Matematika 2 – 6.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Substitučná metóda riešenia neurčitých integrálov

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \int f(t)\mathrm{d}t$$

substitúcia

Postup pri riešení:

1. Nájdeme v integráli zloženú funkciu $f(\varphi(x))$ a deriváciu jej vnútornej funkcie $\varphi'(x)\mathrm{d}x$.
2. Zavedieme substitúciu za $\varphi(x) = t$ a $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.
3. Integrál s novou premennou ***t*** integrujeme podľa pravidiel a vzorcov pre integrovanie.
4. Vo výsledku integrálu nahradíme ***t*** pôvodným výrazom, za ktorý bola zavedená substitúcia.

Príklady zložených funkcií:

V zloženej funkcii je namiesto *x* uvedená funkcia f(*x*).

Jednoduchá funkcia	Zložená funkcia
x^3	$(5x+8)^3$
e^x	$e^{\sqrt{x+1}}$
$\sin x$	$\sin(5x^2)$
$\ln x$	$\ln(\ln x+5)$
$\sqrt{x}$	$\sqrt{\cos x+2x}$

Pr. 1 – 27 / 15: $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,dx$

1. **Nájdeme v integráli zloženú funkciu $f(\varphi(x))$, jej vnútornú funkciu $\varphi(x)$**

   Zložená funkcia: $\mathrm{f}(\varphi(x)) = \sqrt[3]{x^2-2}$

   Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = x^2 - 2$

2. **Zavedieme substitúciu za $\varphi(x) = t$ a $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$**

$$\left| \begin{aligned} \varphi(x) = x^2 - 2 &= t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = 2x\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{aligned} \right|$$

Poznámka: V integráli sa musí nachádzať derivácia vnútornej funkcie $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ (alebo jej časť, napr. namiesto $2x\mathrm{d}x$ bude v integráli len $x\mathrm{d}x$)

3. **Upravíme integrál pomocou substitúcie na integrál s novou premennou *t*, ktorý integrujeme podľa pravidiel a vzorcov pre integrovanie**

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{t^2} + C$$

4. **Vo výsledku integrálu nahradíme *t* pôvodným výrazom, za ktorý bola zavedená substitúcia**

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-2)^2} + C}$$

Pr. 2 – 30 / 61:

$$\int e^{x^2+4x+5}(x+2)dx$$

Zložená funkcia: $\mathrm{f}(\varphi(x)) = e^{x^2+4x+5}$
Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = x^2 + 4x + 5$

$$\left|\begin{aligned} \varphi(x) = x^2 + 4x + 5 &= t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = (2x+4)\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ 2(x+2)\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ (x+2)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{aligned}\right|$$

Pr. 3 – 29 / 28:

$$\int e^{\frac{x}{3}}\, dx$$

Zložená funkcia: $f(\varphi(x)) = e^{\frac{x}{3}}$

Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = \frac{x}{3}$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x}{3} = t \\ \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = 3\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$\int e^{\frac{x}{3}}\, \mathrm{d}x = \int e^{t}\, 3\, \mathrm{d}x = 3\int e^{t}\, \mathrm{d}t = 3e^{t} + C = \boldsymbol{3e^{\frac{x}{3}} + C}$$

$$\boxed{\int e^{kx}\, \mathrm{d}x = \frac{e^{kx}}{k} + C}$$

Pr. 4 – 27 / 44:

$$\int \frac{\ln x}{x} e^{\ln^2 x - 1}\, dx$$

Zložená funkcia: $\mathrm{f}(\varphi(x)) = e^{\ln^2 x - 1}$
Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = \ln^2 x - 1 = (\ln x^2) - 1$

$$\left| \begin{array}{l} (\ln x^2) - 1 = t \\ 2 \ln x \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \ln x \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \mathrm{d}t \\ \end{array} \right|$$

Pr. 5 – 30 / 62:

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx = \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

$$\left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Zložená funkcia: $\mathrm{f}(\varphi(x)) = \cos(\ln x)$

Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = \ln x$

$$= \int \cos \ln x \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int \cos t \;\mathrm{d}t = \sin t + C = \boldsymbol{\sin \ln x + C}$$

Pr. 6 – 29 / 49:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\, dx$$

$$\left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Zložená funkcia: $\mathrm{f}(\varphi(x)) = \sqrt[3]{\sin^2 x} = \sqrt[3]{(\sin x)^2}$

Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = \sin x$

Pr. 7 – 29 / 47:

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx \quad = \int (\cos x)^2 \sin x \, \mathrm{d}x$$

$$\left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Zložená funkcia: $\mathrm{f}(\varphi(x)) = \cos^2 x = (\cos x)^2$
Vnútorná funkcia: $\varphi(x) = \cos x$

$$= \int (\cos x)^2 \sin x \, \mathrm{d}x = \int t^2 \, (-\,\mathrm{d}t) = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\mathbf{cos^3 \boldsymbol{x}}}{\mathbf{3}} + \boldsymbol{C}$$

Dú: str. 26 / 2, 6, 10, 13, 16, 20, 23, 24, 29, 32, 39, 43, 46, 52, 59, 60

Metóda per partes riešenia neurčitých integrálov

$$\int u(x).v'(x)\mathrm{d}x = u(x).v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = & v'(x) = \\ u'(x) = & v(x) = \end{array} \right|$$

1. prípad: $u(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\int P_n(x)\cdot e^{kx}\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \cos kx\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \sin kx\,dx\,,\quad k \in Z$$

derivujeme P$_n$(*x*)

2. prípad: $v'(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\int P_n(x)\cdot \ln x\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \arcsin x\ (resp.\ \arccos x)\ dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \mathrm{arctg}\, x\ (resp.\ \mathrm{arccotg}\, x)\ dx$$

integrujeme P$_n$(*x*)

Pr. 1: Vypočítajte daný integrál pomocou metódy per partes $\int (x+2)e^{3x}$

1. Určiť prípad riešenia podľa zápisu v integrále (podľa funkcie vedľa polynómu $P_n(x)$)

1. prípad: $u(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\int (x+2)e^{3x}\mathrm{d}x$$

polynóm $\mathrm{P_n}(x)$)

2. Zapísať funkcie $u(x), v´(x)$ a upraviť ich na $u´(x), v(x)$

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = x+2 & v´(x) = e^{3x} \\ u´(x) = 1 & v(x) = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right|$$

derivujeme u(x)

integrujeme v´(x)

3. Dosadiť $u(x), v´(x), u´(x), v(x)$ do vzťahu pre metódu per partes a urobiť výpočet

$$\int u(x).v´(x)\mathrm{d}x = u(x).v(x) - \int u´(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (x+2)e^{3x}\mathrm{d}x = (x+2)\frac{1}{3}e^{3x} - \int 1.\frac{1}{3}e^{3x}\mathrm{d}x = (x+2)\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\mathrm{d}x = \boldsymbol{(x+2)\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}e^{3x} + C}$$

táto časť sa len opisuje

integrál vyriešime, ak je integrál v tvare súčinu polynómu a funkcie použijeme ešte raz metódu per partes na jeho úpravu

Pr. 2 – 33 / 25: Vypočítajte daný integrál pomocou metódy per partes

$$\int (x^2 + 6x + 3)\cos 2x \, dx$$

$$\boxed{\int \cos kx \;\, \mathrm{d}x = \frac{\sin kx}{k} + C}$$

$$\boxed{\int \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{-\cos kx}{k} + C}$$

Pr. 3 – 32 / 20: Vypočítajte daný integrál pomocou metódy per partes

$$\int (3-x)\sin\frac{x}{2}\,dx$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = 3 - x & v' = \sin\frac{x}{2} \\ u' = -1 & v = -2\cos\frac{x}{2} \end{array} \right|$$

$$= -2(3-x)\cos\frac{x}{2} - \int 2\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{(2x-6)\cos\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2} + C}$$

Pr. 4 – 33 / 28: $\int (x-1)\ln x \, dx$

1. **Určiť prípad riešenia podľa zápisu v integrále (podľa funkcie vedľa polynómu $P_n(x)$)**

2. prípad: $v'(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\int (x-1)\ln x \,\mathrm{d}x$$

$\downarrow$ polynóm $\mathrm{P_n}(x)$)

2. Zapísať funkcie $u(x), v'(x)$ a upraviť ich na $u'(x), v(x)$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v'(x) = (x-1) \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} & v(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x \end{array} \right|$$

$\downarrow$ derivujeme u(x)

$\downarrow$ integrujeme v´(x)

3. Dosadiť $u(x), v'(x), u'(x), v(x)$ do vzťahu pre metódu per partes a urobiť výpočet

$$\int u(x).v'(x)\mathrm{d}x = u(x).v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (x-1)\ln x \,\mathrm{d}x = \ln x\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \int \frac{1}{x}.\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\mathrm{d}x = \ln x\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \int \left(\frac{x^2}{2x} - \frac{x}{x}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \ln x\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \int \left(\frac{x}{2} - 1\right)\mathrm{d}x = \boldsymbol{\ln x\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - x + C}$$