

Matematika 2 – 7.cvičenie

opakujúci

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Integrovanie racionálnych funkcií

$$\int f(x) dx \quad \text{kde racionálna funkcia} \quad f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

1. a) Ak $n < m$, $f(x)$ rýdzoracionálna – rozklad na parciálne zlomky, potom integrujeme
b) v prípade, že je daný integrál v tvare:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}_{a^2}} \quad \text{pre} \quad p^2 - 4q < 0 \quad \text{použijeme substitúciu} \quad x + \frac{p}{2} = t$$

menovateľa **doplníme na štvorec** a použijeme integračný vzorec

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

2. Ak $n \geq m$, $f(x)$ nerýdzoracionálna – predelíme, upravíme na súčet polynómu a parciálnych zlomkov, potom všetko integrujeme

Pr. 1 – 38 / 8:

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2} dx$$

Prípád 1a: pod integrálom je rýdzoracionálna funkcia ($n = 1 < m = 3$)

1. Rozklad funkcie na parciálne zlomky

$$= \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \right) dx =$$

2. Výpočet koeficientov A, B, C– úprava pravej strany na spoločného menovateľa a dosadzovacia metóda

3. Dosadenie vypočítaných koeficientov A, B, ... do integrálu a jeho výpočet pomocou vzorca

$$\int \left[\frac{1}{x \pm b} \right] dx = \ln(x \pm b) + C$$

Pr. 2 – 39 / 20:

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 17}{x^2 + x - 12} dx$$

Prípád 2: predelíme, upravíme na súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie, ktorú rozložíme na súčet parciálnych zlomkov, potom všetko integrujeme

Pr. 3 – 38 / 18:

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx = \int \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x} \right) dx =$$

Prípád 2: pod integrálom je nerýdzoracionálna funkcia ($n = 3 \geq m = 2$)

1. Predelíme čitateľa menovateľom

$$\begin{array}{r} (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (x^2 - x) = x + 4 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ 4x^2 + 3x \\ \underline{-(4x^2 - 4x)} \\ 7x + 1 \end{array}$$

výsledkom je polnóm $x + 4$ a rýdzoracionálna funkcia $g(x) = \frac{7x+1}{x^2-x}$

2.. Rozklad funkcie $g(x)$ na parciálne zlomky

$$= \int \left(x + 4 + \frac{7x + 1}{x^2 - x} \right) dx = \int \left(x + 4 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} \right) dx =$$

3. Výpočet koeficientov A, B – úprava pravej strany na spoločného menovateľa a dosadzovacia metóda

$$\frac{7x + 1}{x^2 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1}$$

$$7x + 1 = A(x - 1) + Bx$$

$$x = 0: 0 + 1 = -A \quad A = -1$$

$$x = 1: 7 + 1 = B \quad B = 8$$

4. Dosadenie vypočítaných koeficientov A, B do integrálu a jeho výpočet

$$\int \left(x + 4 + \frac{-1}{x} + \frac{8}{x - 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 4x - \ln|x| + 8 \ln|x - 1| + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{(x - 1)^8}{x} \right| + C$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

$$\ln a - \ln b = \ln \left(\frac{a}{b} \right)$$

$$n \ln a = \ln a^n$$

Dú: str. 38 / 5, 11, 16, 17, 28, 35, 38

Integrovanie iracionálnych funkcií

1. prípad:

$$\int R \left[x, (ax+b)^{\frac{1}{k_1}}, (ax+b)^{\frac{1}{k_2}}, \dots, (ax+b)^{\frac{1}{k_n}} \right] dx$$

Substitúcia: $ax + b = t^k$

k – najmenší spoločný násobok čísel $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ (prirodzené čísla)

2. prípad:

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $a \neq 0$ riešime tak, že výraz pod odmocninou upravíme na štvorec

vhodnou substitúciou potom využijeme jeden z integračných vzorcov:

○ ak $a > 0$ $\int \frac{1}{\sqrt{t^2 + d^2}} dt = \ln \left| t + \sqrt{t^2 + d^2} \right| + C$

○ ak $a < 0$ $\int \frac{1}{\sqrt{d^2 - t^2}} dt = \arcsin \frac{t}{d} + C$

Pr. 1 – 43 / 2:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx = \int \frac{x}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} dx$$

1. prípad:

1. Prepis odmocniny ($\sqrt{2x+1}$) na mocninu ($(2x+1)^{\frac{1}{2}}$) a určiť k
2. Zaviesť substitúciu v tvare $ax + b = t^k$, určiť dx

$$\left| \begin{array}{l} k = 2 \\ 2x + 1 = t^2 \\ 2dx = 2t dt \end{array} \right| \rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

3. Prepis integrálu na jednoduchší tvar pomocou substitúcie, kde x vyjadríme zo substitúcie

$$= \int \frac{\frac{t^2 - 1}{2}}{(t^2)^{\frac{1}{2}}} 2t dt = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2 - 1)}{t} 2t dt$$

musíme dostať integrál, pod ktorým je len premenná t , bez x

4. Výpočet integrálu

$$= \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C$$

5. Návrat k substitúcií, vyjadrenie t a prepis výsledku s x

$$\left| \begin{array}{l} k = 2 \\ 2x + 1 = t^2 \\ 2dx = 2tdt \end{array} \right| \rightarrow t = \sqrt{2x + 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{2x + 1})^3}{3} - \sqrt{2x + 1} + C$$

Pr. 2 – 43 / 9:

$$\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}} dx = \int \frac{(3x+4)^{\frac{1}{3}}}{1+(3x+4)^{\frac{1}{3}}} dx$$

1. prípad:

$$\left| \begin{array}{l} k = 3 \\ 3x + 4 = t^3 \\ 3dx = 3t^2 dt \end{array} \right| \rightarrow t = \sqrt[3]{3x+4}$$

Pr. 4 – 44 / 6:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + (x)^{\frac{1}{4}}} dx$$

1. prípad:

$$\left| \begin{array}{l} k_1 = 2 = 2.1 \\ k_2 = 4 = 2.2.1 \rightarrow k = 2.2.1 = 4 \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right|$$

$$\int \frac{1}{(t^4)^{\frac{1}{2}} + (t^4)^{\frac{1}{4}}} 4t^3 dt = \int \frac{1}{t^2 + t} 4t^3 dt = \dots\dots$$

Pr. 5 – 44 / 14:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[6]{x^5}} dx$$

1. prípad:

$$\left| \begin{array}{l} k_1 = 3.1 \\ k_2 = 6 = 3.2.1 \rightarrow k = 3.2.1 = 6 \\ x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right|$$

$$\rightarrow t = \sqrt[6]{x}$$

$$\begin{array}{l} (t^2 \quad): (t + 1) = t - 1 \\ \frac{-(t^2 + t)}{-t} \\ \frac{-(-t - 1)}{1} \end{array}$$

$$\int \frac{t^{\frac{6}{3}}}{t^6 + (t^6)^{\frac{5}{6}}} 6t^5 dt = \int \frac{t^2}{t^6 + t^5} 6t^5 dt = 6 \int \left(\frac{t^2}{t + 1} \right) dt =$$

$$6 \int \left(t - 1 + \frac{1}{t + 1} \right) dt = 6 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t + 1| \right) + C = 6 \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x} + 1| \right) + C$$

$$= 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C$$

str. 43 / 4, 7, 8, 12, 15, 16, 22, 25, 26, 29

Pokyny k 1. zápočtovej písomke:

Dátum a miesto: piatok 4.4.2025 v ZP1, 7:30

Príklady – za 35 bodov, 7 príkladov:

1. Komplexné čísla,
2. Rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov,
3. Rozklad racionálnej funkcie na parciálne zlomky,
4. Neurčitý integrál – na základné vzorce (pod integrálom súčet rôznych vzorcov)
5. Metóda substitúcie riešenia neurčitého integrálu.
6. Metóda per partes riešenia neurčitého integrálu (dva spôsoby).
7. Riešenie neurčitého integrálu, v ktorom je racionálna a iracionálna funkcia.

Teória – za 15 bodov, 6 - 7 otázok (výber odpovedí + doplnenie odpovede).

Čas: 70 minút

Študent má byť prihlásený v Moodle (opakujúci: M2 – 18)

Bez kalkulačiek, mobilov, mať pri sebe Isic, **dvojhárok s vytlačenou hlavičkou (stránka KMTI , v časti Vzory a predlohy)**

