$3e^{\frac{x}{3}}+C$
29.	$\int x e^{1+x^2}dx$	$\frac{1}{2}e^{1+x^2}+C$
30.	$\int 5x^2\,e^{x^3-2}dx$	$\frac{5}{3}e^{x^3-2}+C$
31.	$\int (x+2)e^{x^2+4x+5}dx$	$\frac{1}{2}e^{x^2+4x+5}+C$
32.	$\int \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$	$2e^{1+\sqrt{x}}+C$
33.	$\int \frac{e^x}{4+e^x}dx$	$\ln(4+e^x)+C$
34.	$\int \frac{1}{3^x+1}dx$	$x-\frac{1}{\ln 3}\ln(3^x+1)+C$
35.	$\int \frac{4^x}{1+4^{2x}}dx$	$\frac{1}{\ln 4}\operatorname{arctg}4^x+C$
36.	$\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx$	$\frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x+C$
37.	$\int \frac{\ln x}{x}dx$	$\frac{1}{2}\ln^2 x+C$
38.	$\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$	$\frac{1}{5}\ln^5 x+C$
39.	$\int \frac{dx}{x(3+\ln x)^2}$	$-\frac{1}{3+\ln x}+C$
40.	$\int \frac{\sqrt{2+\ln\|x\|}}{x}dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{(2+\ln\|x\|)^3}+C$

41.	$\int \frac{\ln x - 2}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} - 4\sqrt{\ln x} + C$
42.	$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln x}}\,dx$	$-2\sqrt{1-\ln x} + \frac{2}{3}\sqrt{(1-\ln x)^3} + C$
43.	$\int \frac{1}{x} e^{3+\ln x}\,dx$	$e^{3+\ln x} + C$
44.	$\int \frac{\ln x}{x} e^{\ln^2 x - 1}\,dx$	$\frac{1}{2} e^{\ln^2 x - 1} + C$
45.	$\int \operatorname{cotg}(2x+1)dx$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\sin(2x+1)\right\rvert + C$
46.	$\int \sin^3 x \cos x\,dx$	$\frac{1}{4}\sin^4 x + C$
47.	$\int \cos^2 x \sin x\,dx$	$-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$
48.	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}}\,dx$	$\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{\cos^3 x}} + C$
49.	$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$	$3\sqrt[3]{\sin x} + C$
50.	$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$	$\sin x - \operatorname{arctg} \sin x + C$
51.	$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x\,dx$	$-e^{\cos^2 x} + C$
52.	$\int \frac{6x^2}{\cos^2(x^3+1)}\,dx$	$2\operatorname{tg}(x^3+1) + C$
53.	$\int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x}\,dx$	$\ln\left\lvert 3+\sin^2 x\right\rvert + C$
54.	$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[4]{\cos x + \sin x}}\,dx$	$-\frac{4}{3}(\cos x + \sin x)^{\frac{3}{4}} + C$
55.	$\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \ln^2 \sin x}\,dx$	$-\frac{1}{\ln \sin x} + C$
56.	$\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C$
57.	$\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\,dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3} + C$
58.	$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(x^2+1) + 1}{1+x^2}\,dx$	$e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{1}{4}\ln^2(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$
59.	$\int e^x \operatorname{cotg} e^x\,dx$	$\ln\left\lvert \sin e^x\right\rvert + C$

60. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$ $\qquad$ $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x}+C$

61. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad$ $\frac{\arcsin^3 x}{3}+C$

62. $\int \frac{\cos \ln x}{x}dx$ $\qquad$ $\sin \ln x + C$

2.4 Integrovanie metódou per partes

Nech funkcie *u, v* majú spojité derivácie na intervale *J*. Potom

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx$$

Pri nasledujúcich typoch integrálov používame metódu per partes s nižšie uvedenou voľbou funkcií $u(x)$ a $v(x)$:

A $\int u(x)\cdot v'(x)dx$

$\int P_n(x)\cdot e^{kx}\, dx$

$\int P_n(x)\cdot \cos kx\, dx$

$\int P_n(x)\cdot \sin kx\, dx,\ k\in Z$

B $\int v'(x)\cdot u(x)dx$

$\int P_n(x)\cdot \ln x\, dx$

$\int P_n(x)\cdot \arcsin x$ (*resp.* $\arccos x$) dx

$\int P_n(x)\cdot \operatorname{arctg} x$ (*resp.* $\operatorname{arccotg} x$) dx

V prípade **A** polynóm $P_n(x)$derivujeme, čím sa znižuje jeho stupeň a integrovaná funkcia sa zjednodušuje.
V prípade **B** polynóm $P_n(x)$ integrujeme.

Príklad 1 *Vypočítajme integrál* $\int x\cos x\, dx$.

Riešenie: $\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u=x & v'=\cos x \\ u'=1 & v=\sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C$.

Príklad 2 *Vypočítajme integrál* $\int (x^2+2x+17)\, e^x dx$.

Riešenie: V príklade použijeme metódu per partes dvakrát.

$$\int (x^2+2x+17)\, e^x dx = \begin{vmatrix} u=x^2+2x+17 & v'=e^x \\ u'=2x+2 & v=e^x \end{vmatrix} = (x^2+2x+17)\, e^x - \int (2x+2)\, e^x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u=2x+2 & v'=e^x \\ u'=2 & v=e^x \end{vmatrix} = (x^2+2x+17)\, e^x - (2x+2)e^x + 2e^x + c = (x^2+17)\, e^x + C.$$

Príklad 3 *Vypočítajme integrál* $\int x^5 \ln x\, dx$ *na intervale* $(0,\infty)$.

Riešenie: $$\int x^5 \ln x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = x^5 \\ u' = \dfrac{1}{x} & v = \dfrac{x^6}{6} \end{array} \right| = \frac{x^6}{6}\ln x - \int \frac{x^5}{6}dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{x^6}{36} + C.$$

Príklad 4 *Vypočítajme integrál* $\int \arcsin x dx$.

Riešenie: V príklade použijeme najskôr metódu per partes a potom substitučnú metódu.

$$\int \arcsin x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & v' = 1 \\ u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right| = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ x dx = -\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| =$$

$$x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin x + \sqrt{t} + c = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Príklad 5 *Vypočítajme integrál* $\int e^x \cos x\, dx$.

Riešenie: V príklade použijeme dvakrát metódu per partes a potom hľadaný integrál vyjadríme zo získanej rovnice.

$$\int e^x \cos x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & v' = \cos x \\ u' = e^x & v = \sin x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & v' = \sin x \\ u' = e^x & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

Ak označíme $\int e^x \cos x\, dx = I$, dostávame rovnicu:

$$I = e^x(\sin x + \cos x) - I$$

Teda

$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x),$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

V úlohách 1 – 48 vypočítajte neurčité integrály:

		Výsledky:
1.	$\int x e^x\, dx$	$xe^x - e^x + C$
2.	$\int (x-2)e^x\, dx$	$(x-2)e^x - e^x + C$
3.	$\int (3x-1)e^x\, dx$	$(3x-1)e^x - 3e^x + C$
4.	$\int (2-5x)e^x\, dx$	$(2-5x)e^x + 5e^x + C$

5.	$\int x e^{2x} dx$	$\frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$
6.	$\int (3x+1) e^{3x} \, dx$	$\frac{1}{3}(3x+1)e^{3x} - \frac{1}{3} e^{3x} + C$
7.	$\int (1-x) e^{-x} \, dx$	$(x-1)e^{-x} + e^{-x} + C$
8.	$\int (2x+3) e^{\frac{x}{4}} \, dx$	$(8x+12)e^{\frac{x}{4}} - 32e^{\frac{x}{4}} + C$
9.	$\int (x^2+2) \, e^x \, dx$	$(x^2+2) \, e^x - 2xe^x + 2e^x + C$
10.	$\int (x^2-4x) \, e^x \, dx$	$(x^2-6x+6) \, e^x + C$
11.	$\int x^2 \, e^{2x} dx$	$\frac{1}{2} e^{2x} (x^2 - x + \frac{1}{2}) + C$
12.	$\int x^2 e^{-x} dx$	$-e^{-x}(x^2+2x+2) + C$
13.	$\int x \sin x \, dx$	$-x \cos x + \sin x + C$
14.	$\int (3x-4) \sin x \, dx$	$(4-3x)\cos x + 3\sin x + C$
15.	$\int (5x+2) \cos x \, dx$	$(5x+2)\sin x + 5\cos x + C$
16.	$\int (x+5) \sin 2x \, dx$	$-\frac{1}{2}(x+5)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
17.	$\int (4x-8) \sin 2x \, dx$	$(4-2x)\cos 2x + \sin 2x + C$
18.	$\int (4x-3) \cos 4x \, dx$	$\frac{1}{4}(4x-3)\sin 4x + \frac{1}{4}\cos 4x + C$
19.	$\int (2x+3) \cos 3x \, dx$	$\frac{1}{3}(2x+3)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C$
20.	$\int (3-x) \sin \frac{x}{2} \, dx$	$(2x-6)\cos \frac{x}{2} - 4\sin \frac{x}{2} + C$
21.	$\int (2-2x) \cos \frac{x}{4} \, dx$	$(8-8x)\sin \frac{x}{4} - 32\cos \frac{x}{4} + C$
22.	$\int (x^2+1) \sin x \, dx$	$-(x^2+1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

23.	$\int (x^2+2x)\cos x\,dx$	$(x^2+2x)\sin x+(2x+2)\cos x-2\sin x+C$
24.	$\int x^2\sin 2x\,dx$	$(-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4})\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C$
25.	$\int (x^2+6x+3)\cos 2x\,dx$	$\frac{1}{2}(x^2+6x+3)\sin 2x+$ $+\frac{1}{2}(x+3)\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$
26.	$\int \ln x\,dx$	$x\ln x-x+C$
27.	$\int x\ln x\,dx$	$\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$
28.	$\int (x-1)\ln x\,dx$	$(\frac{x^2}{2}-x)\ln x-\frac{x^2}{4}+x+C$
29.	$\int (x^2+2x+1)\ln x\,dx$	$\frac{1}{3}(x+1)^3\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{2}-x-\frac{\ln\|x\|}{3}+C$
30.	$\int x^2\ln x\,dx$	$\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$
31.	$\int x\ln^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}x^2\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$
32.	$\int x\ln(x^2+3)\,dx$	$\frac{1}{2}(x^2+3)[\ln(x^2+3)-1]+C$
33.	$\int (x^2+x)\ln(x+1)\,dx$	$\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\right)\ln(x+1)-\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{12}+\frac{x}{6}+C$
34.	$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$	$x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{x^2+1}+C$
35.	$\int \frac{\ln x}{x^2}dx$	$-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$
36.	$\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$	$-\frac{1}{x}\ln^2 x-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}+C$
37.	$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$	$2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$
38.	$\int \left(x^2+\frac{2}{3}x\right)\ln(x+1)\,dx$	$\frac{1}{3}(x^3+x^2)\ln(x+1)-\frac{1}{9}x^3+C$
39.	$\int xa^x dx,\ a\neq 1$	$\frac{a^x}{\ln^2 a}(x\ln a-1)+C$
40.	$\int \operatorname{arctg} x\,dx$	$x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$
41.	$\int x\operatorname{arctg} x\,dx$	$\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+C$
42.	$\int (2x+1)\operatorname{arctg} x\,dx$	$(x^2+x)\operatorname{arctg} x-x-\frac{\ln(x^2+1)}{2}+\operatorname{arctg}x+C$

43.	$\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx$	$\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$
44.	$\int (4x^3 + 2x)\operatorname{arctg} x\, dx$	$(x^4 + x^2)\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{3} + C$
45.	$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$	$x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$
46.	$\int \operatorname{arccotg} x\, dx$	$x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
47.	$\int \left(x^2 + \frac{2}{3}x\right)\operatorname{arccotg} x\, dx$	$\frac{1}{3}\left(x^3 + x^2 + 1\right)\operatorname{arccotg} x + \frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} - \frac{\ln(x^2+1)}{6} + C$
48.	$\int \arcsin x\, dx$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
49.	$\int x\arcsin x\, dx$	$(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4})\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$
50.	$\int 3x^2 \arcsin x\, dx$	$x^3 \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + C$
51.	$\int \arccos x\, dx$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
52.	$\int (1-3x^2)\arccos x\, dx$	$(x - x^3)\arccos x - \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + C$
53.	$\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx$	$x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$
54.	$\int e^{\sqrt{x}}\, dx$	$2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$
55.	$\int \frac{\ln\ln x}{x}\, dx$	$\ln x(\ln\lvert\ln x\rvert - 1) + C$
56.	$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\, dx$	$-\operatorname{cotg} x(1 + \ln(\sin x)) - x + C$
57.	$\int \cos\ln x\, dx$	$\frac{1}{2}x(\sin\ln x + \cos\ln x) + C$
58.	$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx$	$e^x(\frac{1}{1+x}) + C$
59.	$\int e^{\arcsin x}\, dx$	$\frac{e^{\arcsin x}}{2}(x + \sqrt{1-x^2}) + C$

2.5 Integrovanie racionálnych funkcií

Funkciu $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nazývame racionálnou funkciou.

Ak $n \geq m$, hovoríme, že funkcia $f(x)$ je nerýdzoracionálna funkcia.

Ak $n < m$, hovoríme, že funkcia $f(x)$ je rýdzoracionálna funkcia.

Každú rýdzo racionálnu funkciu možno rozložiť na súčet elementárnych zlomkov. Neurčitý integrál z takejto funkcie počítame tak, že ju rozložíme na súčet elementárnych zlomkov a tie potom integrujeme.

Každú nerýdzoracionálnu funkciu môžeme vyjadriť ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie. Teda neurčitý integrál z takejto funkcie počítame tak, že funkciu najprv predelíme (kap. 1.1) a potom počítame integrál z polynómu a elementárnych zlomkov.

Integrovanie niektorých elementárnych zlomkov:

- $\displaystyle\int\frac{1}{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}\int\frac{a}{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$

Príklad 1 *Vypočítajme integrál* $\displaystyle\int\frac{5}{3x-2}\,dx$.

Riešenie: $\displaystyle\int\frac{5}{3x-2}\,dx=\frac{5}{3}\int\frac{3}{3x-2}\,dx=\frac{5}{3}\ln|3x-2|+C$.

- $\displaystyle\int\frac{1}{(ax+b)^n}\,dx=\left|\begin{matrix}ax+b=t\\ a\,dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{a}\int\frac{1}{t^n}\,dt=\frac{1}{a(1-n)\,t^{1-n}}+C=\frac{1}{a(1-n)(ax+b)^{1-n}}+C$ pre $k\neq 1,\ x\neq\alpha$.

Príklad 2 *Vypočítajme integrál* $\displaystyle\int\frac{1}{(2x+7)^3}\,dx.$

Riešenie: $\displaystyle\int\frac{1}{(2x+7)^3}\,dx=\left|\begin{matrix}2x+7=t\\ 2dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^3}\,dt=\frac{t^{-2}}{-4}+c=-\frac{1}{-4(2x+7)^2}+C$.

- $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}$ pre $p^2-4q<0$ použijeme substitúciu $x+\dfrac{p}{2}=t$

  a integračný vzorec $\displaystyle\int\frac{1}{a^2+t^2}\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$, kde $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$.

  Dostávame $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{a}}+C.$

Príklad 3 *Vypočítajme integrál* $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$

Riešenie: Najprv výraz v menovateli upravíme na štvorec.

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$$

Ďalej použijeme substitúciu $x+\frac{1}{2}=t$ a integračný vzorec $\int \frac{1}{a^2+t^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$, kde $a^2=\frac{3}{4}$.

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}+C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

- $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$ pre $p^2-4q<0$.

Príklad 4 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{2x}{x^2+x+2}dx$.

Riešenie: $\int \frac{2x}{x^2+x+2}dx = \int \frac{2x+1-1}{x^2+x+2}dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx - \int \frac{1}{x^2+x+2}dx$

Použitím vzorca $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right|+C$ dostávame:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx = \ln\left|x^2+x+2\right|+C.$$

Pri výpočte druhého integrálu použijeme úpravu na štvorec a substitučnú metódu.

$$\int \frac{1}{x^2+x+2}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2+\frac{7}{4}}dt = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{2})+C$$

Teda

$$\int \frac{2x}{x^2+x+2}dx = \ln\left|x^2+x+2\right| - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{2})+C.$$

Príklad 5 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{2x^3+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx$.

Riešenie: Pomocou rozkladu danej racionálnej funkcie na elementárne zlomky dostávame

$$\int \frac{2x^3+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx = \int \frac{2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx =$$

$$= \int \frac{2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx.$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2}dt = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{t} + C = \frac{-1}{x-1} + C\,.$$

Použitím vzorca $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$ dostávame

$$\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1|.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C\,.$$

Teda

$$\int \frac{2x^3+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx = -\frac{2}{x-1} + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C\,.$$

Príklad 6 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{x^4+2x^3+x+3}{x^3+1}dx$

Riešenie: Funkcia je nerýdzoracionálna, preto najprv predelíme čitateľa menovateľom.

$$\int \frac{x^4+2x^3+x+3}{x^3+1}dx = \int \left(x+2+\frac{1}{x^3+1} \right) dx$$

Rýdzoracionálnu funkciu rozložíme na parciálne zlomky.

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx$$

$$\int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$$

$$\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Teda

$$\int \frac{x^4+2x^3+x+3}{x^3+1}dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C\,.$$

V úlohách 1 – 39 vypočítajte neurčité integrály:

		Výsledky:
1.	$\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\,dx$	$\ln \frac{\sqrt{\lvert x^2+2x\rvert}}{\lvert x+1\rvert}+C$
2.	$\int \frac{5-x}{x^2-1}\,dx$	$\ln \frac{(x-1)^2}{\lvert x+1\rvert^3}+C$
3.	$\int \frac{4x+2}{x^2-2x-8}\,dx$	$\ln\lvert(x+2)(x-4)^3\rvert+C$
4.	$\int \frac{7x+7}{x^2+x-12}\,dx$	$\ln\lvert(x-3)^4(x+4)^3\rvert+C$
5.	$\int \frac{-x-1}{x^2-7x+10}\,dx$	$\ln \frac{\lvert x-2\rvert}{(x-5)^2}+C$
6.	$\int \frac{2x+13}{x^2+9x+20}\,dx$	$\ln\left\lvert\frac{(x+4)^5}{(x+5)^3}\right\rvert+C$
7.	$\int \frac{4x^2+8x-8}{x^3-4x}\,dx$	$\ln\left\lvert\frac{x^2(x-2)^3}{x+2}\right\rvert+C$
8.	$\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$	$2\ln\left\lvert\frac{x+2}{x+1}\right\rvert-\frac{3}{x+2}+C$
9.	$\int \frac{6x^2-22x+18}{(x-1)(x^2-5x+6)}\,dx$	$\ln\lvert(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\rvert+C$
10.	$\int \frac{2x^2+3x+3}{(x+2)(x^2-9)}\,dx$	$\ln\left\lvert\frac{(x-3)(x+3)^2}{x+2}\right\rvert+C$
11.	$\int \frac{-2x+12}{(x-2)(x^2-4)}\,dx$	$\ln\left\lvert\frac{x+2}{x-2}\right\rvert-\frac{2}{x-2}+C$
12.	$\int \frac{-2x^2+3x-9}{x^3-3x^2}\,dx$	$-\frac{3}{x}-2\ln\lvert x-3\rvert+C$
13.	$\int \frac{x^2+4x-2}{x^3-x^2}\,dx$	$\ln\left\lvert\frac{(x-1)^3}{x^2}\right\rvert-\frac{2}{x}+C$
14.	$\int \frac{4x^2+6x+4}{x^3+2x^2+x}\,dx$	$4\ln\lvert x\rvert+\frac{2}{x+1}+C$

15.	$\int \frac{x^2-1}{x^3+x}\,dx$	$\ln\left|\frac{x^2+1}{x}\right|+C$
16.	$\int \frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)}\,dx$	$\ln\left|(x-1)(x^2+2)^2\right|+C$
17.	$\int \frac{3x^2+6}{x^3+3x}\,dx$	$\ln\left|x^2\sqrt{x^2+3}\right|+C$
18.	$\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\,dx$	$\frac{x^2}{2}+4x-\ln\lvert x\rvert+8\ln\lvert x-1\rvert+C$
19.	$\int \frac{2x^3-x^2-3x+6}{x^2-1}\,dx$	$x^2-x+\ln\left|\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}\right|+C$
20.	$\int \frac{x^3+3x^2-3x-17}{x^2+x-12}\,dx$	$\frac{x^2}{2}+2x+\ln\left|(x-3)^4(x+4)^3\right|+C$
21.	$\int \frac{x^2+11x+33}{x^2+9x+20}\,dx$	$x+\ln\left|\frac{(x+4)^5}{(x+5)^3}\right|+C$
22.	$\int \frac{x^4+8x-8}{x^3-4x}\,dx$	$\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^3}{(x+2)}\right|+C$
23.	$\int \frac{-x^3+12x+21}{(x+2)(x^2-9)}\,dx$	$-x+\ln\left|\frac{(x-3)(x+3)^2}{x+2}\right|+C$
24.	$\int \frac{x^4-5x^3+4x^2+3x-9}{x^3-3x^2}\,dx$	$\frac{x^2}{2}-2x-\frac{3}{x}-2\ln\lvert x-3\rvert+C$
25.	$\int \frac{9x-14}{9x^2-24x+16}\,dx$	$\frac{2}{9x-12}+\ln\left|x-\frac{4}{3}\right|+C$
26.	$\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx$	$5x+2\ln\lvert x\rvert+3\ln\lvert x-2\rvert+4\ln\lvert x+2\rvert+C$
27.	$\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$
28.	$\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$	$\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C$

29. $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$ $\qquad \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

30. $\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx$ $\qquad \operatorname{arctg}(x-1)+C$

31. $\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx$ $\qquad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$

32. $\int \frac{1}{x^3+1}dx$ $\qquad \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

33. $\int \frac{x^3+x-1}{x(x^2+1)}dx$ $\qquad x+\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C$

34. $\int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx$ $\qquad \ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

35. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$ $\qquad \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+C$

36. $\int \frac{x}{x^3+9x^2+23x+15}dx$ $\qquad -\frac{1}{8}\ln|x+1|-\frac{5}{8}\ln|x+5|+\frac{3}{4}\ln|x+3|+C$

37. $\int \frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2}dx$ $\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

38. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+2}dx$ $\qquad x+\ln|x^2+x+2|-\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C$

39. $\int \frac{x^2-2x+1}{(x^2-2x+2)(x^2-2x+5)}dx$ $\qquad \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x-1)+C$

2.6 Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

- $\int R\left[x,(ax+b)^{\frac{1}{k_1}},(ax+b)^{\frac{1}{k_2}},\ldots,(ax+b)^{\frac{1}{k_n}}\right]dx$, kde $k_1,k_2,\cdots,k_n$ sú prirodzené čísla riešime pomocou substitúcie $ax+b=t^k$, pričom k je najmenší spoločný násobok čísel $k_1,k_2,\cdots,k_n$.

Príklad 1 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx.$

Riešenie: Integrál riešime použitím substitúcie $x=t^6$, čím prevedieme iracionálnu funkciu na racionálnu a tú následne zjednodušíme.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{t^6+t^5}6t^5dt = 6\int \frac{t^2}{t+1}dt = 6\int (t-1+\frac{1}{t+1})dt =$$

$$=6(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|)+C = 3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

Príklad 2 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{2x-3}{\sqrt[3]{3x-4}}\,dx.$

Riešenie: Integrál riešime použitím substitúcie $3x-4=t^3$, čím prevedieme iracionálnu funkciu na racionálnu a tú následne zjednodušíme.

$$\int \frac{5x-2}{\sqrt[3]{3x-4}}\,dx = \left| \begin{array}{l} 3x-4=t^3 \\ 3dx=3t^2dt \\ dx=t^2dt \\ x=\frac{t^3+4}{3} \end{array} \right| = \int \frac{5\frac{t^3+4}{3}-2}{t}t^2dt = \frac{1}{3}\int (5t^4+14t)\,dt = \frac{1}{3}(5\frac{t^5}{5}+14\frac{t^2}{2})+C =$$

$$\frac{1}{3}(t^5+7t^2)+C = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{(3x-4)^5}+7\sqrt[3]{(3x-4)^2})+C.$$

- $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_2}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right]dx$, kde $k_1, k_2, \cdots, k_n$ sú prirodzené čísla, $a,\ b,\ c,\ d$ sú reálne čísla a platí $ad-bc\neq 0$, môžeme riešiť pomocou substitúcie $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, pričom k je najmenší spoločný násobok čísel $k_1, k_2, \cdots, k_n$.

Príklad 3 *Vypočítajme integrál* $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\,dx.$

Riešenie: Integrál riešime použitím substitúcie $\frac{1+x}{1-x}=t^2$, čím prevedieme iracionálnu funkciu na racionálnu, ktorú v ďalšom kroku zjednodušíme.

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\,dx=\left|\begin{array}{c}\dfrac{1+x}{1-x}=t^2\\ x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\\ dx=\dfrac{4t}{(t^2+1)^2}dt\end{array}\right|=$$

$$=\int t\,\frac{1}{\left(1-\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)\left(1+\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2}\,\frac{4t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int(1+t^{-2})dt=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2t}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

- $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a\neq 0$ riešime tak, že výraz pod odmocninou upravíme na štvorec a vhodnou substitúciou potom využijeme jeden z integračných vzorcov:
  - ak $a>0$ $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{t^2+a}}\,dt=\ln\left|t+\sqrt{t^2+a}\right|+C$,
  - ak $a<0$ $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt=\arcsin\frac{t}{a}+C$.

Príklad 4 *Vypočítajme integrál* $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}}\,dx.$

Riešenie:

$$\int\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{4})^2+\dfrac{23}{16}}}=\left|\begin{array}{c}x-\dfrac{1}{4}=t\\ dx=dt\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\dfrac{23}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{23}{16}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\right|+C.$$

Príklad 5 *Vypočítajme integrál* $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{3-2x-5x^2}}\,dx.$

Riešenie:

$$\int\frac{1}{\sqrt{3-2x-5x^2}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-\dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{5}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{16}{25}-(x+\frac{1}{5})^2}}=\left|\begin{array}{c}x+\dfrac{1}{5}=t\\ dx=dt\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{\dfrac{16}{25}-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5t}{4}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x+1}{4}+C.$$

- $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $a \neq 0$ počítame pomocou tzv. Ostrogradského metódy (metóda neurčitých koeficientov)

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Uvedenú rovnosť zderivujeme a vynásobíme výrazom $\sqrt{ax^2+bx+c}$, čím sa zbavíme integrálov a odmocnín. Metódou porovnávania koeficientov vypočítame koeficienty neznámeho polynómu $Q_{n-1}(x)$ a koeficient k.

Príklad 6 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x^2-4x+1}}dx.$

Riešenie: Daný integrál budeme riešiť pomocou metódy neurčitých koeficientov.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x^2-4x+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{2x^2-4x+1} + k\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+1}}$$

Derivovaním oboch strán dostávame

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x^2-4x+1}} = A\sqrt{2x^2-4x+1} + \frac{(Ax+B)(4x-4)}{2\sqrt{2x^2-4x+1}} + \frac{k}{\sqrt{2x^2-4x+1}}.$$

Vynásobením oboch strán výrazom $\sqrt{2x^2-4x+1}$ máme

$$x^2 = A(2x^2-4x+1) + (Ax+B)(2x-2) + k.$$

Porovnaním koeficientov na oboch stranách rovnice vypočítame

$$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{3}{4},\ k = \frac{5}{4}.$$

Integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+1}}$ vypočítame úpravou na štvorec, podobne ako v Príklade 4. Potom

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{1}{2}}\right| + C.$$

Teda

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x^2-4x+1}}dx = \left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)\sqrt{2x^2-4x+1} + \frac{5}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{1}{2}}\right| + C.$$

Príklad 7 *Vypočítajme* $\int \sqrt{x^2+4}\,dx.$

Riešenie. Daný integrál budeme riešiť pomocou metódy neurčitých koeficientov.

Dostávame

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \int \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+4} + k\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

Derivovaním oboch strán dostávame

$$\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}} = A\sqrt{x^2+4} + (Ax+B)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} + k\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Vynásobením oboch strán výrazom $\sqrt{x^2+4}$ dostávame

$$x^2+4 = A(x^2+4) + (Ax+B)x + k,$$

$$1\cdot x^2 + 0\cdot x + 4 = 2A\cdot x^2 + B\cdot x + (4A+k).$$

Porovnaním koeficientov na oboch stranách vypočítame

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2},\quad B = 0,\quad 4 = 4A + k \Rightarrow 4 = 4.\frac{1}{2} + k \Rightarrow k = 2.$$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C$ podľa vzorca $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$,

potom

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \int \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+4} + k\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C.$$

V úlohách 1 – 47 vypočítajte neurčité integrály:

Výsledky:

1.	$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}dx$	$2\sqrt{1-x} - \ln\left\|\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right\| + C$
2.	$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$	$\frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$
3.	$\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$	$\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5} - 3\sqrt[3]{(x+1)^2} + C$
4.	$\int \frac{3x+1}{\sqrt[3]{3x-2}}dx$	$\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x-2)^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(3x-2)^2} + C$
5.	$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$	$2\sqrt{x+1} - \ln\left\|\frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}\right\| + C$
6.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$	$2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left\|\sqrt[4]{x}+1\right\| + C$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$ $\qquad 6\ln\left|\sqrt[6]{x}\right| - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C$

8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-1}}{3-\sqrt{2x-1}}\,dx$ $\qquad \frac{1}{2}(1-2x) - 3\sqrt{2x-1} - 9\ln\left|\sqrt{2x-1}-3\right| + C$

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\,dx$ $\qquad \frac{1}{3}(3x+4) - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+4)^2} + \sqrt[3]{3x+4} - \ln\left|\sqrt[3]{3x+4}+1\right| + C$

10. $\displaystyle\int \frac{4x+5\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}\,dx$ $\qquad 3\sqrt[3]{(x+2)^4} + 6\sqrt[6]{(x+2)^5} - 24\sqrt[3]{x+2} + C$

11. $\displaystyle\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx$ $\qquad x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$

12. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx$ $\qquad 4\ln\left|\sqrt{x}+1\right| - 2\sqrt{x} + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\qquad \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right| + C$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx$ $\qquad 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C$

15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$ $\qquad \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^7}}\,dx$ $\qquad 3\sqrt[3]{x} + 12\sqrt[12]{x} - 12\,\mathrm{arctg}\sqrt[12]{x} + C$

17. $\displaystyle\int \frac{(x-1)\sqrt[3]{x+1}}{x-1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ $\qquad \frac{3t^4}{4} - \frac{3t^2}{2} - \frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{15}{8}\ln\left|t^2+t+2\right| +$

$\qquad + \frac{27}{4\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right) + C$, kde $t = \sqrt[3]{x+1}$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}\,dx$ $\qquad \frac{2}{125}\sqrt{5x+2}\left(\frac{1}{3}(5x+2) - 4 - \frac{4}{5x+2}\right) + C$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ $\qquad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,dx$ $\qquad -\frac{4}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+2}{2x-2}} - \ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}\right| + C$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$ $\qquad \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$

22. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx$ $\qquad \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+4}\right|+C$

23. $\int \frac{2}{\sqrt{4x^2-8x+12}}dx$ $\qquad \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C$

24. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+10x-5}}dx$ $\qquad \ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x-5}\right|+C$

25. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+3}}dx$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{5}{4}+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}\right|+C$

26. $\int \frac{1}{\sqrt{5-2x-3x^2}}dx$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{4}+C$

27. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-4x+1}}dx$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{1}{2}}\right|+C$

28. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ $\qquad \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right|+C$

29. $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}dx$ $\qquad \frac{1}{3}\arcsin(x+\frac{1}{3})+C$

30. $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+3x+2}}dx$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|10x+3+2\sqrt{5}\sqrt{5x^2+3x+2}\right|+C$

31. $\int \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}}dx$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$

32. $\int \frac{x+7}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$ $\qquad \sqrt{x^2+4x+5}+5\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$

33. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx$ $\qquad 3\sqrt{x^2-2x+4}+\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+4}\right|+C$

34. $\int \frac{3-x}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$ $\qquad -\sqrt{x^2-2x+3}+2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C$

35. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+10x-5}}dx$ $\qquad 2\sqrt{x^2+10x-5}-5\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x-5}\right|+C$

36. $\int \frac{x^2+8}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$ $\qquad (\frac{1}{2}x+3)\sqrt{x^2-4x+1}+\frac{27}{2}\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right|+C$

37. $\int \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ $\qquad \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{9}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$

38. $\int \frac{4x^2-x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$ $\qquad (2x-13)\sqrt{x^2+4x+5}+16\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$

39. $\int \frac{2x^2-3x+5}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx$ $\qquad x\sqrt{x^2-2x+4}+\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+4}\right|+C$

40. $\int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$ $\qquad (\frac{1}{2}x+\frac{7}{2})\sqrt{x^2-2x+3}+3\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C$

41. $\int \frac{-2x^2-20x+30}{\sqrt{x^2+10x-5}}dx$ $\qquad (-x-5)\sqrt{x^2+10x-5}+50\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x-5}\right|+C$

42. $\int \frac{x^2-4}{\sqrt{3x^2+6x-5}}dx$ $\qquad (\frac{x}{6}-\frac{1}{2})\sqrt{3x^2+6x-5}-\frac{5}{3\sqrt{3}}\ln\left|x+1+\sqrt{\frac{3x^2+6x-5}{3}}\right|+C$

43. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ $\qquad (\frac{2}{6}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6})\sqrt{x^2+2x+2}+$

$+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$

44. $\int \frac{x^3}{\sqrt{5x^2-6x+3}}dx$ $\qquad \frac{1}{30}(2x^2+3x+3)\sqrt{5x^2-6x+3}+C$

45. $\int \frac{x^3+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$ $\qquad (\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3})\sqrt{x^2+1}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$

46. $\int \sqrt{x^2-2x-1}dx$ $\qquad (\frac{x}{2}-\frac{1}{2})\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C$

47. $\int \sqrt{3+2x-x^2}dx$ $\qquad (\frac{x}{2}-\frac{1}{2})\sqrt{3+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{2}+C$

2.7 Integrovanie trigonometrických funkcií

Niektoré integrály z trigonometrických funkcií počítame využitím vzťahov, ktoré platia medzi goniometrickými funkciami. Najčastejšie používame:

- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$
- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

Príklad 1 *Vypočítajme integrál* $\int \sin^2 3x\, dx$.

Riešenie: $\int \sin^2 3x\, dx = \int \frac{1-\cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 6x}{6}\right) + C$.

Príklad 2 *Vypočítajme integrál* $\int \sin 7x \sin 8x\, dx$.

Riešenie: $\int \sin 7x \sin 8x\, dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(-x) - \cos(15x)\right] dx = \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{\sin 15x}{15}\right] + C$.

Integrál typu:

- $\int R(\sin x)\cdot \cos x\, dx$ *vypočítame pomocou substitúcie* $t = \sin x$.
- $\int R(\cos x)\cdot \sin x\, dx$ *vypočítame pomocou substitúcie* $t = \cos x$.

V obidvoch prípadoch spomínaná substitúcia prevedie integrovanú funkciu na racionálnu.

Príklad 3 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Riešenie: Integrovanú funkciu si najprv rozšírime „vhodnou“ jednotkou v tvare $\frac{\cos x}{\cos x}$ a použijeme známy vzťah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dostávame:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx .$$

Integrovaná funkcia je teraz v tvare $\int R(\sin x)\cdot \cos x\, dx$, preto použijeme substitúciu $t = \sin x$.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C$$

- $\int R(\sin^{2k} x, \cos^{2n} x)\, dx$ môžeme počítať pomocou substitúcie $t = \mathrm{tg} x$ a platí $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Niekedy je výhodnejšie použiť vzorce $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ a vyhnúť sa substitúcii.

Príklad 4 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

Riešenie:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \left| \begin{matrix} \mathrm{tg}\, x = t \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1\right) dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C =$$

$$= -\frac{1}{3\mathrm{tg}^3 x} - \frac{2}{\mathrm{tg}\, x} + \mathrm{tg}\, x + C.$$

Príklad 5 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{1+\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}\, x} dx$.

Riešenie: Integrál vypočítame substitúciou $\mathrm{tg}\, x = t$.

$$\int \frac{1+\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}\, x} dx = \left| \begin{matrix} \mathrm{tg}\, x = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{t}{1+t^2}\right) dt = -\ln|1-t| + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C =$$

$$= \ln \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}{|1-\mathrm{tg}\, x|} + C.$$

- $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ riešime substitúciou $t = \mathrm{tg} \frac{x}{2}$ a platí $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Príklad 6 *Vypočítajme integrál* $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$.

Riešenie:

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right|=\int \frac{1}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int \frac{2}{t^2-8t+15}dt=$$

$$=\int \frac{2}{(t-3)(t-5)}dt=\int\left[\frac{1}{t-5}-\frac{1}{t-3}\right]dt=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C.$$

V úlohách 1 – 63 vypočítajte neurčité integrály:

		Výsledky:
1.	$\int \cos^2 x\, dx$	$\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$
2.	$\int \sin^2 x\, dx$	$\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$
3.	$\int \sin 3x \sin 5x\, dx$	$\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 8x}{16}+C$
4.	$\int \sin 2x \cos 4x\, dx$	$\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 6x}{12}+C$
5.	$\int \cos x \cos 3x\, dx$	$\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+C$
6.	$\int \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx$	$-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{24}\cos 6x+C$
7.	$\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}\, dx$	$-6\cos\frac{x}{12}-\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{12}+C$
8.	$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$	$\frac{1}{8}(x-\frac{\sin 4x}{4})+C$
9.	$\int \frac{1}{\sin x\cos^2 x}dx$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right\|+\frac{1}{\cos x}+C$
10.	$\int \cos^2 x \sin x\, dx$	$-\frac{\cos^3 x}{3}+C$
11.	$\int \sin^4 x\cos^3 x dx$	$\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C$

12.	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4\cos x + 3}\,dx$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{\cos x - 1}{\cos x - 3}\right\rvert + C$
13.	$\int (3 - 2\sin x + 3\sin^2 x)\cos x\,dx$	$3\sin x - \sin^2 x + \sin^3 x + C$
14.	$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x - 4}}\,dx$	$\ln\left\lvert\sin x + \sqrt{\sin^2 x - 4}\right\rvert + C$
15.	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 3}}\,dx$	$-\ln\left\lvert\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 3}\right\rvert + C$
16.	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 8\sin x + 26}\,dx$	$\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x + 4}{\sqrt{10}} + C$
17.	$\int \frac{\cos x}{\sin^7 x}\,dx$	$-\frac{1}{6\sin^6 x} + C$
18.	$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - 6}\,dx$	$\ln\left\lvert\sin^2 x - 6\right\rvert + C$
19.	$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,dx$	$\sin x - \cos x + C$
20.	$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\,dx$	$-\operatorname{cotg} x - 2x + C$
21.	$\int \frac{\sin x - 5}{\sin^2 x}\cos x\,dx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + \frac{5}{\sin x} + C$
22.	$\int \cos x\sqrt{2 + \sin x}\,dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{(2 + \sin x)^3} + C$
23.	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 8\sin x + 6}\,dx$	$-\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{10} + 4 + \sin x}{\sqrt{10} - 4 - \sin x}\right\rvert + C$
24.	$\int (2 - \cos x)^4 \sin x\,dx$	$\frac{(2 - \cos x)^5}{5} + C$
25.	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4\cos x + 13}\,dx$	$-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\cos x - 2}{3} + C$
26.	$\int \frac{\sin 2x}{1 - \sin^2 x}\,dx$	$-\ln\left\lvert 1 - \sin^2 x\right\rvert + C$
27.	$\int \frac{\cos x \sin 2x}{6 - 2\cos x}\,dx$	$\frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x + 9\ln\lvert\cos x - 3\rvert + C$

28.	$\int \frac{9-\cos^2 x}{3+\cos x}\sin 2x dx$	$\frac{2}{3}\cos^3 x - 3\cos^2 x + C$
29.	$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx$	$\frac{\cos^2 x}{2} - \cos x + C$
30.	$\int \cos^3 x\,dx$	$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$
31.	$\int \cos^5 x\,dx$	$\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$
32.	$\int \operatorname{cotg} x \cdot \ln \sin x\,dx$	$\frac{\ln^2 \sin x}{2} + C$
33.	$\int \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x\,dx$	$-\frac{\ln^2 \cos x}{2} + C$
34.	$\int \frac{5-\sin x}{\sin^2 x - 1}\cos x\,dx$	$\ln\left\|\frac{(\sin x-1)^2}{(\sin x+1)^3}\right\| + C$
35.	$\int \frac{2\cos x}{\sin^2 x - 9}\,dx$	$\frac{1}{3}\ln\left\|\frac{\sin x-3}{\sin x+3}\right\| + C$
36.	$\int \frac{2\sin x}{\cos^2 x - 9}\,dx$	$-\frac{1}{3}\ln\left\|\frac{\cos x-3}{\cos x+3}\right\| + C$
37.	$\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right\| + C$
38.	$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,dx$	$-\frac{1}{2(1-\cos x)^2} + C$
39.	$\int \frac{2+4\sin x}{\sin^2 x - 2\sin x - 8}\cos x\,dx$	$\ln\left\|(\sin x+2)(\sin x-4)^3\right\| + C$
40.	$\int \frac{-\cos x - 1}{\cos^2 x - 7\cos x + 10}\sin x\,dx$	$\ln\left\|\frac{(\cos x-5)^2}{\cos x-2}\right\| + C$
41.	$\int \frac{2\cos x + 13}{\cos^2 x + 9\cos x + 20}\sin x\,dx$	$\ln\left\|\frac{(\cos x+5)^3}{(\cos x+4)^5}\right\| + C$
42.	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2\sin x + 1}}\cos x\,dx$	$\frac{1}{6}\sqrt{(2\sin x+1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{2\sin x+1} + C$

43. $\displaystyle\int \frac{\sin x - 1}{\sqrt[3]{\sin x + 1}} \cos x \, dx$ $\qquad \displaystyle\frac{3}{5}\sqrt[3]{(\sin x + 1)^5} - 3\sqrt[3]{(\sin x + 1)^2} + C$

44. $\displaystyle\int \frac{3\sin x + 1}{\sqrt[3]{3\sin x - 2}} \cos x \, dx$ $\qquad \displaystyle\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3\sin x - 2)^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(3\sin x - 2)^2} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\cos x + 1}}{\cos x} \sin x \, dx$ $\qquad \displaystyle -2\sqrt{\cos x + 1} + \ln\left|\frac{1 + \sqrt{\cos x + 1}}{1 - \sqrt{\cos x + 1}}\right| + C$

46. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{\cos x}} \sin x \, dx$ $\qquad \displaystyle -2\sqrt{\cos x} + 4\sqrt[4]{\cos x} - 4\ln\left|\sqrt[4]{\cos x} + 1\right| + C$

47. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$ $\qquad \displaystyle\frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + C$

48. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ $\qquad \displaystyle\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right| + C$

49. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx$ $\qquad \ln(1 + \sin^2 x) + C$

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - 3\sin^2 x}$ $\qquad \displaystyle\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} + C$

51. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2}$ $\qquad \displaystyle\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C$

52. $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$ $\qquad \displaystyle -\frac{1}{5\operatorname{tg}^5 x} + C$

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$ $\qquad \displaystyle\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C$

54. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x}$ $\qquad \displaystyle\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{\sqrt{13} + 3 - 2\operatorname{tg} x}{\sqrt{13} - 3 + 2\operatorname{tg} x}\right| + C$

55. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$ $\qquad \displaystyle\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x}$ $\qquad \displaystyle\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - 2\operatorname{cotg} 2x + C$

57. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 - 5\cos x}$ $\qquad \displaystyle\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1 - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C$

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin x - 7\cos x - 7}$ $\qquad \displaystyle\frac{1}{4}\ln\left|4\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 7\right| + C$

59. $\displaystyle\int \frac{1+\sin x + \cos x}{1-\sin x - \cos x}dx$ $\qquad \displaystyle -2\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + 2\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1\right| - x + C$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\sin x}$ $\qquad \displaystyle\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{5\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+4}{3} + C$

61. $\displaystyle\int \frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx$ $\qquad \displaystyle\frac{5}{7}\left[\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + 3\ln(7+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2})\right] +$

$\displaystyle + \frac{12}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C$

62. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+\sin x + \cos x}$ $\qquad \displaystyle\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{5}} + C$

63. $\displaystyle\int \frac{dx}{2(\cos x + 2\sin x + 3)}$ $\qquad \displaystyle\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1) + C$

2.8 Integrovanie exponenciálnych funkcií

V tejto kapitole ukážeme, ako sa počítajú integrály s exponenciálnymi funkciami.

$\int R(e^x)\,dx$ vypočítame pomocou substitúcie $e^x = t$.

Príklad 1 *Vypočítajme integrál* $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-4}}\,dx$.

Riešenie:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-4}}\,dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2-4}\right| + C = \ln\left|e^x + \sqrt{e^{2x}-4}\right| + C\,.$$

Po použití substitúcie sme dostali integrál, ktorý patrí medzi integračné vzorce.

Príklad 2 *Vypočítajme integrál* $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+2}\,dx$.

Riešenie:

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, použijeme rovnakú substitúciu, kde je ale výhodné premennú *x* zo substitúcie najprv vyjadriť a potom derivovať. Po substitúcii dostaneme integrál z rýdzoracionálnej funkcie, kde využijeme rozklad na parciálne zlomky a následné integrovanie.

$$\int \frac{1}{e^x+2}\,dx = \left| \begin{array}{c} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t(t+2)}\,dt = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t} - \frac{\frac{1}{2}}{t+2}\right) dt = \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t+2| + C =$$

$$= \ln\sqrt{\left|\frac{e^x}{e^x+2}\right|} + C.$$

V úlohách 1 – 9 vypočítajte neurčité integrály:

		Výsledky:
1.	$\int \frac{2e^x}{e^{2x}-9}\,dx$	$\frac{1}{3}\ln\left\|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right\|+C$
2.	$\int e^x\,\frac{5-e^x}{e^{2x}-1}\,dx$	$\ln\left\|\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^3}\right\|+C$
3.	$\int \frac{2e^{2x}+13e^x}{e^{2x}+9e^x+20}\,dx$	$\ln\left\|\frac{(e^x+4)^5}{(e^x+5)^3}\right\|+C$
4.	$\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx$	$\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+\ln\left\|e^x+1\right\|+C$
5.	$\int \frac{e^{4x}-e^{2x}}{e^{2x}-16}\,dx$	$\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{15}{2}\ln\left\|e^{2x}-16\right\|+C$
6.	$\int \frac{4}{e^x+2}\,dx$	$2x-2\ln\left\|e^x+2\right\|+C$
7.	$\int \frac{1}{e^x-7}\,dx$	$-\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}\ln\left\|e^x-7\right\|+C$
8.	$\int \frac{1}{(e^x-3)(e^x-2)}\,dx$	$\frac{1}{6}x+\ln\left\|\frac{\sqrt[3]{e^x-3}}{\sqrt{e^x-2}}\right\|+C$
9.	$\int \frac{1}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$	$x-\ln\left\|e^x+1\right\|+\frac{1}{e^x+1}+C$

3 URČITÝ INTEGRÁL

3.1 Newton – Leibnizov vzorec

Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$ a nech má na intervale $\langle a,b\rangle$ primitívnu funkciu F. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Rozdiel $F(b) - F(a)$ sa zvykne označovať tiež znakom $[F(x)]_a^b$.

Príklad 1 *Vypočítajme integrál* $\int_0^2 \frac{2x-3}{x-3}dx.$

Riešenie:

$$\int_0^2 \frac{2x-3}{x-3}dx = \int_0^2 (2+\frac{3}{x-3})dx = \left[2x+3\ln|x-3|\right]_0^2 = (4+3\ln 1)-(0+3\ln 3) = 4-3\ln 3.$$

3.2 Integrovanie substitučnou metódou

Nech funkcia f je spojitá na intervale $I \in \langle a,b\rangle$ a nech funkcia φ má spojitú deriváciu na ohraničenom uzavretom intervale $J \in \langle \alpha,\beta\rangle$ a zobrazuje interval I do J. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Príklad 1 *Vypočítajme integrál* $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx.$

Riešenie:

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \left| \begin{array}{l} 1+\ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \\ x_1 = 1 \to t_1 = 1+\ln 1 = 1+0 = 1 \\ x_2 = e \to t_2 = 1+\ln e = 1+1 = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Príklad 2 *Vypočítajme integrál* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - 3\sin x)\cos x\,dx.$

Riešenie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - 3\sin x)\cos x\, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \\ x_1 = 0 \to t_1 = \sin 0 = 0 \\ x_2 = \frac{\pi}{2} \to t_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 (t^2 - 3t)dt = \left[\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{7}{6}$$

3.3 Integrovanie metódou per partes

Nech funkcie u, v sú spojito diferencovateľné na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom platí

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx .$$

Príklad 1 *Vypočítajme integrál* $\int_1^2 (2x-1)\, e^x dx$.

Riešenie:

$$\int_1^2 (2x-1)\, e^{2x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x-1 & v' = e^{2x} \\ u' = 2 & v = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right| = \left[(2x-1)\frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - 2\int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} dx = \left[(2x-1)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 = .$$

$$= 3\frac{e^4}{2} - \frac{e^4}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\right) = e^4 .$$

Príklad 2 *Vypočítajme integrál* $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\, dx$.

Riešenie:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & v' = x \\ u' = \frac{1}{1+x^2} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} =$$

$$= 2\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

.

V úlohách 1 – 40 vypočítajte určité integrály:

Výsledky:

1. $\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x} dx$ $\qquad -\ln 2$

2.	$\int_0^1 (x^2+x+1)\,dx$	$\frac{11}{6}$
3.	$\int_1^4 (\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$	$\frac{8}{3}$
4.	$\int_0^3 (\sqrt[3]{x}+\sqrt{3x})\,dx$	$6+\frac{9\sqrt[3]{3}}{4}$
5.	$\int_{-1}^1 \frac{x^2-5x+6}{x-2}\,dx$	-6
6.	$\int_0^1 \frac{e^x}{3+e^x}\,dx$	$\ln\frac{3+e}{4}$
7.	$\int_1^2 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$	$\ln\frac{32}{27}$
8.	$\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,dx$	$\ln 3$
9.	$\int_0^2 \frac{2x-3}{x-3}\,dx$	$4-3\ln 3$
10.	$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+5}$	$\mathrm{arctg}\,4-\mathrm{arctg}\,2$
11.	$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$	$\frac{1}{3}$
12.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3-2\sin x+3\sin^2 x)\cos x\,dx$	3
13.	$\int_2^3 (1-x)^{-3}\,dx$	$-\frac{3}{8}$
14.	$\int_0^1 2x(x^2+2)^3\,dx$	$\frac{65}{4}$
15.	$\int_0^1 x e^{1+x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}(e^2-e)$
16.	$\int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}\,dx$	$\frac{2}{3}(\sqrt{27}-\sqrt{8})$

17.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos x)^4 \sin x \, dx$	$\frac{31}{5}$
18.	$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$	$\frac{\pi}{6}$
19.	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$	$2\ln 2 - 1$
20.	$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$	$4 - 2\,\mathrm{arctg}\, 2$
21.	$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx$	$\frac{\pi}{2}+1$
22.	$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$	$4-\pi$
23.	$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$	$\frac{3}{2}$
24.	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$	$2-\frac{\pi}{4}$
25.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x \, dx$	$\frac{1}{3}$
26.	$\int_0^7 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$	$\frac{48}{5}$
27.	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx$	$\ln \frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}}$
28.	$\int_1^2 \frac{e^x}{1-e^{2x}} dx$	$\frac{1}{2}\ln \frac{1+e^2}{(1+e)^2}$
29.	$\int_0^1 \frac{4}{2+e^x} dx$	$2-2\ln \frac{2+e}{3}$
30.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} \, dx$	$\frac{2}{3}$

31. $\int_0^3 |1-3x|\,dx$ $\qquad \frac{65}{6}$

32. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ $\qquad 1$

33. $\int_1^2 (3x-1)e^x\,dx$ $\qquad 2e^2+e$

34. $\int_2^e x\ln x\,dx$ $\qquad \frac{1}{4}e^2-\ln 4+1$

35. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx$ $\qquad -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

36. $\int_0^2 xe^{-x}dx$ $\qquad 1-3e^{-2}$

37. $\int_1^2 x\ln x\,dx$ $\qquad 2\ln 2-\frac{3}{4}$

38. $\int_0^1 x^3e^{2x}dx$ $\qquad \frac{e^2}{8}+\frac{3}{8}$

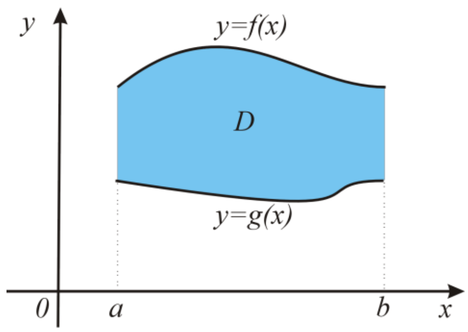
39. $\int_{-1}^1 \arccos x\,dx$ $\qquad \pi$

40. $\int_5^6 \frac{4x+2}{x^2-2x-8}\,dx$ $\qquad \ln\frac{64}{7}$

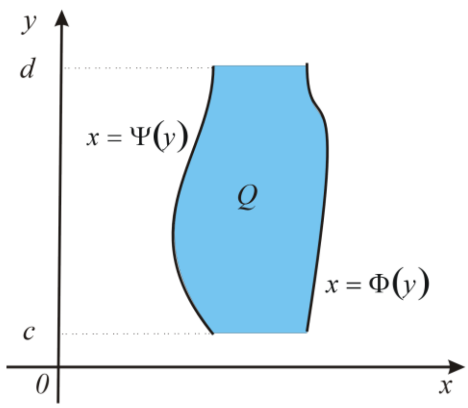
4 POUŽITIE URČITÉHO INTEGRÁLU

4.1 Plošný obsah rovinných útvarov

Nech funkcie $f:\langle a,b\rangle \to \mathbf{R}$, $g:\langle a,b\rangle \to \mathbf{R}$ sú spojité a nech pre každé $x \in \langle a,b\rangle$ je $f(x) \le g(x)$. Potom množinu $D=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2, a\le x\le b, g(x)\le y\le f(x)\}$ nazývame ***elementárna oblasť*** v $\mathbf{R}^2$ ***vzhľadom na os*** o_x (elementárna oblasť typu $[x,y]$).



Nech funkcie $\Phi:\langle c,d\rangle \to \mathbf{R}$, $\Psi:\langle c,d\rangle \to \mathbf{R}$ sú spojité a nech pre každé $y \in \langle c,d\rangle$ je $\Psi(y) \le \Phi(y)$. Potom množinu $Q=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2, c\le y\le d, \Psi(y)\le x\le \Phi(y)\}$ nazývame ***elementárna oblasť*** v $\mathbf{R}^2$ ***vzhľadom na os*** o_y (elementárna oblasť typu $[y,x]$).

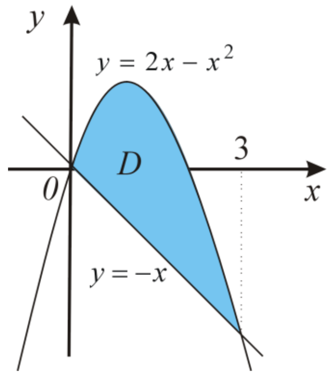


Plošný obsah elementárnej oblasti D sa počíta podľa vzorca $P=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$.

Plošný obsah elementárnej oblasti Q sa počíta podľa vzorca $P=\int_c^d [\Phi(y)-\Psi(y)]dy$.

Príklad 1 *Vypočítajme obsah časti roviny ohraničenej priamkou $y=-x$ a parabolou $y=2x-x^2$.*

Riešenie: Načrtneme dané krivky a množinu nimi určenú označme napr. *M*.



Aby sme množinu M popísali, potrebujeme vypočítať priesečníky daných kriviek:

$$-x = 2x - x^2 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (x = 3).$$

Množina M je elementárna oblasť typu $[x, y]$ a preto ju môžeme popísať nerovnosťami:

$$0 \leq x \leq 3$$

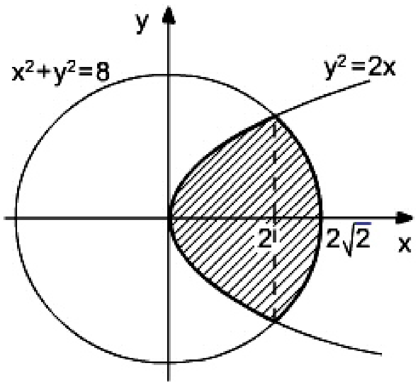
$$-x \leq y \leq 2x - x^2$$

Pre obsah množiny M platí: $P(M) = \int_0^3 [(2x - x^2) - (-x)]dx = \frac{9}{2}$.

Príklad 2 *Vypočítajte obsah časti roviny M ohraničenej krivkami*

$M : x^2 + y^2 = 8,\ y^2 = 2x,\ x > 0.$

Riešenie:



Množina M je súmerná podľa o_x, preto stačí vypočítať obsah polovice plochy, napr. pre $y > 0$.
Označíme túto množinu M_1 a potom platí $P(M) = 2P(M_1)$.
Vypočítajme priesečníky daných kriviek:

$$x^2 + y^2 = 8 \wedge y^2 = 2x.$$

Spoločné body sú: $[2,2]$ a $[2,-2]$.
Množina M_1 je elementárna oblasť typu $[y, x]$, preto ju popíšeme nerovnosťami:

$$0 \le y \le 2$$
$$\frac{y^2}{2} \le x \le \sqrt{8-y^2}$$

Pre obsah množiny M_1 platí $P(M_1) = \int_0^2 (\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2})dy$, kde

$$\int_0^2 \sqrt{8-y^2}\,dy = \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{8}\cos t \\ dy = -\sqrt{8}\sin t dt \\ y_1 = 0 \to t_1 = \frac{\pi}{2} \\ y_2 = 2 \to t_2 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8 - 8\cos^2 t}(-\sqrt{8}\sin t)\,dt = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= 4\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 2$$

$$\int_0^2 \frac{y^2}{2}dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

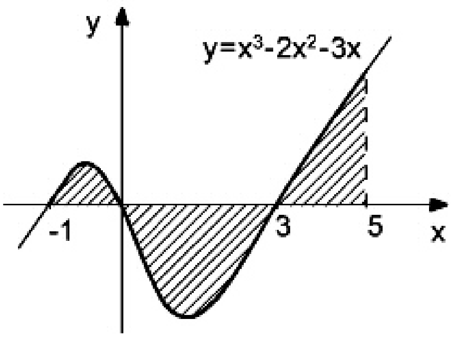
$$P(M_1) = \int_0^2 (\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2})\,dy = \pi + 2 - \frac{4}{3} = \pi + \frac{2}{3}$$

Teda obsah danej množiny M je:

$$P(M) = 2P(M_1) = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Príklad 3 *Vypočítajme obsah časti roviny M ohraničenej grafom funkcie $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ na intervale $\langle -1,5 \rangle$ a osou o_x.*

Riešenie: Načrtneme graf funkcie, ktorá na osi o_x prechádza bodmi $-1, 0, 3$.



Množina M nie je elementárna oblasť, aby sme ju popísali nerovnosťami musíme ju rozdeliť na 3 elementárne oblasti:

$M_1 : -1 \le x \le 0, \quad 0 \le y \le x^3 - 2x^2 - 3x$

$M_2 : \; 0 \le x \le 3, \quad x^3 - 2x^2 - 3x \le y \le 0$

$M_3 : \; 3 \le x \le 5, \quad 0 \le y \le x^3 - 2x^2 - 3x.$

Pre obsah časti roviny M platí:

$$P(M)=P(M_1)+P(M_2)+P(M_3),$$

kde $P(M_1)=\int_{-1}^{0}(x^3-2x^2-3x)\,dx=\dfrac{7}{12}$

$P(M_2)=\int_{0}^{3}(-x^3+2x^2+3x)\,dx=\dfrac{45}{4}$

$P(M_3)=\int_{3}^{5}(x^3-2x^2-3x)\,dx=\dfrac{140}{3}.$

Výsledok:

$$P(M)=\frac{7}{12}+\frac{45}{4}+\frac{140}{3}=\frac{117}{2}.$$

V úlohách 1 – 45 vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

		Výsledky:
1.	$y=2x,\ y=x,\ x=5$	$\frac{25}{2}$
2.	$y=3-x,\ y=x,\ y=0$	$\frac{9}{4}$
3.	$y=5-2x,\ y=2+x,\ x=0$	$\frac{3}{2}$
4.	$x=y^2,\ y=x-2$	$\frac{9}{2}$
5.	$y=6x-x^2,\ y=0$	36
6.	$y=x^2-2x,\ y=0$	$\frac{4}{3}$
7.	$y=x^2-2x,\ y=x$	$\frac{9}{2}$
8.	$y=x^2+x,\ y=2x+2$	$\frac{9}{2}$
9.	$y=-x^2+2,\ y=-3x+4$	$\frac{1}{6}$
10.	$y=x^2-3x+10,\ y=2x+4$	$\frac{1}{6}$
11.	$y=x^2,\ y^2=x$	$\frac{1}{3}$
12.	$x+y=2,\ y=-x^2+4x-2$	$\frac{9}{2}$
13.	$y=x^2-x-6,\ y=-x^2+5x+14$	$\frac{343}{3}$

14.	$y = x^2 - x,\ y = -x^2 + 3x$	$\frac{8}{3}$
15.	$y = 2x^2 - x - 2,\ y = x^2 + 2x + 2$	$\frac{125}{6}$
16.	$xy = 4,\ x + y = 5$	$\frac{15}{2} - 8\ln 2$
17.	$xy = 5,\ y = 6 - x$	$12 - 5\ln 5$
18.	$y = \frac{4}{x},\ y = 6 - 2x$	$3 - 4\ln 2$
19.	$y = x^3,\ y = 4x$	8
20.	$y = \ln x,\ y = \ln^2 x$	$3 - e$
21.	$y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$	$e - 1$
22.	$y = e^{2x},\ y = e^x + 2,\ x = 0$	$2\ln 2 - \frac{1}{2}$
23.	$y = e^{2x} - 3,\ y = e^x - 1,\ x = 0$	$2\ln 2 - \frac{1}{2}$
24.	$y = 2e^x + 3,\ y = e^{2x},\ x = 0$	$3\ln 3$
25.	$y = e^x,\ y = \frac{1}{x},\ x = 2,\ x = 3$	$e^3 - e^2 + \ln\frac{2}{3}$
26.	$y = e^{\frac{x}{2}},\ y = 2,\ x = 2$	$2e + 4\ln 2 - 8$
27.	$x = 0,\ x = \frac{1}{2},\ y = 0,\ y = xe^{-2x}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2e}$
28.	$y = e^x - 1,\ y = e^{2x} - 3,\ x = 0$	$-\frac{1}{2} + \ln 4$
29.	$y = \frac{2}{1 + x^2},\ y = x^2$	$\pi - \frac{2}{3}$
30.	$y = \arcsin x,\ x = 0,\ y = \frac{\pi}{2}$	1
31.	$y = x,\ y = x + \sin^2 x,\ x = 0,\ x = \pi$	$\frac{\pi}{2}$
32.	$y = 3 - x,\ y = x,\ y = 0$	$\frac{9}{4}$
33.	$y = x + 1,\ y = 7 - x,\ y = 0$	16
34.	$x = 4,\ y^2 = x$	$\frac{32}{3}$
35.	$x = 6,\ x = y^2 - 3$	36
36.	$y = x - 2,\ y^2 = x$	$\frac{9}{2}$

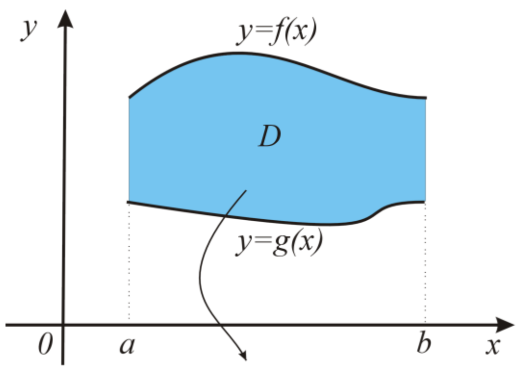
37.	$x = y^2, x + y - 6 = 0$	$\frac{125}{6}$
38.	$x = y^2, x - 3y - 4 = 0$	$\frac{125}{6}$
39.	$y^2 = x + 1, x + 2y - 2 = 0$	$\frac{32}{3}$
40.	$x = y^2 - 2, x - y - 4 = 0$	$\frac{125}{6}$
41.	$y = x + 1, (y-1)^2 = x$	$\frac{1}{6}$
42.	$y = \frac{8}{x}, y = 2x, y = 6$	$5 - 8\ln\frac{3}{2}$
43.	$y = \frac{8}{x}, y = \frac{x}{2}, y = 5$	$21 - 8\ln\frac{5}{2}$
44.	$y = \frac{6}{x}, y = \frac{x}{6}, y = 3$	$24 - 6\ln 3$
45.	$y = \ln x, y = 0, y = e, x = 0$	$e^e - 1$

4.2 Objem rotačného telesa

Nech A je elementárna oblasť (krivočiary lichobežník) $A: a \le x \le b, 0 \le g(x) \le y \le f(x)$, kde f, g sú spojité nezáporné funkcie na intervale $\langle a, b \rangle$.

Rotáciou krivočiareho lichobežníka A v priestore $\mathbf{R}^3$ s osami x, y, z, okolo x - ovej osi vznikne rotačné teleso, ktorého objem V vypočítame pomocou vzorca

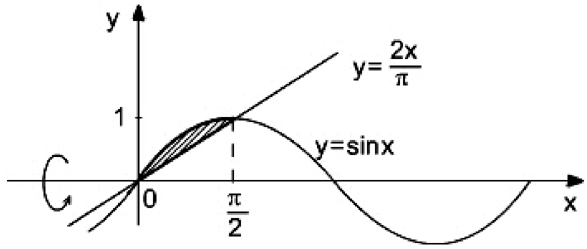
$$V = \pi\int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx.$$



V špeciálnom prípade, ak $g(x) = 0$ platí $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$

Príklad 1 *Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti A okolo* o_x. $A: y=\dfrac{2x}{\pi},\ y=\sin x,\ x>0.$

Riešenie: Nakreslíme a popíšeme elementárnu oblasť A.



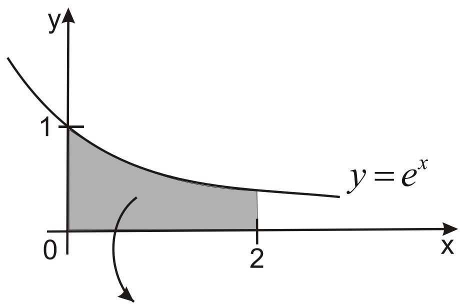
$$A:\quad 0\le x\le \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{2x}{\pi}\le y\le \sin x$$

$$V(A)=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin^2 x-\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2\right]dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)dx=$$

$$=\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{4x^3}{3\pi^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Príklad 2 *Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti A okolo* o_x. $A: y=e^{-x},\ y=0,\ x=0,\ x=2.$

Riešenie: Nakreslíme a popíšeme elementárnu oblasť A.



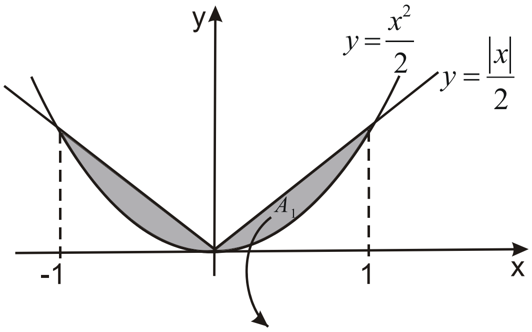
$$A:\ 0\le x\le 2$$
$$0\le y\le e^{-x}$$

$$V(A)=\pi\int_0^2(e^{-x})^2dx=\pi\int_0^2 e^{-2x}dx=\pi\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^2=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^4}\right).$$

Príklad 3 *Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej oblasti A* okolo o_x

$$A: y=\frac{x^2}{2},\ y=\frac{|x|}{2}.$$

Riešenie: Nakreslíme a popíšeme oblasť *A*.



Daná množina A nie je elementárna oblasť, ale pre $x \geq 0$ dostávame elementárnu oblasť (označme A_1), ktorú môžeme popísať nerovnosťami:

$$A_1: \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{x^2}{2} \leq y \leq \frac{x}{2}$$

Rotáciou elementárnej oblasti A_1 okolo o_x dostávame teleso, ktorého objem je polovica objemu daného telesa. Preto:

$$V(A)=2V(A_1)=2\pi\int_0^1\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right]dx=2\pi\int_0^1\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{4}\right)dx=2\pi\left[\frac{x^3}{12}-\frac{x^5}{20}\right]_0^1=\frac{\pi}{15}.$$

V úlohách 1 – 30 vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti okolo o_x.

		Výsledky:
1.	$y=2x,\ y=x,\ x=5$	125π
2.	$y=5-2x,\ y=2+x,\ x=0$	10π
3.	$y=3x+1,\ y=0,\ x=0,\ x=1$	7π
4.	$y=2x-x^2,\ y=0$	$\frac{16}{15}\pi$
5.	$y=x^2+2,\ y=2x^2+1$	$\frac{24}{5}\pi$
6.	$y=x^2,\ y=1-x^2$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$
7.	$y=x^2+2,\ y=0,\ x=-1,\ x=3$	$\frac{1532}{15}\pi$

8.	$y=6x-x^2,\ y=0$	$\frac{1296}{5}\pi$
9.	$y=x^2,\ y^2=x$	$\frac{3}{10}\pi$
10.	$xy=4,\ x+y=5$	9π
11.	$xy=5,\ y=6-x$	$\frac{64}{3}\pi$
12.	$y=\frac{4}{x},\ y=6-2x$	$\frac{4}{3}\pi$
13.	$y=x^3,\ y=4x,\ x\geq 0$	$\frac{512}{21}\pi$
14.	$y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$	$\frac{\pi}{2}(e^2-1)$
15.	$y=e^{-\frac{x}{10}},\ y=0,\ x=0,\ x=10$	$5\pi(1-e^{-2})$
16.	$y=e^{\frac{x}{2}},\ y=e,\ x=0$	$\pi(e^2+1)$
17.	$y=e^{\frac{x}{2}},\ y=2,\ x=2$	$\pi(e^2+8\ln 2-12)$
18.	$y=e^{2x},\ y=1,\ x=4$	$\frac{\pi}{4}(e^{16}-17)$
19.	$y=e^x,\ y=\frac{1}{x},\ x=2,\ x=3$	$\frac{\pi}{6}(3e^6-3e^4-1)$
20.	$y=e^{-x},\ y=x+1,\ x=2$	$\frac{\pi}{6}(49+3e^{-4})$
21.	$y=3-x,\ y=x,\ y=0$	$\frac{9}{4}\pi$
22.	$y=x+1,\ y=7-x,\ y=0$	$\frac{128}{3}\pi$
23.	$x=4,\ y^2=x$	8π
24.	$x=6,\ x=y^2-3$	$\frac{81}{2}\pi$
25.	$y=\frac{8}{x},\ y=2x,\ y=6$	$\frac{56}{3}\pi$
26.	$y=\frac{8}{x},\ y=\frac{x}{2},\ y=5$	108π
27.	$y=\frac{6}{x},\ y=\frac{x}{6},\ y=3$	80π
28.	$y=\sin x,\ x=0,\ y=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}\pi}{8}-\frac{\pi^2}{24}$
29.	$y=\sqrt{x\sin x},\ y=0,\ x\in\langle 0,\pi\rangle$	π^2
30.	$x^2+y^2=8,\ y^2=2x,\ x\geq 0,\ y\geq 0$	$\pi\left(-\frac{28}{3}+\frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$

V úlohách 31 - 40 vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi o_y oblasti ohraničenej krivkami:

		Výsledky:
31.	$y=3-x,\ y=x,\ y=0$	$\frac{27}{4}\pi$
32.	$x=4,\ y^2=x$	$\frac{256}{5}\pi$
33.	$y=x-2,\ y^2=x$	$\frac{72}{5}\pi$
34.	$x=y^2,\ x+y-6=0$	$\frac{500}{3}\pi$
35.	$x=y^2,\ x-3y-4=0$	250π
36.	$y=x+1,\ (y-1)^2=x$	$\frac{2}{15}\pi$
37.	$y=\frac{8}{x},\ y=2x,\ y=6$	$\frac{22}{3}\pi$
38.	$y=\frac{8}{x},\ y=\frac{x}{2},\ y=5$	$\frac{684}{5}\pi$
39.	$y=\frac{6}{x},\ y=\frac{x}{6},\ y=3$	288π
40.	$y=\ln x,\ y=0,\ y=e,\ x=0$	$\frac{\pi}{2}(e^{2e}-1)$

4.3 Dĺžka krivky

Ak krivka C je grafom $f:\langle a,b\rangle\to\mathbf{R}$, ktorá má spojitú deriváciu, tak pre jej dĺžku l platí

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,.$$

Príklad 1 *Vypočítajme dĺžku danej krivky C:* $y=\ln\sin x,\ x\in\left\langle\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\rangle$.

Riešenie: Kedže $f(x)=\ln\sin x,\ f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$. Po dosadení do vzťahu pre výpočet dĺžky krivky dostávame:

$$l=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{\sin x}\frac{\sin x}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx=\left|\begin{array}{l}\cos x=t\\ -\sin x\,dx=dt\\ x_1=\frac{\pi}{3}\to t_1=\frac{1}{2}\\ x_2=\frac{2\pi}{3}\to t_2=-\frac{1}{2}\end{array}\right|=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{1-t^2}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\ln 3.$$

V úlohách 1 – 11 vypočítajte dĺžku danej krivky.

		Výsledky:
1.	$C: y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\ x\in\langle 0,3\rangle$	$\dfrac{1}{2}(e^3-e^{-3})$
2.	$C: y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2},\ x\in\langle 1,4\rangle$	$\dfrac{15}{4}+\ln 2$
3.	$C: y=1-\ln\cos x,\ x\in\left\langle 0,\dfrac{\pi}{4}\right\rangle$	$\ln\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{8}$
4.	$C: y=1-\ln\sin x,\ x\in\left\langle \dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$	$\ln\sqrt{3}$
5.	$C: y=2\sqrt{x^3},\ x\in\langle 0,2\rangle$	$\dfrac{2}{27}(19\sqrt{19}-1)$
6.	$C: y=2\sqrt{x},\ x\in\langle 1,2\rangle$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2\sqrt{6}+5}{2\sqrt{2}+3}$
7.	$C: y=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1},\ x\in\langle \ln 2,\ln 5\rangle$	$\ln\dfrac{16}{5}$
8.	$C: y=\ln(1-x^2),\ x\in\left\langle -\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\rangle$	$2\ln 3-1$
9.	$C: y=e^x,\ x\in\langle 0,1\rangle$	$\sqrt{1+e^2}+\dfrac{1}{2}\ln\left\|\dfrac{1+\sqrt{1+e^2}}{1-\sqrt{1+e^2}}\right\|-\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\ln\left\|\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right\|$
10.	$C: y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2},\ x\in\left\langle 0,\dfrac{1}{2}\right\rangle$	$\sqrt{2}(\sqrt{6}-2)$
11.	$C: y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x},\ x\in\left\langle \dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right\rangle$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}-1)$

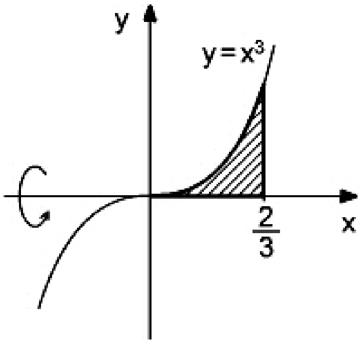
4.4 Plošný obsah rotačnej plochy

Plošný obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou grafu spojito diferencovateľnej, nezápornej funkcie $f:\langle a,b\rangle\to\mathbf{R}$, okolo osi x sa počíta pomocou vzorca

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Príklad 1 *Vypočítajme obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou danej krivky C okolo osi* o_x, C: $y = x^3$, $x \in \left\langle 0, \frac{2}{3} \right\rangle$.

Riešenie:



Po dosadení do vzťahu dostávame:

$$S = 2\pi\int_0^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{1+(3x)^2}\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \left| \begin{array}{l} 1+9x^4 = t \\ x^3dx = \dfrac{dt}{36} \\ x_1 = 0 \to t_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{2}{3} \to t_2 = \dfrac{25}{9} \end{array} \right| = \frac{\pi}{18}\int_1^{\frac{25}{9}} \sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{18}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\frac{25}{9}} = \frac{98\pi}{729}.$$

V úlohách 1 – 7 vypočítajte obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou danej krivky okolo osi o_x.

		Výsledky:
1.	$C: y^2 = 2x,\ x \in \left\langle 0, \frac{3}{2} \right\rangle$	$\frac{14\pi}{3}$
2.	$C: y = \sqrt{x},\ x \in \langle 1, 2 \rangle$	$\frac{\pi}{6}(27 - 5\sqrt{5})$
3.	$C: 9x = y^2,\ x \in \langle 0, 3 \rangle$	$\frac{\pi}{2}(21\sqrt{21} - 27)$
4.	$C: x^2 + y^2 = 4,\ y > 0,\ x \in \langle -1, 1 \rangle$	8π
5.	$C: y = \sqrt{9 - x^2},\ x \in \langle 0, 2 \rangle$	12π
6.	$C: y = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$	$2\pi(\sqrt{2} + \ln\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})$
7.	$C: y = e^{-x},\ x \in \langle 0, 1 \rangle$	$\frac{-\sqrt{e^2+1}}{e^2} - \ln\frac{1+\sqrt{e^2+1}}{e} + \sqrt{2} + \ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

5 NEVLASTNÝ INTEGRÁL

5.1 Integrál z funkcie na neohraničenom intervale

Nech funkcia f je integrovateľná na každom konečnom intervale $\langle a,b\rangle$. Potom, ak existuje vlastná limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, hovoríme, že ***integrál*** $\int_a^\infty f(x)dx$ ***existuje (konverguje).***

Ak limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ neexistuje alebo je nevlastná, hovoríme, že ***integrál*** $\int_a^\infty f(x)dx$ ***neexistuje (diverguje).***

Teda

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Nech funkcia f je integrovateľná na každom konečnom intervale $\langle a,b\rangle$. Potom, ak existuje vlastná limita $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$, hovoríme, že ***integrál*** $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ ***existuje (konverguje).***

Ak limita $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ neexistuje alebo je nevlastná, hovoríme, že ***integrál*** $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ ***neexistuje (diverguje).***

Teda

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Nevlastný integrál na intervale $(-\infty,\infty)$ počítame nasledovne:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx.$$

Príklad 1 *Vypočítajme nevlastný integrál* $\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}dx$ *, ak existuje.*

Riešenie: $\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{x^3+1}{x^4}dx$

Vypočítame určitý integrál $\int_1^b \frac{x^3+1}{x^4}dx = \int_1^b (\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4})\,dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{3x^3}\right]_1^b = \ln b - \frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3}.$

Potom $\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{x^3+1}{x^4}dx = \lim\limits_{b\to\infty}(\ln c - \frac{1}{3c^3} + \frac{1}{3}) = \infty.$

Kedže limita je nevlastná, daný integrál diverguje (neexistuje).

Príklad 2 *Vypočítajme nevlastný integrál* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$ *, ak existuje.*

Riešenie: Daný integrál rozpíšeme na súčet dvoch integrálov, kde $a \in R$ je ľubovoľná konštanta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx + \int_{a}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx .$$

Vypočítame jednotlivé nevlastné integrály:

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{a} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = t \\ \dfrac{dx}{1+x^2} = dt \\ x_1 = b \to t_1 = \operatorname{arctg} b \\ x_2 = a \to t_2 = \operatorname{arctg} a \end{array} \right| = \lim_{b \to -\infty} \int_{\operatorname{arctg} b}^{\operatorname{arctg} a} t^2 dt = \lim_{b \to -\infty} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{\operatorname{arctg} b}^{\operatorname{arctg} a} =$$

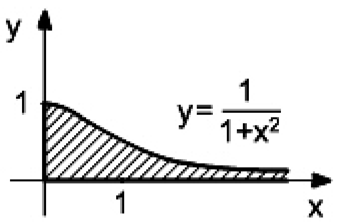
$$= \lim_{b \to -\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg}^3 a}{3} - \frac{\operatorname{arctg}^3 b}{3} \right) = \frac{\operatorname{arctg}^3 a}{3} + \frac{\pi^3}{24}$$

$$\int_{a}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^3}{24} - \frac{\operatorname{arctg}^3 a}{3}$$

Teda
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\operatorname{arctg}^3 a}{3} + \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi^3}{24} - \frac{\operatorname{arctg}^3 a}{3} = \frac{\pi^3}{12} .$$

Príklad 3 *Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkou* $y = \frac{1}{1+x^2}$ *, osami* o_x *a* o_y *.*

Riešenie: Načrtneme časť roviny ohraničenej danými krivkami:



Obsah množiny môžeme vypočítať takto:

$$P = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \to \infty} (\operatorname{arctg} b - 0) = \frac{\pi}{2} .$$

V úlohách 1 – 11 vypočítajte nevlastné integrály, ak existujú.

		Výsledky:
1.	$\int_{2}^{\infty} (\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2})^2 dx$	$\frac{37}{6}$
2.	$\int_{-\infty}^{-0,5} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$	$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
3.	$\int_{0}^{\infty} e^{-3x} dx$	$\frac{1}{3}$
4.	$\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$	diverguje
5.	$\int_{0}^{\infty} \sin x \, dx$	diverguje
6.	$\int_{3}^{\infty} \frac{1}{(x-2)^2} dx$	1
7.	$\int_{1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$	$e-1$
8.	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$	π
9.	$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$	1
10.	$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$	$\frac{1}{\ln 2}$
11.	$\int_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx$	$\frac{1}{2}$

12. Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkami:
$y = e^{-\frac{x}{3}}$, $x = 0$, $y = 0$, pre $x \geq 0$. — 3

13. Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkami:
$y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, pre $x \geq 1$. — 1

14. Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkami:
$y = e^{-x}$, $x = 0$, $y = 0$, pre $x \geq 0$. — 1

5.2 Integrál z neohraničenej funkcie

Nech je funkcia f definovaná na ohraničenom intervale $\langle a,b)$ a nech v každom intervale $(b-\delta,b)$, $b-a>\delta>0$ je neohraničená. Nech pre každé $x\in\langle a,b)$ existuje $\int_a^x f(t)\,dt$. Ak existuje vlastná limita $\lim\limits_{x\to b-}\int_a^x f(x)\,dx$ hovoríme, že $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje a píšeme $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{x\to b-}\int_a^x f(x)\,dx$ a nazývame ho nevlastným integrálom funkcie f na intervale $\langle a,b)$.

Podobne definujeme integrál z funkcie f neohraničenej v bode a: $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{x\to a+}\int_x^b f(x)\,dx$.

Príklad 1 *Vypočítajme nevlastný integrál* $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x\,dx$*, ak existuje.*

Riešenie: Funkcia $\operatorname{tg}x$ je na okolí bodu $\frac{\pi}{2}$ neohraničená, preto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x\,dx=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\int_0^x\operatorname{tg}x\,dx=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left[-\ln|\cos x|\right]_0^x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(-\ln|\cos x|+1)=\infty.$$

Nevlastný integrál diverguje.

Príklad 2 *Vypočítajme nevlastný integrál* $\int_0^1\frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}dx$*, ak existuje.*

Riešenie: Funkcia $f(x)=\frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}$ je neohraničená na okolí oboch krajných bodov intervalu $\langle 0,1\rangle$, preto vyberieme ľubovoľné číslo z intervalu a integrál rozložíme na súčet dvoch nevlastných integrálov.

$$\int_0^1\frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}dx$$

Vypočítame oba nevlastné integrály:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}dx=\lim_{c\to0+}\int_c^{\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}dx=\lim_{c\to0+}\left[2\sqrt{x-x^2}\right]_x^{\frac{1}{2}}=\lim_{c\to0+}(2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}-2\sqrt{c-c^2})=1$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = \lim_{c\to 1-} \int_{\frac{1}{2}}^{c} \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = \lim_{c\to 1-} \left[2\sqrt{x-x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{c} = \lim_{c\to 1-} (2\sqrt{c-c^2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}) = -1$$

Teda

$$\int_{0}^{1} \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = 1-1=0\,.$$

V úlohách 1 – 8 vypočítajte nevlastné integrály, ak existujú.

		Výsledky:
1.	$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$	diverguje
2.	$\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	1
3.	$\int_{0}^{5} \frac{1}{x}\,dx$	diverguje
4.	$\int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx$	6
5.	$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\frac{\pi}{2}$
6.	$\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx$	diverguje
7.	$\int_{0}^{1} \ln x\,dx$	-1
8.	$\int_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$	$\frac{8}{3}$

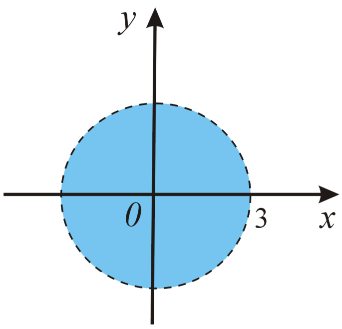
6. DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

6.1 Funkcia dvoch premenných

Funkcia dvoch premenných je predpis f, ktorý každému $X = [x, y] \in M \subset E_2$ priradí práve jedno $z \in R$, píšeme $z = f(X)$ alebo $z = f(x, y)$. Množinu M nazývame ***definičným oborom*** funkcie f, označujeme $D(f)$.

Príklad 1 *Nájdime definičný obor funkcie* $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$.

Riešenie: Funkcia z je definovaná pre body $[x, y]$ spĺňajúce podmienku $9 - x^2 - y^2 > 0$, čiže $x^2 + y^2 < 9$. Definičný obor funkcie je teda vnútro kruhu so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom $r = 3$.



V úlohách 1 – 20 určte definičný obor funkcie.

Výsledky:

1. $z = \dfrac{x + y}{3 - x}$ — $D(f) = \{[x, y] \in R;\ x \neq 3\}$

2. $z = \dfrac{2y - x^2}{x + 7} - \dfrac{e^x}{y - 1}$ — $D(f) = \{[x, y] \in R;\ x \neq -7 \wedge y \neq 1\}$

3. $z = \dfrac{1}{x^2 - 1} - \dfrac{y}{x + 3}$ — $D(f) = \{[x, y] \in R;\ x \neq \pm 1 \wedge x \neq -3\}$

4. $z = \dfrac{\ln x}{x - y} - \dfrac{2}{x^2 + y^2}$ — $D(f) = \{[x, y] \in R;\ x \neq \mathrm{y} \wedge x \cdot y \neq 0\}$

5. $z = \dfrac{3 - y}{x^2 - y^2} - e^{x+y}$ — $D(f) = \{[x, y] \in R;\ |x| \neq |y|\}$

6. $z = \dfrac{1 + x - y^2}{x^2 + y^2 - 5}$ — $D(f) = \{[x, y] \in R;\ x^2 + y^2 \neq 5\}$

7. $z = \sqrt{y - x + 5}$ — $D(f) = \{[x, y] \in R;\ y \geq x - 5\}$

8. $z=\sqrt{y^2-x}$ $D(f)=\{[x,y]\in R;\ x\le y^2\}$

9. $z=\sqrt[4]{y^2-x^2}$ $D(f)=\{[x,y]\in R;\ |y|\ge |x|\}$

10. $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ $D(f)=\{[x,y]\in R;\ x^2+y^2\le 16\}$

11. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{x^2+5}$ $D(f)=\{[x,y]\in R;\ x^2+y^2\ge 1\}$

12. $z=\sqrt{x^2+y^2-4}+\sqrt{9-x^2-y^2}$ $D(f)=\{[x,y]\in R;\ 4\le x^2+y^2\le 9\}$

13. $z=\dfrac{xy}{\sqrt{x+y-2}}$ $D(f)=\{[x,y]\in R;\ y>2-x\}$

14. $z=\dfrac{y-xy^2}{\sqrt{x^2-y}}$ $D(f)=\{[x,y]\in R;\ y<x^2\}$

15. $z=\dfrac{e^{xy}}{\sqrt{x^2-16}}+\dfrac{\sqrt[3]{xy}}{x-4}$ $D(f)=\{[x,y]\in R;\ x\notin\langle -4,4\rangle\}$

16. $z=\ln(2+3xy)+e^{2x-y}$ $D(f)=\left\{[x,y]\in R;\ y>-\dfrac{2}{3x}\right\}$

17. $z=\ln(xy-4)+\dfrac{y}{x+2}$ $D(f)=\left\{[x,y]\in R;\ y>\dfrac{4}{x}\wedge x\ne -2\right\}$

18. $z=x\ln(12-x^2-y^2)$ $D(f)=\{[x,y]\in R;\ x^2+y^2<12\}$

19. $z=\ln(x^2+e^y)+\sqrt{y-x+1}$ $D(f)=\{[x,y]\in R;\ y\ge x-1\}$

20. $z=x\ln y-y\ln x+\sqrt{xy}$ $D(f)=\{[x,y]\in R;\ x>0\wedge y>0\}$

6.2 Parciálne derivácie funkcie dvoch premenných

Majme funkciu $z=f(x,y)$ definovanú v okolí bodu $A=[a_1,a_2]$.

Parciálnou deriváciou prvého rádu funkcie $z=f(x,y)$ podľa premennej x v bode A nazývame limitu $\lim\limits_{x\to a_1}\dfrac{f(x,a_2)-f(a_1,a_2)}{x-a_1}$, označujeme $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_A=\dfrac{\partial f(A)}{\partial x}=f'_x(A)=z'_x(A)$.

Parciálnou deriváciou prvého rádu funkcie $z=f(x,y)$ podľa premennej y v bode A nazývame limitu $\lim\limits_{y\to a_2}\dfrac{f(a_1,y)-f(a_1,a_2)}{y-a_2}$, označujeme $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_A=\dfrac{\partial f(A)}{\partial y}=f'_y(A)=z'_y(A)$.

- Pri počítaní parciálnej derivácie podľa premennej x, s premennou y pracujeme ako s konštantou. Funkciu dvoch premenných potom derivujeme ako funkciu s jednou premennou x.

- Pri počítaní parciálnej derivácie podľa premennej y, s premennou x pracujeme ako s konštantou. Funkciu dvoch premenných potom derivujeme ako funkciu s jednou premennou y.
- Pri derivovaní využívame vzorce pre derivácie elementárnych funkcií a všetky pravidlá derivovania ako pri funkcii jednej premennej.

Príklad 2 *Nájdime parciálne derivácie prvého rádu funkcie* $z = 3x^2 y + y + xye^{5y}$.

Riešenie: $z'_x = 3 \cdot 2x \cdot y + 0 + 1 \cdot ye^{5y} = 6xy + ye^{5y}$

$$z'_y = 3x^2 \cdot 1 + 1 + x \cdot (1 \cdot e^{5y} + y \cdot e^{5y} \cdot 5) = 3x^2 + x(e^{5y} + 5ye^{5y})$$

Príklad 3 *Nájdime parciálne derivácie druhého rádu funkcie* $z = 2x^3 - y^2 x + \ln(3xy)$.

Riešenie: Najprv nájdeme prvé parciálne derivácie prvého rádu podľa oboch premenných.

$$z'_x = 6x^2 - y^2 + \frac{1}{3xy} 3y = 6x^2 - y^2 + \frac{1}{x}$$

$$z'_y = -2yx + \frac{1}{3xy} 3x = -2yx + \frac{1}{y}$$

Prvé parciálne derivácie následne znova zderivujeme podľa oboch premenných.

$$(z'_x)'_x = z''_{xx} = (6x^2 - y^2 + \frac{1}{x})'_x = 12x - \frac{1}{x^2}$$

$$(z'_x)'_y = z''_{xy} = (6x^2 - y^2 + \frac{1}{x})'_y = -2y$$

$$(z'_y)'_x = z''_{yx}(-2yx + \frac{1}{y})'_x = -2y$$

$$(z'_y)'_y = z''_{yy} = (-2yx + \frac{1}{y})'_y = -2x - \frac{1}{y^2}$$

Príklad 4 *Nájdime parciálne derivácie prvého rádu funkcie* $z = xy\sin(2x + 3y)$ *v bode* $A = \left[\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

Riešenie: Najprv nájdeme prvé parciálne derivácie podľa oboch premenných.

$$z'_x = y\ \sin(2x + 3y) + 2xy\ \cos(2x + 3y)$$
$$z'_y = x\sin(2x + 3y) + 3xy\ \cos(2x + 3y)$$

Do získaných derivácií dosadíme súradnice bodu A.

$$[z'_x]_A = [y\sin(2x + 3y) + 2xy\ \cos(2x + 3y)]_A = 0 \cdot \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4} + 3 \cdot 0) + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0 \cdot \cos(2 \cdot \frac{\pi}{4} + 3 \cdot 0) = 0$$

$$\left[z'_y\right]_A = \left[x\sin(2x+3y)+3xy\,\cos(2x+3y)\right]_A = \frac{\pi}{4}\cdot\sin(2\cdot\frac{\pi}{4}+3\cdot 0)+3\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 0\cdot\cos(2\cdot\frac{\pi}{4}+3\cdot 0) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Príklad 5 *Nájdime rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie* $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ *v bode* $A = [1, 1, ?]$.

Riešenie: Nech je funkcia z spojitá a diferencovateľná v okolí bodu $A = [x_0, y_0, z_0]$. Potom rovnica dotykovej roviny ρ ku grafu tejto funkcie v bode A je:

$$\rho: \quad z - z_0 = z'_x(A)(x - x_0) + z'_y(A)(y - y_0)$$

a rovnica normály n ku grafu tejto funkcie v bode A je:

$$n: \quad \begin{aligned} x &= x_0 + z'_x(A)\cdot t \\ y &= y_0 + z'_y(A)\cdot t \\ z &= z_0 - t\,, \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Hodnoty parciálnych derivácií v bode $A = [1, 1, z_0] = \left[1, 1, \operatorname{arctg}\dfrac{y_0}{x_0}\right] = \left[1, 1, \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1}\right] = \left[1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

sú:

$$\left[z'_x\right]_A = \left[\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]_A = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1}\right)^2}\left(-\frac{1}{1^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\left[z'_y\right]_A = \left[\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)\right]_A = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1}\right)^2}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}$$

Rovnica dotykovej roviny je: $\rho: \quad z - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{2}(y-1)$, po úprave $x - y + 2z - \dfrac{\pi}{2} = 0$.

Rovnica normály je:

$$n: \quad \begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{2}t \\ y &= 1 + \frac{1}{2}t \\ z &= \frac{\pi}{4} - t\,, \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

alebo po úprave

$$n: \quad \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 1 + t \\ z &= \frac{\pi}{4} - 2t\,, \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

V úlohách 1 – 30 určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie.

Výsledky:

1. $z = 2x^2 + 4y^3 - 15x^2 y + xy^3$

$z'_x = 4x - 30xy + y^3$

$z'_y = 12y^2 - 15x^2 + 3xy^2$

2. $z = 5x \ln y - 2y \ln x + \sqrt{xy}$

$z'_x = 5\ln y - \dfrac{2y}{x} + \dfrac{y}{2\sqrt{xy}}$

$z'_y = \dfrac{5x}{y} - 2\ln x + \dfrac{x}{2\sqrt{xy}}$

3. $z = 2y^3 x^2 (5^y + 3xy)$

$z'_x = 4y^3 x(5^y + 3xy) + 6y^4 x^2$

$z'_y = 6y^2 x^2 (5^y + 3xy) + 2y^3 x^2 (5^y \ln 5 + 3x)$

4. $z = (-\cos x + 2\ln y)(\operatorname{tg} y + 3e^{5x})$

$z'_x = \sin x(\operatorname{tg} y + 3e^{5x}) + (-\cos x + 2\ln y)15e^{5x}$

$z'_y = \dfrac{2}{y}(\operatorname{tg} y + 3e^{5x}) + (-\cos x + 2\ln y)\dfrac{1}{\cos^2 y}$

5. $z = (2x + 5y)\sin 3x$

$z'_x = 2\sin 3x + 3(2x + 5y)\cos 3x$

$z'_y = 5\sin 3x$

6. $z = \dfrac{x + y}{3 - x}$

$z'_x = \dfrac{y + 3}{(3 - x)^2}$

$z'_y = \dfrac{1}{3 - x}$

7. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

$z'_x = \dfrac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$

$z'_y = \dfrac{-4x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$

8. $z = \dfrac{2y - x^2}{x + 7} - \dfrac{e^x}{y - 1}$

$z'_x = \dfrac{-2y - x^2 - 14x}{(x + 7)^2} - \dfrac{e^x}{y - 1}$

$z'_y = \dfrac{2}{x + 7} + \dfrac{e^x}{(y - 1)^2}$

9. $z = \dfrac{1}{x^2 - 1} + \dfrac{y}{x + 3}$

$z'_x = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2} - \dfrac{y}{(x + 3)^2}$

$z'_y = \dfrac{1}{x + 3}$

10. $z = \dfrac{\ln x}{x-y} + \dfrac{2}{x^2+y^2}$

$$z'_x = \frac{1-\frac{y}{x}-\ln x}{(x-y)^2} - \frac{4x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z'_y = \frac{\ln x}{(x-y)^2} - \frac{4y}{(x^2+y^2)^2}$$

11. $z = \dfrac{3-y}{x^2-y^2} + e^{2x+3y}$

$$z'_x = \frac{2x(y-3)}{(x^2-y^2)^2} + 2e^{2x+3y}$$

$$z'_y = -\frac{x^2+y^2-6y}{(x^2-y^2)^2} + 3e^{2x+3y}$$

12. $z = \dfrac{1+x-y^2}{x^2+y^2-5}$

$$z'_x = \frac{-x^2+y^2-2x+2xy^2-5}{(x^2+y^2-5)^2}$$

$$z'_y = \frac{-2yx^2+8y-2xy}{(x^2+y^2-5)^2}$$

13. $z = \sqrt{4y-7x+5}$

$$z'_x = \frac{-7}{2\sqrt{4y-7x+5}}$$

$$z'_y = \frac{2}{\sqrt{4y-7x+5}}$$

14. $z = \sqrt{3y^2+8x-2}$

$$z'_x = \frac{4}{\sqrt{3y^2+8x-2}}$$

$$z'_y = \frac{3y}{\sqrt{3y^2+8x-2}}$$

15. $z = \sqrt{16-4y^2+7x^3}$

$$z'_x = \frac{21x^2}{2\sqrt{16-4y^2+7x^3}}$$

$$z'_y = \frac{-4y}{\sqrt{16-4y^2+7x^3}}$$

16. $z = \sqrt[3]{16+4y^2-7x^3}$

$$z'_x = \frac{-21x^2}{3\sqrt[3]{(16+4y^2-7x^3)^2}}$$

$$z'_y = \frac{8y}{3\sqrt[3]{(16+4y^2-7x^3)^2}}$$

17. $z = \sqrt[4]{(3y + 8x^5 - 2xy)^3}$

$$z'_x = \frac{6(20x^4 - y)}{4\sqrt[4]{3y + 8x^5 - 2xy}}$$

$$z'_y = \frac{3(3 - 2x)}{4\sqrt[4]{3y + 8x^5 - 2xy}}$$

18. $z = \ln\left(y^2 - 4x + 8\right)$

$$z'_x = \frac{-4}{y^2 - 4x + 8}$$

$$z'_y = \frac{2y}{y^2 - 4x + 8}$$

19. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2 + y^2}{9}$

$$z'_x = \frac{18x}{81 + (x^2 + y^2)^2}$$

$$z'_y = \frac{18y}{81 + (x^2 + y^2)^2}$$

20. $z = \ln(2 + 3xy) + e^{2x - y}$

$$z'_x = \frac{3y}{2 + 3xy} + 2e^{2x - y}$$

$$z'_y = \frac{3x}{2 + 3xy} - e^{2x - y}$$

21. $z = \ln(xy - 4) + \dfrac{y}{x + 2}$

$$z'_x = \frac{y}{xy - 4} - \frac{y}{(x + 2)^2}$$

$$z'_y = \frac{x}{xy - 4} + \frac{1}{x + 2}$$

22. $z = x\ln(12 - xy - x^2y^2)$

$$z'_x = \ln(12 - xy - x^2y^2) + \frac{-xy - 2x^2y^2}{12 - xy - x^2y^2}$$

$$z'_y = \frac{-x^2 - 2yx^3}{12 - xy - x^2y^2}$$

23. $z = (4x^2 + 2y)\sin xy$

$$z'_x = 8x\sin xy + (4x^2y + 2y^2)\cos xy$$

$$z'_y = 2\sin xy + (4x^3 + 2yx)\cos xy$$

24. $z = 3xye^{5x - 4y}$

$$z'_x = 3y(1 + 5x)e^{5x - 4y}$$

$$z'_y = 3x(1 - 4y)e^{5x - 4y}$$

25. $z = (2x - y^3)e^{xy}$

$$z'_x = (2 + 2xy - y^4)e^{xy}$$

$$z'_x = (-3y^2 + 2x^2 - xy^3)e^{xy}$$

26. $z = \dfrac{y - xy^2}{\sqrt{x^2 - y}}$

$$z'_x = \frac{y^3 - xy}{(x^2 - y)\sqrt{x^2 - y}}$$
$$z'_y = \frac{3xy^2 + 2x^2 - y - 4x^3 y}{2(x^2 - y)\sqrt{x^2 - y}}$$

27. $z = \dfrac{e^{xy}}{\sqrt{x^2 - 16}}$

$$z'_x = \frac{e^{xy}(yx^2 - 16y - x)}{(x^2 - 16)\sqrt{x^2 - 16}}$$
$$z'_y = \frac{xe^{xy}}{\sqrt{x^2 - 16}}$$

28. $z = e^{\frac{x}{y}} + x^y + y^x$

$$z'_x = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} + yx^{y-1} + y^x \ln y$$
$$z'_y = \frac{-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + x^y \ln x + xy^{x-1}$$

29. $z = \operatorname{cotg} \dfrac{x - y}{x + y}$

$$z'_x = -\frac{2y}{(x+y)^2 \sin^2 \frac{x-y}{x+y}}$$
$$z'_y = \frac{2x}{(x+y)^2 \sin^2 \frac{x-y}{x+y}}$$

30. $z = \sqrt{x \sin y} + \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{y}$

$$z'_x = \frac{\sin y}{2\sqrt{x \sin y}} + \frac{1}{y \sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}}$$
$$z'_y = \frac{x \cos y}{2\sqrt{x \sin y}} - \frac{x}{y^2 \sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}}$$

V úlohách 1 – 6 určte rovnicu dotykovej roviny ρ a normály n ku grafu funkcie $z = f(x, y)$ v bode A.

Výsledky:

31. $z = 2x^2 - 4y^2, \quad A = [2,1,?]$

$\rho : 8x - 8y - z - 4 = 0$
$n : x = 2 + 8t,\ y = 1 - 8t,\ z = 4 - t, \quad t \in \mathbf{R}$

32. $z = (y - x - 2)^2, \quad A = [1,1,?]$

$\rho : 4x - 4y - z + 4 = 0$
$n : x = 1 + 4t,\ y = 1 - 4t,\ z = 4 - t, \quad t \in \mathbf{R}$

33. $z = \sqrt{14 - x^2 - y^2}, \quad A = [3,1,?]$

$\rho : 3x + y + 2z - 14 = 0$
$n : x = 3 + 3t,\ y = 1 + t,\ z = 2 + 2t, \quad t \in \mathbf{R}$

34. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad A = [3, 4, ?]$

$\rho: 3x + 4y - 5z = 0$
$n: x = 3 + 3t,\ y = 4 + 4t,\ z = 5 - 5t, \quad t \in \mathbf{R}$

35. $z = \sin\frac{x}{y}, \quad A = [\pi, 1, ?]$

$\rho: x - \pi y + z = 0$
$n: x = \pi + t,\ y = 1 - \pi t,\ z = t, \quad t \in \mathbf{R}$

36. $z = e^{2y} \sin x, \quad A = [\frac{\pi}{4}, 0, ?]$

$\rho: \sqrt{2}\, x + 2\sqrt{2}\, y - 2z + \sqrt{2}(1 - \frac{\pi}{4}) = 0$
$n: x = \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\, t,\ y = 2\sqrt{2}\, t,$
$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2t, \quad t \in \mathbf{R}$

6.3 Lokálne extrémy funkcie dvoch premenných

Hovoríme, že funkcia $z = f(x, y)$ má v bode $A = [a_1, a_2]$ ***lokálne maximum***, ak pre každý bod X, $X \neq A$ z okolia bodu A platí $f(X) \leq f(A)$.

Hovoríme, že funkcia $z = f(x, y)$ má v bode $A = [a_1, a_2]$ ***lokálne minimum***, ak pre každý bod X, $X \neq A$ z okolia bodu A platí $f(X) \geq f(A)$.

Bod, v ktorom parciálne derivácie prvého rádu sú rovné nule, nazývame ***stacionárny bod.***

Stacionárne body a body, v ktorých parciálne derivácie prvého rádu neexistujú, sa nazývajú ***kritické body.***

Funkcia môže mať lokálny extrém len v kritickom bode.

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému:

Nech bod A je stacionárnym bodom funkcie $z = f(x, y)$ a nech má funkcia v okolí bodu A spojité parciálne derivácie prvého a druhého rádu. Nech determinant

$$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} z''_{xx}(A) & z''_{xy}(A) \\ z''_{yx}(A) & z''_{yy}(A) \end{vmatrix} > 0.$$

Potom, ak $\Delta_1(A) = z''_{xx}(A) \neq 0$, má funkcia $z = f(x, y)$ v bode A lokálny extrém, a to

- ***lokálne minimum***, ak súčasne platí $\Delta_1(A) = z''_{xx}(A) > 0$,
- ***lokálne maximum***, ak súčasne platí $\Delta_1(A) = z''_{xx}(A) < 0$.

Ak $\Delta_2(A) < 0$, tak funkcia $z = f(x, y)$ nemá v bode A extrém (bod A sa nazýva sedlový bod).
Ak $\Delta_2(A) = 0$, tak o lokálnom extréme pomocou uvedenej vety nevieme rozhodnúť.

Príklad 6 *Nájdime lokálne extrémy funkcie* $z = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$.

Riešenie: K určeniu stacionárnych bodov potrebujeme nájsť parciálne derivácie prvého rádu funkcie.

$$z'_x = 6x^2 + 6x - 12$$
$$z'_y = 3y^2 - 3.$$

Stacionárne body nájdeme riešením sústavy rovníc

$$\begin{matrix} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 6x^2 + 6x - 12 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{matrix}.$$

Stacionárne body sú $A = [1,1], B = [1,-1], C = [-2,1], D = [-2,-1]$.

Súradnice stacionárnych bodov dosadíme do parciálnych derivácií druhého rádu funkcie.

$$\begin{array}{llll} z''_{xx} = (6x^2 + 6x - 12)'_x = 12x + 6 & z''_{xx}(A) = 18 & z''_{xx}(B) = 18 & z''_{xx}(C) = -18 \\ z''_{xy} = (6x^2 + 6x - 12)'_y = 0 & z''_{xy}(A) = 0 & z''_{xy}(B) = 0 & z''_{xy}(C) = 0 \\ z''_{yx} = (3y^2 - 3)'_x = 0 & z''_{yx}(A) = 0 & z''_{yx}(B) = 0 & z''_{yx}(C) = 0 \\ z''_{yy} = (3y^2 - 3)'_y = 6y & z''_{yy}(A) = 6 & z''_{yy}(B) = -6 & z''_{yy}(C) = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z''_{xx}(D) = -18 \\ z''_{xy}(D) = 0 \\ z''_{yx}(D) = 0 \\ z''_{yy}(D) = -6 \end{array}$$

Pre stacionárny bod A platí $\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 108 > 0 \wedge \Delta_1(A) = 18 > 0 \Rightarrow$ v bode A je lokálne minimum.

Pre stacionárny bod B platí $\Delta_2(B) = \begin{vmatrix} 18 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -108 < 0 \Rightarrow$ v bode B nie je extrém, bod B je sedlový bod.

Pre stacionárny bod C platí $\Delta_2(C) = \begin{vmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -108 < 0 \Rightarrow$ v bode C nie je extrém, bod C je sedlový bod.

Pre stacionárny bod D platí $\Delta_2(D) = \begin{vmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 108 > 0 \wedge \Delta_1(D) = -18 < 0 \Rightarrow$ v bode D je lokálne maximum.

V úlohách 1 – 57 nájdite lokálne extrémy funkcie.

		Výsledky:
1.	$z = 4 - x^2 - y^2$	lok. max. v [0,0]
2.	$z = -x^2 - y^2 + 10$	lok. max. v [0,0]
3.	$z = x^2 + y^2 - 2$	lok. min. v [0,0]
4.	$z = 5 + x^2 + y^2$	lok. min. v [0,0]
5.	$z = 2 - x^2 - y^2 - 4x$	lok. max. v [–2,0]
6.	$z = 8 - x^2 - y^2 + 6y$	lok. max. v [0,3]
7.	$z = 3 + x^2 + y^2 - 2x$	lok. min. v [1,0]
8.	$z = x^2 + y^2 + 10y - 5$	lok. min. v [0,– 5]
9.	$z = 1 - x^2 - y^2 + 6x + 2y$	lok. max. v [3,1]
10.	$z = x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8$	lok. min. v [2,– 2]
11.	$z = x^2 - y^2 + 2x - 2y - 1$	nemá extrém
12.	$z = y^2 - x^2 + 3x - 5y + 4$	nemá extrém
13.	$z = (x-1)^2 + 4y^2$	lok. min. v [1,0]
14.	$z = x^2 + (y+3)^2 - 3$	lok. min. v [0,– 3]
15.	$z = (x-2)^2 + (y+1)^2 + 4$	lok. min. v [2,–1]
16.	$z = 8 - (x+2)^2 - y^2$	lok. max. v [–2,0]
17.	$z = -x^2 - (y-4)^2 - 2$	lok. max. v [0,4]
18.	$z = 7 - (x+1)^2 - (y-2)^2$	lok. max. v [–1,2]
19.	$z = x^2 + y^2 + xy + 5x - 5y + 3$	lok. min. v [–5,5]
20.	$z = x^2 + y^2 + xy - 4y + 10x - 2$	lok. min. v [–8,6]
21.	$z = x^2 + y^2 - 4xy - 6y$	nemá extrém
22.	$z = x^2 + y^2 + 6xy + 16x$	nemá extrém
23.	$z = 24 - x^2 - y^2 + xy + 36y$	lok. max. v [12,24]
24.	$z = 46 - x^2 - 4y^2 + 2xy$	lok. max. v [0,0]
25.	$z = x^2 + 10y^2 + 5xy + 8x - 40y$	lok. min. v [–24,8]
26.	$z = x^3 + y^3 - 18xy + 2$	lok. min. v [6,6]

27.	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy - 4$	lok. min. v $[1, \frac{1}{2}]$
28.	$z = x^3 + y^3 + 3xy + 2$	lok. max. v $[-1, -1]$
29.	$z = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$	lok. min. v $[4, \frac{19}{2}]$
30.	$z = x^3 + y^3 + 3x^2 y - y$	lok. min. v $[0, \frac{\sqrt{3}}{3}]$
		lok. max. v $[0, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$
31.	$z = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 12x - 3y + 1$	lok. min. v $[1,1]$
		lok. max. v $[-2, -1]$
32.	$z = -x^3 - 8y^3 + 6xy + 12$	lok. max. v $[1, \frac{1}{2}]$
33.	$z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$	lok. min. v $[1,1]$
34.	$z = -x^3 + y^3 + 9xy - 10$	lok. min. v $[-3,3]$
35.	$z = -2x^3 + 2y^3 + 6xy + 48$	lok. min. v $[-1,1]$
36.	$z = -2x^3 + 2y^3 + 3xy - 5$	lok. min. v $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
37.	$z = 3x^3 + 3y^3 + 9xy + 48$	lok. max. v $[-1,1]$
38.	$z = y^3 + 3x^2 y - 18x - 30y$	lok. min. v $[1,3]$
		lok. max. v $[-1, -3]$
39.	$z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$	lok. min. v $[4,1]$
		lok. max. v $[-4, -1]$
40.	$z = 2x^3 + y^2 x - 216x + 5$	lok. min. v $[6,0]$
		lok. max. v $[-6,0]$
41.	$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$	lok. min. v $[\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ a $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
42.	$z = x^4 + 2y^2 + 4xy$	lok. min. v $[1, -1]$ a $[-1,1]$
43.	$z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$	lok. min. v $[\frac{1}{2}, -1]$
44.	$z = e^{2y}(x^2 + 4x + 2y)$	lok. min. v $[-2, \frac{3}{2}]$

45. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ lok. min. v $[-2,0]$

46. $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$ lok. max. v $[-4,-2]$

47. $z = e^{x+y}(x^2 + y + 1)$ lok. min. v $[\frac{1}{2},-\frac{9}{4}]$

48. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ lok. max. v $[4,4]$

49. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 2$ lok. min. v $[2,4]$

50. $z = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}$ lok. min. v $[\frac{5}{2},\frac{4}{5}]$

51. $z = xy - \frac{2}{x} - \frac{4}{y}$ lok. min. v $[-1,-2]$

52. $z = x + y + \frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ lok. min. v $[1,2]$

lok. max. v $[-1,-2]$

53. $z = y + \frac{8}{x} + \frac{x}{y}$ lok. min. v $[4,2]$

54. $z = xy + \ln x + y^2$ nemá extrém

55. $z = 2x^2 + y^2 - \ln(xy^2)$ lok. min. v $[\frac{1}{2},1]$ a $[\frac{1}{2},-1]$

56. $z = 3\log\frac{x}{6} + 2\log y + \log(12 - x - y)$ lok. max. v $[6,4]$

57. $z = 2\ln\frac{x}{4} + \ln\frac{y}{2} + \ln(16 - x - y)$ lok. max. v $[8,4]$

6.4 Viazané extrémy funkcie dvoch premenných

Nech funkcia $z = f(x,y)$ je definovaná na množine M a množinu L nech tvoria všetky body z M, ktoré vyhovujú rovnici $g(x,y) = 0$. Lokálne extrémy funkcie $z = f(x,y)$ na množine L nazývame ***viazanými lokálnymi extrémami*** a podmienku $g(x,y) = 0$, ktorá určuje množinu L, nazývame ***väzbou.***

Pri hľadaní viazaných extrémov môžu nastať dva prípady:

- ak sa z väzby $g(x,y) = 0$ dá jednoznačne vyjadriť niektorá premenná, dosadíme ju do funkcie $z = f(x,y)$, dostaneme funkciu jednej premennej a viazaný extrém danej funkcie hľadáme ako lokálny extrém funkcie jednej premennej,

- ak sa z väzby $g(x,y)=0$ nedá jednoznačne vyjadriť žiadna premenná, zostrojíme ***Lagrangeovu funkciu***

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y),\quad \lambda\in \mathrm{R}.$$

Stacionárne body Lagrangeovej funkcie nájdeme riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} L'_x &= 0 \\ L'_y &= 0 \\ g(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Závery pre existenciu viazaného lokálneho extrému sú rovnaké ako pri lokálnych extrémoch.

Avšak, ak Lagrangeova funkcia nemá lokálny extrém, o existencii viazaného extrému funkcie $z=f(x,y)$ nevieme povedať nič. V takomto prípade musíme viazaný extrém funkcie $z=f(x,y)$ hľadať iným spôsobom.

Ak Lagrangeova funkcia $L(x,y)$ má extrém, tak tento extrém je extrémom aj pre funkciu $z=f(x,y)$ (naopak to neplatí).

Príklad 1 *Nájdime viazané extrémy funkcie* $z=3+x^2+y^2-2x$ *s väzbou* $2x-y=3$.

Riešenie: Z funkcie $g(x,y)=0$ $(2x-y-3=0)$ predstavujúcej väzbu, môžeme jednoznačne vyjadriť ktorúkoľvek premennú, napríklad $y=2x-3$. Takto vyjadrenú premennú dosadíme do funkcie a získame funkciu s jednou premennou

$$z=3+x^2+(2x-3)^2-2x=5x^2-14x+12.$$

Vypočítame prvú deriváciu

$$z'=10x-14$$

položíme ju rovnú nule a nájdeme stacionárne body.

$$10x-14=0.$$

Riešením rovnice dostaneme x-ovú súradnicu stacionárneho bodu, y-ovú súradnicu stacionárneho bodu dostaneme z väzby. Stacionárny bod je $A=[\frac{7}{5},-\frac{1}{5}]$.

Potom určíme hodnotu druhej derivácie funkcie v bode A.

$$z''=10>0$$

Pretože druhá derivácia je konštantná a kladná, funkcia $z=3+x^2+y^2-2x$ s väzbou $2x-y=3$ má v stacionárnom bode $A=[\frac{7}{5},-\frac{1}{5}]$ viazané lokálne minimum.

Príklad 2 *Nájdime viazané extrémy funkcie* $z = x + 2y$ *, ak* $x^2 + y^2 = 5$.

Riešenie: Z funkcie $g(x, y) = 0$ ($x^2 + y^2 - 5 = 0$) predstavujúcej väzbu, nemôžeme jednoznačne vyjadriť žiadnu z dvoch premenných, zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(x, y) = x + 2y + \lambda.(x^2 + y^2 - 5),\ \lambda \in R$$

a pomocou prvých parciálnych derivácií hľadáme jej stacionárne body.

$$L'_x = 1 + 2\lambda x$$
$$L'_y = 2 + 2\lambda y$$

Riešime sústavu rovníc

$$\begin{array}{ccc} L'_x = 0 & & 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 0 & \rightarrow & 2 + 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) = 0 & & x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{array}$$

Ak z prvej rovnice vyjadríme *x*, z druhej *y* a dosadíme ich do tretej rovnice, dostaneme

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 5 = 0\ .$$

Riešením danej rovnice dostaneme $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ a určíme stacionárne body.

Pre $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ je $A = [-1,-2]$, pre $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ je $B = [1,2]$.

Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu a určíme ich hodnoty v stacionárnych bodoch.

$$\begin{array}{lll} L''_{xx} = 2\lambda & L''_{xx}(A) = 1 & L''_{xx}(B) = -1 \\ L''_{xy} = 0 & L''_{xy}(A) = 0 & L''_{xy}(B) = 0 \\ L''_{yx} = 0 & L''_{yx}(A) = 0 & L''_{yx}(B) = 0 \\ L''_{yy} = 2\lambda & L''_{yy}(A) = 1 & L''_{yy}(B) = -1 \end{array}$$

Pre stacionárny bod *A* dostávame: $D_2(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad \wedge \quad D_1(A) = 1 > 0 \quad \Rightarrow$ v bode *A* je viazané lokálne minimum.

Pre stacionárny bod *B* dostávame: $D_2(B) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad \wedge \quad D_1(B) = -1 < 0 \quad \Rightarrow$ v bode *B* je viazané lokálne maximum.

V úlohách 1 – 31 nájdite viazané extrémy funkcie.

Výsledky:

1.	$z = xy$, ak $x + y = 1$	lok. max. v $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
2.	$z = e^{xy}$, ak $x + y = 2$	lok. min. v [1,1]
3.	$z = 4 - x^2 - y^2$, ak $x + y = 0$	lok. max. v [0,0]
4.	$z = 3 + x^2 + y^2 - 2x$, ak $x - y = 1$	lok. min. v [1,0]
5.	$z = x^2 + y^2 + 4y + 1$, ak $x - y = 2$	lok. min. v $[0,-2]$
6.	$z = 4 - x^2 - y^2 - 2x$, ak $y - x = 1$	lok. max. v $[-1,0]$
7.	$z = x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8$, ak $x + y = 0$	lok. min. v $[2,-2]$
8.	$z = 1 - x^2 - y^2 + 6x + 2y$, ak $x - 3y = 0$	lok. max. v [3,1]
9.	$z = x^2 + y^2 + xy + 5x - 5y + 3$, ak $y - x = 10$	lok. min. v $[-5,5]$
10.	$z = 46 - x^2 - 4y^2 + 2xy$, ak $x - 2y = 0$	lok. max. v [0,0]
11.	$z = x^3 + y^3 - 18xy + 2$, ak $x - y = 0$	lok. min. v [6,6]
		lok. max. v [0,0]
12.	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$, ak $2y - x = 0$	lok. min. v $[1, \frac{1}{2}]$
		lok. max. v [0,0]
13.	$z = x^3 + y^3 + 3xy + 2$, ak $y - x = 0$	lok. max. v $[-1,-1]$
		lok. min. v [0,0]
14.	$z = x^3 + y^3 + xy$, ak $y + x = 4$	lok. min. v [2,2]
15.	$z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$, ak $x + 2y = 8$	lok. max. v $[3, \frac{5}{2}]$
16.	$z = 2x^2 + y^2 - xy$, ak $2x + y = 8$	lok. min. v $[\frac{5}{2}, 3]$

17. $z = x^3 + y^3 + 2x^2y - 3y$, ak $x - y = 0$ lok. min. v $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

lok. max. v $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$

18. $z = -x^3 - 7y^3 + 6xy + 12$ ak $x + y = 0$ lok. min. v $[\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$

lok. max. v $[0,0]$

19. $z = x^4 + 2y^2 + 4xy$, ak $y - x = 0$ lok. min. v $[0,0]$

20. $z = x^4 + 2y^2 + 4xy$, ak $y + x = 0$ lok. min. v $[-1,1]$ a $[1,-1]$

lok. max. v $[0,0]$

21. $z = x + 2y$, ak $x^2 + y^2 = 5$ lok. max. v $[1,2]$

lok. min. v $[-1,-2]$

22. $z = 8 - 2x - 4y$, ak $x^2 + 2y^2 = 12$ lok. min. v $[2,2]$

lok. max. v $[-2,-2]$

23. $z = 16 - 10x - 24y$, ak $x^2 + y^2 = 169$ lok. min. v $[5,12]$

lok. max. v $[-5,-12]$

24. $z = x - 2y + 3$, ak $x^2 + y^2 = 5$ lok. min. v $[-1,2]$

lok. max. v $[1,-2]$

25. $z = y - x + 3$, ak $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ lok. min. v $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$

lok. max. v $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

26. $z = x + y$, ak $x^2 + y^2 = 1$ — lok. min. v $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$

lok. max. v $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

27. $z = x + 3y$, ak $x^2 + y^2 = 10$ — lok. min. v $[-1, -3]$

lok. max. v $[1,3]$

28. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, ak $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2$ — lok. min. v $[-1, -1]$

lok. max. v $[1,1]$

29. $z = x + y$, ak $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2$ — lok. min. v $[1,1]$

lok. max. v $[-1, -1]$

30. $z = -3 + 2x + 4y$, ak $2x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ — lok. min. v $[-\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}]$

lok. max. v $[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}]$

31. $z = 5 - 6x - 4y$, ak $3x^2 + 2y^2 = 5$ — lok. min. v $[1,1]$

lok. max. v $[-1, -1]$

POUŽITÁ LITERATÚRA

[1] *Demidovič, B. P.*: **Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu**, Nauka, Moskva, 1977.

[2] *Džurina, J. - Grinčová, A. - Pirč, V.*: **Matematická analýza 1,** ISBN 80-8073-307-4. Názov www stránky: http://217.67.26.34/active_download/ma1/ulern_viewer.htm

[3] *Eliaš, J. - Horváth, J. - Kajan, J.*: **Zbierka úloh z vyššej matematiky 1**, ALFA, Bratislava 1968, ISBN 63-066-68.

[4] *Eliaš, J. - Horváth, J. - Kajan, J.*: **Zbierka úloh z vyššej matematiky 2**, ALFA, Bratislava 1969, ISBN 63-037-69.

[5] *Ivan, J.*: **Matematika 1**, ALFA/SNTL, Bratislava 1983.

[6] *Jirásek, F. - Kriegelstein, E. - Tichý, Z.*: **Sbírka řešených přikladů z matematiky**, SNTL/ALFA, Praha 1982.

[7] *Kluvánek, I. - Mišík, L. - Švec, M.*: **Matematika I**, SVTL, Bratislava 1966.

[8] *Marčoková, M. - Moravčík, J. - Ružičková, M.*: **Matematika IV**, Žilinská univerzita, EDIS - vydavateľstvo ŽU, 2000, ISBN 80-7100-697-1.

[9] *Molnárová, M. - Myšková, H.:* **Úvod do lineárnej algebry**, TU, Košice, 2005, ISBN 80-8073-361-9.

[10] *Pirč, V. - Haščák, A.*: **Matematická analýza I**, elfa s.r.o. Košice 2000, ISBN 80-88786-92-4.

[11] *Šoltés, V. - Juhásová, Z.*: **Zbierka úloh z vyššej matematiky I**, Edičné stredisko TU v Košiciach 1992.

NÁZOV: Matematika II - FEI
AUTOR: Baculíková Blanka, Grinčová Anna
VYDAVATEĽ: Technická univerzita v Košiciach
ROK: 2022
VYDANIE: prvé
ROZSAH: 96 strán
ISBN

ISBN

ISBN