Matematika 2 – 5.cvičenie

opakujúci

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Neurčitý integrál

Neurčitý integrál – píšeme

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

$F(x)$ – primitívna funkcia, c – integračná konštanta

Platí: $F'(x) = f(x)$ **, integrál je opačná operácia k derivácií**

$$(x^2+1)' = 2x \quad \leftrightarrow \int 2x\, \mathrm{d}x = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$$

Vzťahy:

integrál zo súčinu konštanty k, kde k je reálne číslo, a funkcie $f(x)$ je

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx = k\, F(x) + c,$$

integrál zo súčtu (rozdielu) funkcií $f(x)$ a $g(x)$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + c.$$

Základné vzorce:

- $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} \, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + c$

$\int 1 \, dx = x + c$

Pr. 1: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{8}{1 - x^2} + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) \mathrm{d}x$$

Pr. 2 – 24 / 41 + 46: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{1}{x(4 + \ln x)} + \frac{x}{x^2 - 3} \right) \mathrm{d}x$$

Pr. 3: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2} + \frac{3x^2}{x^3 + 1} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{(x + 2)(x - 4)}{x + 2} + \frac{3x^2}{x^3 + 1} \right) \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$= \int (x - 4)\, \mathrm{d}x + \int \frac{3x^2}{x^3 + 1} \mathrm{d}x$$

$$(x^3 + 1)' = 3x^2 = f'(x)$$

$$f(x) = x^3 + 1$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \ln|x^3 + 1| + C$$

Pr. 4 - 24 / 38: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \frac{5}{8x^2 - 32}\, dx$$

Pr. 5 - 24 / 37: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \frac{dx}{4-2x^2}$$

$$\int \frac{1}{2(2-x^2)}\,\mathrm{d}x = \quad \frac{1}{2}\int \frac{1}{2-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$2 = a^2 \rightarrow \sqrt{2} = a$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}\,\mathbf{ln}\left|\frac{\sqrt{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{2}}-\boldsymbol{x}}\right| + \boldsymbol{C}$$

Pr. 6 – 24 / 42 + 45: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{1}{x.\ln x} + \frac{x^2}{x^3+1} \right) \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln x} + \frac{3x^2}{3(x^3+1)} \right) \mathrm{d}x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} = f'(x)$$

$$f(x) = \ln x$$

$$= \ln|\ln x| + \frac{1}{3}\ln\left|x^3 + 1\right| + C$$

$$(x^3+1)' = 3x^2 = f'(x)$$

$$f(x) = x^3 + 1$$

$$\frac{1}{x.\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\ln x}{1}} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

Dú: Mat 2 – str. 21 / 6, 8, 10, 11, 14, 17, 18, 21, 24, 28, 33, 39, 41, 43, 44, 50

Substitučná metóda riešenia neurčitých integrálov

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int f(t)\mathrm{d}t$$

substitúcia

Postup pri riešení:

1. Nájdeme v integráli zloženú funkciu $f(\varphi(x))$ a deriváciu jej vnútornej funkcie $\varphi'(x)\mathrm{d}x$.
2. Zavedieme substitúciu za $\varphi(x) = t$ a $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.
3. Integrál s novou premennou ***t*** integrujeme podľa pravidiel a vzorcov pre integrovanie.
4. Vo výsledku integrálu nahradíme ***t*** pôvodným výrazom, za ktorý bola zavedená substitúcia.

Príklady zložených funkcií:

V zloženej funkcii je namiesto *x* uvedená funkcia f(*x*).

Jednoduchá funkcia	Zložená funkcia
x^3	$(5x+8)^3$
e^x	$e^{\sqrt{x+1}}$
$\sin x$	$\sin(5x^2)$
$\ln x$	$\ln(\ln x+5)$
$\sqrt{x}$	$\sqrt{\cos x+2x}$

Pr. 1 – 27 / 9:

$$\int 2x(x^2+2)^3\,dx$$

Pr. 2 – 27 / 15: $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,dx$

1. Nájdeme v integráli zloženú funkciu $f(\varphi(x))$, jej vnútornú funkciu $\varphi(x)$

Zložená funkcia: $f(\varphi(x)) = \sqrt[3]{x^2-2}$
Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = x^2 - 2$

2. Zavedieme substitúciu za $\varphi(x) = t$ a $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

$$\left| \begin{aligned} \varphi(x) = x^2 - 2 &= t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = 2x\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{aligned} \right|$$

Poznámka: V integráli sa musí nachádzať derivácia vnútornej funkcie $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ (alebo jej časť, napr. namiesto $2x\mathrm{d}x$ bude v integráli len $x\mathrm{d}x$)

3. Upravíme integrál pomocou substitúcie na integrál s novou premennou *t*, ktorý integrujeme podľa pravidiel a vzorcov pre integrovanie

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{t^2} + C$$

4. Vo výsledku integrálu nahradíme *t* pôvodným výrazom, za ktorý bola zavedená substitúcia

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\sqrt[3]{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}} + \boldsymbol{C}$$

Pr. 3 – 27 / 11:

$$\int x \cdot \sqrt{x^2+5}\, dx$$

Zložená funkcia: $f(\varphi(x)) = \sqrt{x^2+5}$
Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = x^2 + 5$

$$\sqrt[k]{x^n} = x^{\frac{n}{k}}$$

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + 5 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2} \end{array} \right|$$

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int x.\sqrt{x^2+5}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x^2+5}\; x.\mathrm{d}x = \int \sqrt{t}\frac{\mathrm{d}t}{2} = \int \sqrt{t}\,\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{t^3}}{3} + C = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\sqrt{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{5})^{\mathbf{3}}} + \boldsymbol{C}$$

Pr. 4 – 30 / 61:

$$\int e^{x^2+4x+5}(x+2)dx$$

Zložená funkcia: $\mathrm{f}(\varphi(x)) = e^{x^2+4x+5}$
Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = x^2 + 4x + 5$

$$\left| \begin{aligned} \varphi(x) = x^2 + 4x + 5 \ &= t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = (2x+4)\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ 2(x+2)\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ (x+2)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{aligned} \right|$$

Pr. 5 – 29 / 28:

$$\int e^{\frac{x}{3}}\, dx$$

Zložená funkcia: $\mathrm{f}(\varphi(x)) = e^{\frac{x}{3}}$

Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = \frac{x}{3}$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x}{3} = t \\ \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = 3\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C$$

$$\int e^{\frac{x}{3}}\, \mathrm{d}x = \int e^{t}\, 3\, \mathrm{d}x = 3\int e^{t}\, \mathrm{d}t = 3e^{t} + C = \boldsymbol{3e^{\frac{x}{3}} + C}$$

$$\boxed{\int e^{kx}\, \mathrm{d}x = \frac{e^{kx}}{k} + C}$$

Pr. 6 – 27 / 44:

$$\int \frac{\ln x}{x} e^{\ln^2 x - 1}\, dx$$

Zložená funkcia: $\mathrm{f}(\varphi(x)) = e^{\ln^2 x - 1}$
Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = \ln^2 x - 1 = (\ln x^2) - 1$

$$\left| \begin{array}{l} (\ln x^2) - 1 = t \\ 2 \ln x \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \ln x \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Pr. 7 – 30 / 62:

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx = \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

$$\left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Zložená funkcia: $\mathrm{f}(\varphi(x)) = \cos(\ln x)$
Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = \ln x$

$$\int \cos x \ \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, \mathrm{d}x = \int \cos(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int \cos t \ \mathrm{d}t = \sin t + C = \mathbf{\sin \ln x} + \boldsymbol{C}$$

Pr. 8 – 29 / 49:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx \qquad\qquad 3\sqrt[3]{\sin x} + C$$

Pr. 9 – 29 / 47:

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx$$

Zložená funkcia: $\mathrm{f}(\varphi(x)) = \sqrt[3]{\sin^2 x} = \sqrt[3]{(\sin x)^2}$

Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = \sin x$

$$\cos^2 x = (\cos x)^2$$

$$\left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$\int (\cos x)^2 \sin x \, \mathrm{d}x = \int t^2 \, (-\, \mathrm{d}t) = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\mathbf{cos^3} \boldsymbol{x}}{\mathbf{3}} + \boldsymbol{C}$$

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Pr. 10 – 29 / 48:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}}\,dx$$

$$\sqrt{\cos^5 x} = (\cos x)^{\frac{5}{2}} \qquad \sqrt[k]{x^n} = x^{\frac{n}{k}}$$

$$\left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$\int \frac{\sin x}{(\cos x)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t = -\frac{t^{\frac{-3}{2}}}{\frac{3}{-2}} + C = -\frac{1}{-\frac{3\sqrt{t^3}}{2}} + C = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{t^3}} + C = \boldsymbol{\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{\cos^3 x}} + C}$$

Zložená funkcia: $\mathrm{f}(\varphi(x)) = \cos^2 x = (\cos x)^2$
Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = \cos x$

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Dú: str. 26 / 2, 6, 10, 13, 16, 20, 23, 24, 29, 32, 39, 43, 46, 52, 59, 60

4. Malá písomka

1. (0,2 b) Rozložte na súčet parciálnych zlomkov funkciu

$$f(x) = \frac{3x^2-8x-10}{(x+1)^2(x-2)(x+5)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+5}$$

0,05 0,05 0,05 0,05

2. (0,3b) Napíšte vzorce neurčitých integrálov

a) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$ 0,05

d) $\int 1 \,\mathrm{d}x = x + C$ 0,05

b) $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$ 0,05

e) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$ 0,05

c) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = tg\ x + C$ 0,05

f) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$ 0,0 5

3. Cvičný Upravte na spoločného menovateľa

$$f(x) = \frac{-7x}{(x-4)^2} + \frac{1}{x-4} - \frac{x}{x+1} = \frac{-7x(x+1) + 1(x-4)(x+1) - x(x-4)^2}{(x-4)^2(x+1)}$$