Matematika 2 – 7.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr. 1 – 33 / 41:

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

2. prípad: $v'(x) = \mathrm{P_n}(x) = \boldsymbol{x}$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \operatorname{arctg} x & v'(x) = x \\ u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} & v(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \end{array} \right|$$

derivujeme u(x)

integrujeme v´(x)

Pr. 2 – 33 / 17: Vypočítajte daný integrál pomocou metódy per partes

$$\int x \ln x \, dx$$

2. prípad: $v'(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v'(x) = x \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} & v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

↓ derivujeme u(x)

↓ integrujeme v´(x)

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \mathrm{d}x =$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C}$$

Pr. 3 – 33 / 44:

$$\int (4x^3 + 2x)\operatorname{arctg} x \, dx$$

2. prípad: $v'(x) = \mathrm{P_n}(x) = 4x^3 + 2x$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \operatorname{arctg} x & v'(x) = 4x^3 + 2x \\ u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} & v(x) = 4\dfrac{x^4}{4} + 2\dfrac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

$$= (x^4 + x^2)\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^4+x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = (x^4 + x^2)\operatorname{arctg} x - \int x^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= (\boldsymbol{x^4} + \boldsymbol{x^2})\,\mathbf{arctg}\,\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x^3}}{\mathbf{3}} + \boldsymbol{C}$$

$$(x^4 + x^2) : (x^2 + 1) = x^2$$
$$\underline{-(x^4 + x^2)}$$
$$0$$

Dú: str. 31 / 6, 10, 15, 17, 23, 29, 30, 42, 43, 48, 52

Integrovanie racionálnych funkcií

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{kde racionálna funkcia} \quad f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

1. a) Ak n < m, f(x) <u>rýdzoracionálna</u> – rozklad na parciálne zlomky, potom integrujeme
   b) v prípade, že je daný integrál v tvare:

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+px+q}} = \int \frac{dx}{\underbrace{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}} \quad \text{pre} \quad p^2-4q<0 \quad \text{použijeme substitúciu} \quad x+\frac{p}{2}=t$$

menovateľa doplníme na štvorec a použijeme integračný vzorec

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

2. Ak n ≥ m, f(x) <u>nerýdzoracionálna</u> – predelíme, upravíme na súčet polynómu a parciálnych zlomkov, potom všetko integrujeme

Pr. 1 – 38 / 8:

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$$

Prípad 1a: pod integrálom je rýdzoracionálna funkcia (n = 1 < m = 3)

1. Rozklad funkcie na parciálne zlomky

$$= \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \right) \mathrm{d}x =$$

2. Výpočet koeficientov A, B, C – úprava pravej strany na spoločného menovateľa a dosadzovacia metóda

3. Dosadenie vypočítaných koeficientov A, B, C do integrálu a jeho výpočet pomocou vzorca

$$\boxed{\int \left[\frac{1}{x \pm b}\right] \mathrm{d}x = \ln(x \pm b) + C}$$

Pr. 2 – 38 / 3:

$$\int \frac{4x+2}{x^2-2x-8}\,dx$$

Prípad 1a: pod integrálom je rýdzoracionálna funkcia (n = 1 < m = 2)

1. Rozklad funkcie na parciálne zlomky

$$= \int \left[\frac{4x+2}{(x-4)(x+2)}\right] \mathrm{d}x = \int \left[\frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}\right] \mathrm{d}x =$$

2. Výpočet koeficientov A, B – úprava pravej strany na spoločného menovateľa a dosadzovacia metóda

$$\frac{4x+2}{(x-4)(x+2)} = \frac{A(x-4)+B(x+2)}{(x-4)(x+2)}$$

$$4x+2 = A(x-4)+B(x+2)$$

$$x=-2 \quad -8+2 = A(-2-4)$$

$$-6=-6A \qquad A=1$$

$$x=4 \quad 16+2 = B(4+2)$$

$$18=6B \qquad B=3$$

3. Dosadenie vypočítaných koeficientov A, B do integrálu a jeho výpočet pomocou vzorca

$$\boxed{\int \left[\frac{1}{x \pm b}\right] \mathrm{d}x = \ln(x \pm b) + C}$$

$$= \int \left[\frac{1}{x-4} + \frac{3}{x+2}\right] \mathrm{d}x = \quad \ln|x-4| + 3\ln|x+2| + C = \boldsymbol{\ln\left|(x-4)^3(x+2)\right| + C}$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a.b)$$

$$n \ln a = \ln a^n$$

Pr. 3

$$\int \frac{3}{x^2 - 6x + 10}\,\mathrm{d}x$$

Prípad 1b: menovateľa doplníme na štvorec a použijeme integračný vzorec

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

Pr. 4

$$\int \frac{1}{x^2+4x+20}\,\mathrm{d}x$$

Prípad 1b: menovateľa doplníme na štvorec a použijeme integračný vzorec

$$\int \frac{1}{(x+2)^2+20-4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+2)^2+16}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(t)^2+16}\,\mathrm{d}t$$

$$\left| \begin{array}{c} x+2=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ a^2=16 \\ a=4 \end{array} \right|$$

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4}+C = \boldsymbol{\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4}+C}$$

Pr. 5 – 39 / 20:

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 17}{x^2 + x - 12}\, dx$$

Prípad 2: predelíme, upravíme na súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie, ktorú rozložíme na súčet parciálnych zlomkov, potom všetko integrujeme

Pr. 6 – 38 / 18:

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\,dx = \int \left(\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x}\right) \mathrm{d}x =$$

Prípad 2: pod integrálom je nerýdzoracionálna funkcia ($n = 3 \geq m = 2$)

1. Predelíme čitateľa menovateľom

$$\begin{array}{l}
(x^3+3x^2+3x+1):(x^2-x) = x+4 \\
\underline{-(x^3-x^2)} \\
\qquad 4x^2+3x \\
\quad \underline{-(4x^2-4x)} \\
\qquad\qquad 7x+1
\end{array}$$

výsledkom je polynóm x + 4 a rýdzoracionálna funkcia $g(x) = \frac{7x+1}{x^2-x}$

2.. Rozklad funkcie g(x) na parciálne zlomky

$$= \int \left(x+4+\frac{7x+1}{x^2-x}\right) \mathrm{d}x = \int \left(x+4+\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}\right) \mathrm{d}x =$$

3. Výpočet koeficientov A, B – úprava pravej strany na spoločného menovateľa a dosadzovacia metóda

$$\frac{7x+1}{x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$$

$$7x+1=A(x-1)+B\mathrm{x}$$

$x=0$: $0+1=-A$ $\quad A=-1$

$x=1$: $7+1=B$ $\quad B=8$

4. Dosadenie vypočítaných koeficientov A, B do integrálu a jeho výpočet

$$\int\left(x+4+\frac{-1}{x}+\frac{8}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+4x-\ln|x|+8\ln|x-1|+C$$

$$=\frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{2}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{ln}\left|\frac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{8}}}{\boldsymbol{x}}\right|+\boldsymbol{C}$$

$$\ln a-\ln b=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$n\ln a=\ln a^n$$

Dú: str. 38 / 5, 11, 16, 17, 28, 35, 38

Integrovanie iracionálnych funkcií

1. prípad:

$$\int R\left[x, (ax+b)^{\frac{1}{k_1}}, (ax+b)^{\frac{1}{k_2}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{1}{k_n}}\right] dx$$

Substutúcia: ax + b = t^k

k – najmenší spoločný násobok čísel k_1, k_2, k_3,........... k_n (prirodzené čísla)

2. prípad:

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a \neq 0$ riešime tak, že výraz pod odmocninou upravíme na štvorec vhodnou substitúciou potom využijeme jeden z integračných vzorcov:

- ak $a > 0$ $\int \frac{1}{\sqrt{t^2+d^2}} \mathrm{d}t = \ln\left|t + \sqrt{t^2+d^2}\right| + C$
- ak $a < 0$ $\int \frac{1}{\sqrt{d^2-t^2}} \mathrm{d}t = \arcsin\frac{t}{d} + C$

Pr. 1 – 43 / 2:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int \frac{x}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$$

1. prípad:

1. **Prepis odmocniny ($\sqrt{2x+1}$) na mocninu ($(2x+1)^{\frac{1}{2}}$) a určiť k**
2. **Zaviesť substitúciu v tvare $\mathrm{a}x + \mathrm{b} = t^k$, určiť dx**

$$\left| \begin{array}{c} k = 2 \\ 2x+1 = t^2 \\ 2\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| \rightarrow x = \frac{t^2-1}{2}$$

3. **Prepis integrálu na jednoduchší tvar pomocou substitúcie, kde *x* vyjadríme zo substitúcie**

$$= \int \frac{\frac{t^2-1}{2}}{(t^2)^{\frac{1}{2}}} 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2-1)}{t} 2t\,\mathrm{d}t$$

musíme dostať integrál, pod ktorým je len premenná *t* , bez *x*

4. Výpočet integrálu

$$= \int (t^2 - 1)\, \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - t + C$$

5. Návrat k substitúcii, vyjadrenie *t* a prepis výsledku s *x*

$$\left| \begin{array}{c} k = 2 \\ 2x + 1 = t^2 \\ 2\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| \rightarrow t = \sqrt{2x + 1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2x + 1}\right)^3}{3} - \sqrt{2x + 1} + C$$

Pr. 2 – 43 / 9:

$$\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\,dx = \int \frac{(3x+4)^{\frac{1}{3}}}{1+(3x+4)^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x$$

1. prípad:

$$\left|\begin{aligned} k &= 3 \\ 3x+4 &= t^3 \\ 3\mathrm{d}x &= 3t^2\mathrm{d}t \end{aligned}\right| \to t = \sqrt[3]{3x+4}$$

Pr. 3

$$\int \frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2x-4}-1}\,\mathrm{d}x \quad = \int \frac{(2x-4)^{\frac{1}{2}}}{(2x-4)^{\frac{1}{2}}-1}\,\mathrm{d}x$$

1. prípad:

$$\left|\begin{array}{rl} k & = 2 \\ 2x-4 & = t^2 \\ 2\mathrm{d}x & = 2t\mathrm{d}t \end{array}\right| \quad \to t = \sqrt{2x-4}$$

$$\int \frac{t}{t-1}\,t\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{t-1}\mathrm{d}t = \int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t \quad = \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| + C$$

$$= \boldsymbol{x - 2 + \sqrt{2x-4} + \ln\left|\sqrt{2x-4}-1\right| + C}$$

$$\begin{array}{l} (t^2 \qquad):(t-1) = t+1 \\ \underline{-(t^2-t)} \\ \qquad t \\ \underline{\qquad -(t-1)} \\ \qquad\quad 1 \end{array}$$

Pr. 4 – 44 / 6:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\, dx \quad = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+(x)^{\frac{1}{4}}}\, \mathrm{d}x$$

1. prípad:

$$\left| \begin{array}{l} k_1 = 2 = 2.1 \\ k_2 = 4 = 2.2.1 \rightarrow k = 2.2.1 = 4 \\ \\ \quad x = t^4 \\ \mathrm{d}x = 4t^3\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$\int \frac{1}{(t^4)^{\frac{1}{2}}+(t^4)^{\frac{1}{4}}}\, 4t^3\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+t}\, 4t^3\mathrm{d}t = \cdots ..$$

Pr. 5 – 44 / 14:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx$$

1. prípad:

$$\left|\begin{array}{c} k_1 = 3.1 \\ k_2 = 6 = 3.2.1 \rightarrow k = 3.2.1 = 6 \\ x = t^6 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t \end{array}\right| \rightarrow t = \sqrt[6]{x}$$

$$\begin{array}{l} (t^2\quad):(t+1) = t-1 \\ \underline{-(t^2+t)} \\ \quad -t \\ \underline{\quad -(-t-1)} \\ \qquad 1 \end{array}$$

$$\int \frac{t^{\frac{6}{3}}}{t^6+(t^6)^{\frac{5}{6}}}\,6t^5\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{t^6+t^5}6t^5\mathrm{d}t = 6\int\left(\frac{t^2}{t+1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$6\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C = 6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\right)+C$$

$$= \boldsymbol{3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\,ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|)+C}$$

Pr. 6 – 45 / 31:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}}\,dx$$

2. prípad: $a = -2 < 0$ $\quad \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{d^2 - t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin\frac{t}{d} + C$

Pr. 7 – 45 / 23:

$$\int \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 8x + 12}}\, dx$$

2. prípad:

$$a = 4 > 0 \to \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + d^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\left|t + \sqrt{t^2 + d^2}\right| + C$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{4(x^2 - 2x + 3)}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\sqrt{4[(x-1)^2 + 3 - 1]}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{2\sqrt{[(x-1)^2 + 2]}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 = t \\ \mathrm{d}x \ = t\mathrm{d}t \\ d^2 = 2 \end{vmatrix}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{[(t)^2 + 2]}}\,\mathrm{d}t = \ln\left|t + \sqrt{t^2 + 2}\right| + C = \mathbf{ln}\left|\boldsymbol{x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 3}}\right| + \boldsymbol{C}$$

str. 43 / 4, 7, 8, 12, 15, 16, 22, 25, 26, 29

Pokyny k 1. zápočtovej písomke:

Dátum a miesto: piatok 4.4.2025 v ZP1, 8:45

Príklady – za 35 bodov, 7 príkladov:
1. Komplexné čísla,
2. Rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov,
3. Rozklad racionálnej funkcie na parciálne zlomky,
4. Neurčitý integrál – na základné vzorce (pod integrálom súčet rôznych vzorcov)
5. Metóda substitúcie riešenia neurčitého integrálu.
6. Metóda per partes riešenia neurčitého integrálu (dva spôsoby).
7. Riešenie neurčitého integrálu, v ktorom je racionálna, iracionálna funkcia

Teória – za 15 bodov, 6 - 7 otázok (výber odpovedí + doplnenie odpovede).

Čas: 70 minút

Študent má byť prihlásený v Moodle (heslo M2 – 04)
Bez kalkulačiek, mobilov, mať pri sebe Isic, **dvojhárok s vytlačenou hlavičkou (stránka KMTI ,** v časti Vzory a predlohy)