Matematika 2 – 6.cvičenie
opakujúci

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Metóda per partes riešenia neurčitých integrálov

$$\int u(x).\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x).\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = & v'(x) = \\ u'(x) = & v(x) = \end{array} \right|$$

1. prípad: $u(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\int P_n(x)\cdot e^{kx}\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \cos kx\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \sin kx\,dx\,,\quad k\in Z$$

derivujeme P$_n$(*x*)

2. prípad: $v'(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\int P_n(x)\cdot \ln x\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \arcsin x\ (resp.\ \arccos x)\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \mathrm{arctg}\, x\ (resp.\ \mathrm{arccotg}\, x)\,dx$$

integrujeme P$_n$(*x*)

Pr. 1: Vypočítajte daný integrál pomocou metódy per partes $\int (x+2)e^{3x}$

1. **Určiť prípad riešenia podľa zápisu v integráli (podľa funkcie vedľa polynómu $P_n(x)$)**

1. prípad: $u(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\underbrace{\int (x+2)}_{\text{polynóm } \mathrm{P_n}(x))} e^{3x} \mathrm{d}x$$

2. Zapísať funkcie $u(x), v'(x)$ a upraviť ich na $u'(x), v(x)$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = x+2 & v'(x) = e^{3x} \\ \underbrace{u'(x) = 1}_{\text{derivujeme u(x)}} & \underbrace{v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}}_{\text{integrujeme v´(x)}} \end{array} \right|$$

3. Dosadiť $u(x), v'(x), u'(x), v(x)$ do vzťahu pre metódu per partes a urobiť výpočet

$$\int u(x).v'(x)\mathrm{d}x = u(x).v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (x+2)e^{3x}\mathrm{d}x = (x+2)\frac{1}{3}e^{3x} - \int 1.\frac{1}{3}e^{3x}\mathrm{d}x = (x+2)\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\mathrm{d}x = \boldsymbol{(x+2)\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}e^{3x} + C}$$

táto časť sa len opisuje

integrál vyriešime, ak je integrál v tvare súčinu polynómu a funkcie použijeme ešte raz metódu per partes na jeho úpravu

Pr. 2 – 31 / 11:Vypočítajte daný integrál pomocou metódy per partes

$$\int x^2 e^{2x} dx$$

Pr. 3 – 31 / 4: Vypočítajte daný integrál pomocou metódy per partes

$$\int (2-5x)e^x\,dx$$

1. prípad: $u(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = 2-5x & v'(x) = e^x \\ u'(x) = -5 & v(x) = e^x \end{array} \right|$$

derivujeme u(x)

integrujeme v´(x)

$$\int (2-5x)e^x \mathrm{d}x = (2-5x)e^x - \int -5e^x \mathrm{d}x = \boldsymbol{(2-5x)e^x + 5e^x + C}$$

Pr. 4 – 33 / 15: Vypočítajte daný integrál pomocou metódy per partes

$$\int (x+5)\sin 2x \, dx$$

$$\boxed{\int \cos kx \ \mathrm{d}x = \frac{\sin kx}{k} + C}$$

$$\boxed{\int \sin kx \ \mathrm{d}x = \frac{-\cos kx}{k} + C}$$

Pr. 5 – 32 / 20: Vypočítajte daný integrál pomocou metódy per partes

$$\int (3-x)\sin\frac{x}{2}\,dx$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = 3 - x & v' = \sin\dfrac{x}{2} \\ u' = -1 & v = -2\cos\dfrac{x}{2} \end{array} \right|$$

$$= -2(3-x)\cos\frac{x}{2} - \int 2\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{(2x-6)\cos\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2} + C}$$

Pr. 6 – 33 / 28: $\int (x-1)\ln x\, dx$

1. **Určiť prípad riešenia podľa zápisu v integrále (podľa funkcie vedľa polynómu $P_n(x)$)**

2. prípad: $v'(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\int \underbrace{(x-1)}_{\text{polynóm } \mathrm{P_n}(x))} \ln x \, \mathrm{d}x$$

2. Zapísať funkcie $u(x), v'(x)$ a upraviť ich na $u'(x), v(x)$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v'(x) = (x-1) \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} & v(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x \end{array} \right|$$

derivujeme u(x)

integrujeme v´(x)

3. Dosadiť $u(x), v'(x), u'(x), v(x)$ do vzťahu pre metódu per partes a urobiť výpočet

$$\int u(x).v'(x)\mathrm{d}x = u(x).v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (x-1)\ln x\, \mathrm{d}x = \ln x\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \int \frac{1}{x}.\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\mathrm{d}x = \ln x\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \int \left(\frac{x^2}{2x} - \frac{x}{x}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \ln x\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \int \left(\frac{x}{2} - 1\right)\mathrm{d}x = \boldsymbol{\ln x\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - x + C}$$

Pr. 7 – 33 / 17: Vypočítajte daný integrál pomocou metódy per partes

$$\int x \ln x \, dx$$

2. prípad: $v'(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v'(x) = x \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} & v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

$\downarrow$ derivujeme u(x)

$\downarrow$ integrujeme v´(x)

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x =$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C}$$

Pr. 8 – 33 / 41: Vypočítajte daný integrál pomocou metódy per partes

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

Dú: str. 31 / 6, 10, 15, 17, 23, 29, 30, 42, 43, 48, 52

Integrovanie racionálnych funkcií

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{kde racionálna funkcia} \quad f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

1. a) Ak n < m, f(x) <u>rýdzoracionálna</u> – rozklad na parciálne zlomky, potom integrujeme
   b) v prípade, že je daný integrál v tvare:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\underbrace{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}} \quad \text{pre} \quad p^2-4q<0 \quad \text{použijeme substitúciu} \quad x+\frac{p}{2}=t$$

menovateľa doplníme na štvorec a použijeme integračný vzorec

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

2. Ak n ≥ m, f(x) <u>nerýdzoracionálna</u> – predelíme, upravíme na súčet polynómu a parciálnych zlomkov, potom všetko integrujeme

Pr. 1

$$\int \frac{3}{x^2 - 6x + 10}\,\mathrm{d}x$$

Prípad 1b: menovateľa doplníme na štvorec a použijeme integračný vzorec

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

Pr. 2 – 38 / 29:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

Pr. 3

$$\int \frac{1}{x^2+4x+20}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{(x+2)^2+20-4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+2)^2+16}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(t)^2+16}\,\mathrm{d}t$$

$$\left| \begin{array}{c} x+2=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ a^2=16 \\ a=4 \end{array} \right|$$

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4}+C = \mathbf{\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4}+C}$$

Pr. 4 – 38 / 3:

$$\int \frac{4x+2}{x^2-2x-8}\, dx$$

Prípad 1a: $f(x)$ rozklad na parciálne zlomky, potom integrujeme, pri úprave integrálu použijeme vzorec

$$\boxed{\int \left[\frac{1}{x \pm b}\right] \mathrm{d}x = \ln(x \pm b) + C}$$

5. Malá písomka

1. (0,2 b) Vyriešte integrál

0,1 0,1

$$\int\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = 3\,\frac{x^3}{3}+\ln|x|+C$$

2. (0,1 b) Napíšte substitúciu bez riešenie integrálu

$$\int\left(\sqrt{x^2+5}\right)x\,\mathrm{d}x \qquad \left|\begin{array}{l} x^2+5=t \\ 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right|$$

0,05
0,05

3. (0,2 b) Napíšte vzorce derivácii

a) $(x^n)' = nx^{n-1}$ 0,05

b) $(\cos x)' = -\sin x$ 0,05

c) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 0,05

d) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 0,05