Matematika 2 – 5.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Neurčitý integrál

Neurčitý integrál – píšeme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$F(x)$ – primitívna funkcia, c – integračná konštanta

Vzťahy:

integrál zo súčinu konštanty k, kde k je reálne číslo, a funkcie $f(x)$ je

$$\int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx = k\, F(x) + c,$$

integrál zo súčtu (rozdielu) funkcií $f(x)$ a $g(x)$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + c.$$

Základné vzorce:

- $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} \, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + c$

$$\int 1 \, dx = x + c$$

Pr. 1: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(3x^2 + \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{x^8} + 2x\right) \mathrm{d}x$$

Pr. 2: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{1}{5}x^9 + \sqrt[4]{x} + \frac{1}{x^4}\right) \mathrm{d}x = \int \frac{1}{5}x^9 \mathrm{d}x + \int \sqrt[4]{x}\, \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5}\int x^9 \mathrm{d}x + \int x^{\frac{1}{4}} \mathrm{d}x + \int x^{-4} \mathrm{d}x =$$

$$\sqrt[k]{x^n} = x^{\frac{n}{k}}$$

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$= \frac{1}{5}\frac{x^{9+1}}{9+1} + \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C =$$

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \boldsymbol{\frac{x^{10}}{50} + 4\frac{\sqrt[4]{x^5}}{5} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + C}$$

Pr. 3: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{4}{3x^2} - \frac{2}{x} + \sqrt[3]{x^2} + \cos x + 2 \right) \mathrm{d}x$$

Pr. 4: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left[(x+1)(2\sqrt{x}+3) + \frac{3x^2+x-1}{\sqrt{x}} \right] \mathrm{d}x$$

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

Pr. 5: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left((x+2)^3 - 3^x + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{10}{x} \right) \mathrm{d}x$$

Pr. 6: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left((x+5)^2 + 4^x - \frac{2}{1+x^2} - \frac{5}{\cos^2 x} \right) \mathrm{d}x$$

$$\int \left(x^2 + 10x + 25 + 4^x + -\frac{2}{1+x^2} - \frac{5}{\cos^2 x} \right) \mathrm{d}x =$$

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{x^3}{3} + 10\frac{x^2}{2} + 25x + \frac{4^x}{\ln 4} - 2 \operatorname{arctg} x - 5 \operatorname{tg} x + C$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$= \boldsymbol{\frac{x^3}{3} + 5x^2 + 25x + \frac{4^x}{\ln 4} - 2 \operatorname{arctg} x - 5 \operatorname{tg} x + C}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$$

Pr. 7: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{8}{1 - x^2} + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) \mathrm{d}x$$

Pr. 8: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2} + \frac{3x^2}{x^3 + 1} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{(x + 2)(x - 4)}{x + 2} + \frac{3x^2}{x^3 + 1} \right) \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$= \int (x - 4) \, \mathrm{d}x + \int \frac{3x^2}{x^3 + 1} \mathrm{d}x$$

$$(x^3 + 1)' = 3x^2 = f'(x)$$

$$f(x) = x^3 + 1$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \ln\left|x^3 + 1\right| + C$$

Pr. 9 - 24 / 38: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \frac{5}{8x^2 - 32}\, dx$$

Pr. 10 - 24 / 37: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \frac{dx}{4-2x^2}$$

$$\int \frac{1}{2(2-x^2)}\,\mathrm{d}x = \quad \frac{1}{2}\int \frac{1}{2-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$2 = a^2 \rightarrow \sqrt{2} = a$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}\,\mathbf{ln}\left|\frac{\sqrt{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{2}}-\boldsymbol{x}}\right| + \boldsymbol{C}$$

Pr. 11 – 24 / 41+ 46: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{1}{x(4 + \ln x)} + \frac{x}{x^2 - 3} \right) \mathrm{d}x$$

Pr. 12 – 24 / 42 + 45: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{1}{x.\ln x} + \frac{x^2}{x^3+1} \right) \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln x} + \frac{3x^2}{3(x^3+1)} \right) \mathrm{d}x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} = f'(x)$$

$$f(x) = \ln x$$

$$= \mathbf{\ln|\ln x| + \frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right| + C}$$

$$(x^3+1)' = 3x^2 = f'(x)$$

$$f(x) = x^3 + 1$$

Dú: Mat 2 – str. 21 / 6, 8, 10, 11, 14, 17, 18, 21, 24, 28, 33, 39, 41, 43, 44, 50

Substitučná metóda riešenia neurčitých integrálov

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix}\varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \int f(t)\mathrm{d}t$$

substitúcia

Postup pri riešení:

1. Nájdeme v integráli zloženú funkciu $f(\varphi(x))$ a deriváciu jej vnútornej funkcie $\varphi'(x)\mathrm{d}x$.
2. Zavedieme substitúciu za $\varphi(x) = t$ a $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.
3. Integrál s novou premennou ***t*** integrujeme podľa pravidiel a vzorcov pre integrovanie.
4. Vo výsledku integrálu nahradíme ***t*** pôvodným výrazom, za ktorý bola zavedená substitúcia.

Pr. 1 – 27 / 9:

$$\int 2x(x^2+2)^3 \, dx$$

Pr. 2 – 27 / 12:

$$\int x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 2}\, dx$$

Pr. 3 – 27 / 11:

$$\int x \cdot \sqrt{x^2+5}\, dx$$

$$\left| \begin{array}{c} x^2+5 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2} \end{array} \right|$$

$$\int x.\sqrt{x^2+5}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{t^3}}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + C$$