

Matematika 2 – 4.cvičenie

opakujúci

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr. 1 – 17 / 6:

rozložte v \mathbf{R} na parciálne zlomky:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 17x - 23}{x^3 - 7x + 6}$$

1. Zistíme, či je funkcia rýdzoracionálna
2. Ak nie je rýdzoracionálna, urobíme podiel polynómov a zapíšeme funkciu ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie $g(x)$
3. Rozložíme rýdzoracionálnu funkciu $g(x)$ na parciálne zlomky

Pr. 2 – 17 /22:

rozložte v \mathbf{R} na parciálne zlomky:

$$\frac{x^3 + 6x^2 - 6x + 7}{x^3 - x^2 + x - 6}$$

1. Zistíme, či je funkcia rýdzoracionálna – stupeň polynómu v čitateli $n = 3$, v menovateli $n = 3$, funkcia nie je rýdzoracionálna.

2. Urobíme podiel polynómov a zapíšeme funkciu ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$(x^3 + 6x^2 - 6x + 7) : (x^3 - x^2 + x - 6) = 1$$

$$\begin{array}{r} \underline{-(x^3 - x^2 + x - 6)} \\ 0 + 7x^2 - 7x + 13 \end{array}$$

$$f(x) = 1 + \frac{7x^2 - 7x + 13}{x^3 - x^2 + x - 6}$$

3. Rozložíme rýdzoracionálnu funkciu $g(x)$ na parciálne zlomky

$$f(x) = 1 + \frac{7x^2 - 7x + 13}{x^3 - x^2 + x - 6}$$

rýdzoracionálna funkcia $g(x)$

a) kanonický rozklad menovateľa funkcie $g(x)$

$$g(x) = \frac{7x^2 - 7x + 13}{x^3 - x^2 + x - 6}$$

$$x^3 - x^2 + x - 6 \quad \text{možné korene} \quad \frac{D(6)}{D(1)} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

	1	-1	1	-6
2		2	2	6
	1	1	3	0

$$x^3 - x^2 + x - 6 = (x - 2)(x^2 + x + 3)$$

v R sa nedá ďalej rozložiť

b) úprava funkcie $g(x)$ na parciálne zlomky

$$g(x) = \frac{7x^2 - 7x + 13}{x^3 - x^2 + x - 6} = \frac{7x^2 - 7x + 13}{(x - 2)(x^2 + x + 3)}$$

$$g(x) = \frac{7x^2 - 7x + 13}{(x - 2)(x^2 + x + 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 3}$$

$$g(x) = \frac{7x^2 - 7x + 13}{(x-2)(x^2 + x + 3)} = \frac{A(x^2 + x + 3) + (Bx + C)(x-2)}{(x-2)(x^2 + x + 3)}$$

$$7x^2 - 7x + 13 = A(x^2 + x + 3) + (Bx + C)(x-2)$$

c) určenie koeficientov A, B, C pomocou dosadzovacej metódy

$$\begin{aligned} x = 2: \quad 7 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 13 &= A(4 + 2 + 3) \\ 27 &= 9A \quad A = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 0: \quad 13 &= 3A + C(0 - 2) \\ 13 &= 3 \cdot 3 - 2C \\ 2C &= 9 - 13 \quad C = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 1: \quad 7 - 7 + 13 &= 5A + (B + C)(1 - 2) \\ 13 &= 15 + (B - 2)(-1) \\ -2 &= -B + 2 \\ B &= 4 \end{aligned}$$

d) Zápis pôvodnej funkcie f(x) pomocou parciálnych zlomkov

$$f(x) = 1 + \frac{7x^2 - 7x + 13}{x^3 - x^2 + x - 6} = \frac{3}{x-2} + \frac{4x-2}{x^2+x+3}$$

Dú: Mat 2 – str. 17 / 2, 8, 11, 12, 20, 21, 27

Neurčitý integrál

Neurčitý integrál – píšeme

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

$F(x)$ – primitívna funkcia, c – integračná konštanta

Platí: $F'(x) = f(x)$, integrál je opačná operácia k derivácií

$$(x^2 + 1)' = 2x \leftrightarrow \int 2x dx = 2 \frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$$

Vzťahy:

integrál zo súčinu konštanty k , kde k je reálne číslo, a funkcie $f(x)$ je

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx = k F(x) + c,$$

integrál zo súčtu (rozdielu) funkcií $f(x)$ a $g(x)$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x) + c.$$

Základné vzorce:

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + c$
- $\int 1 dx = x + c$

Pr. 1: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(3x^2 + \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{x^8} + 2x \right) dx$$

Pr. 2 : Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(4\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{9x^3} \right) dx$$

Pr. 3: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{1}{5} x^9 + \sqrt[4]{x} + \frac{1}{x^4} \right) dx = \int \frac{1}{5} x^9 dx + \int \sqrt[4]{x} dx + \int \frac{1}{x^4} dx$$

$$= \frac{1}{5} \int x^9 dx + \int x^{\frac{1}{4}} dx + \int x^{-4} dx =$$

$$\sqrt[k]{x^n} = x^{\frac{n}{k}}$$

$$= \frac{1}{5} \frac{x^{9+1}}{9+1} + \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C =$$

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$= \frac{1}{5} \frac{x^{10}}{10} + 4 \frac{\sqrt[4]{x^5}}{5} - \frac{1}{3} \frac{1}{x^3} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Pr. 4: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{4}{3x^2} - \frac{2}{x} + \sqrt[3]{x^2} + \cos x + 2 \right) dx$$

Pr. 5: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{5}{x^6} + 3 \sin x + e^x - 5 \right) dx = 5 \int x^{-6} dx + 3 \int \sin x dx + \int e^x dx - 5 \int 1 dx =$$

$$= 5 \frac{x^{-6+1}}{-5} - 3 \cos x + e^x - 5x + C$$

$$= \frac{-1}{x^5} - 3 \cos x + e^x - 5x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int 1 dx = x + C$$

Pr. 6: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left[(x + 1)(2\sqrt{x} + 3) + \frac{3x^2 + x - 1}{\sqrt{x}} \right] dx$$

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

Pr. 7: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left[x(x+1)(x-2) + \frac{x+5}{x^3} \right] dx = \int \left[x(x^2 - 2x + x - 2) + \frac{x}{x^3} + \frac{5}{x^3} \right] dx =$$

$$\int \left[(x^3 - x^2 - 2x) + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right] dx =$$

$$= \int x^3 dx - \int x^2 dx - 2 \int x dx + \int x^{-2} dx + 5 \int x^{-3} dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-1}}{-1} + 5 \frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{1}{x} - \frac{5}{2x^2} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Pr. 8: Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left((x + 2)^3 - 3^x + \frac{5}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{10}{x} \right) dx$$

Dú: Mat 2 – str. 21 / 6, 8, 10, 11, 14, 17, 18, 21, 24, 28, 33, 39, 41, 43, 44, 50

3. Malá písomka

1. (0,2 b) Rozložte na súčet parciálnych zlomkov funkciu

$$f(x) = \frac{3x^2+4x+5}{(x-4)^3(x^2+x+2)} = \frac{A}{(x-4)^3} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{x-4} + \frac{Dx+E}{x^2+x+2}$$

0,05 0,05 0,05 0,05

2. (0,3b) Napíšte vzorce neurčitých integrálov

a) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 0,05

d) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$ 0,05

b) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ 0,05

e) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ 0,05

c) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$ 0,05

f) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$ 0,05

3. Cvičný Upravte na spoločného menovateľa

$$f(x) = \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{3x}{x-3} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x-3) + 3x(x+2)^2 - (x+2)(x-3)}{(x+2)^2(x-3)}$$