Matematika 2 – 4.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Polynómy
Rozklad racionálnej funkcie na elementárne (parciálne) zlomky

Funkciu $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nazývame **racionálnou funkciou.**

Ak

I. *n* < *m* je funkcia *f* (*x*) **rýdzoracionálna**

II. *n* ≥*m* je funkcia *f* (*x*) **nerýdzoracionálna**

I. Vieme rozložiť na súčet parciálnych zlomkov

$$\frac{A}{x-\alpha}, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^n}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

kde $A, B, C, \alpha, p, q \in R,\ n \in N,\ p^2 - 4q < 0.$

II. Predelíme a vyjadríme ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie, ktorú rozložíme na súčet parciálnych zlomkov

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}, st\ R(x) < m$$

Príklady rozkladu na parciálne zlomky

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-\alpha_1)^1.(x-\alpha_2)^1(x-\alpha_3)^1} = \frac{A}{(x-\alpha_1)} + \frac{B}{(x-\alpha_2)} + \frac{C}{(x-\alpha_3)}$$

3 reálne korene = 3 zlomky

(počet exponentov v menovateli = počet zlomkov)

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-\alpha_1)^2.(x-\alpha_2)^1} = \frac{A}{(x-\alpha_1)^2} + \frac{B}{(x-\alpha_1)} + \frac{C}{(x-\alpha_2)}$$

2 - násobný koreň = 3 zlomky

(súčet mocnín v menovateli 2+1 = 3)

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-\alpha_1)^2.(x-\alpha_2)^1(x^2+px+q)^1} = \frac{A}{(x-\alpha_1)^2} + \frac{B}{(x-\alpha_1)} + \frac{C}{(x-\alpha_2)} + \frac{Dx+E}{x^2+px+q}$$

súčet exponentov 2 + 1 + 1 + 1 = 4 = 4 zlomky

Pr. 1 – 17 / 1: rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{2x^2+10x-18}{x^3-2x^2-5x+6}$

1. Zistíme, či je funkcia rýdzoracionálna

2. Urobíme kanonický rozklad menovateľa na súčin koreňových činiteľov

3. Vyjadríme racionálnu funkciu pomocou parciálnych zlomkov a upravíme na spoločného menovateľa

4. Na vyjadrenie koeficientov A, B, C použijeme dosadzovaciu metódu (za neznámu *x* v rovnici dosadzujeme korene menovateľa, prípadne ďalšie možné hodnoty, napr. 0)

Pr. 2 – 17 / 14: rozložte v **R** na parciálne zlomky: $$\frac{4x^2+3x+2}{2x^3+3x^2-1}$$

Pr. 3 – 17 / 28: rozložte v **R** na parciálne zlomky: $$\frac{x^2+7x+3}{x^4+2x^3+x+2}$$

Pr. 4: rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2-x-2}$

$$x^3+2x^2-x-2 = x(x^2-1)+2(x^2-1) = (x^2-1)(x+2) = (x+1)(x-1)(x+2)$$

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A(x+1)(x+2)+B(x+2)(x-1)+C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$3x^2+2x+1 = A(x+1)(x+2)+B(x+2)(x-1)+C(x+1)(x-1)$$

$x=-2$: $\quad 3(-2)^2+2(-2)+1 = C(-2+1)(-2-1)$

$$9 = 3C$$
$$C = 3$$

$x=-1$: $\quad 3(-1)^2+2(-1)+1 = B(-1+2)(-1-1)$

$$2 = -2B$$
$$B = -1$$

$x=1$: $\quad 3(1)^2+2(1)+1 = A(1+1)(1+2)$

$$6 = 6A$$
$$A = 1$$

$$\boldsymbol{\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x+2}}$$

Pr. 5 – 17 / 6: rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{x^4 - 3x^2 + 17x - 23}{x^3 - 7x + 6}$

1. **Zistíme, či je funkcia rýdzoracionálna**

2. **Ak nie je rýdzoracionálna, urobíme podiel polynómov a zapíšeme funkciu ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie g(x)**

3. Rozložíme rýdzoracionálnu funkciu g(x) na parciálne zlomky

Pr. 6 – 17 / 22: rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\frac{x^3+6x^2-6x+7}{x^3-x^2+x-6}$

1. **Zistíme, či je funkcia rýdzoracionálna –** stupeň polynómu v čitateli n = 3, v menovateli n = 3, funkcia nie je rýdzoracionálna.

2. **Urobíme podiel polynómov a zapíšeme funkciu ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie**

$$(x^3+6x^2-6x+7):(x^3-x^2+x-6)=1$$
$$\underline{-(x^3-x^2+x-6)}$$
$$0+7x^2-7x+13$$

$$f(x)=1+\frac{7x^2-7x+13}{x^3-x^2+x-6}$$

3. **Rozložíme rýdzoracionálnu funkciu g(x) na parciálne zlomky**

rýdzoracionálna funkcia g(x)

$$f(x)=1+\frac{7x^2-7x+13}{x^3-x^2+x-6}$$

a) kanonický rozklad menovateľa funkcie g(x)

$$g(x) = \frac{7x^2 - 7x + 13}{x^3 - x^2 + x - 6}$$

$x^3 - x^2 + x - 6$ možné korene $\frac{\mathbf{D(6)}}{\boldsymbol{D(1)}} = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{3}, \pm\mathbf{6}\}$

	1	**-1**	**1**	**-6**
2		2	2	6
	1	1	3	**0**

$$x^3 - x^2 + x - 6 = (x-2)(x^2 + x + 3)$$

v R sa nedá ďalej rozložiť

b) úprava funkcie g(x) na parciálne zlomky

$$g(x) = \frac{7x^2 - 7x + 13}{x^3 - x^2 + x - 6} = \frac{7x^2 - 7x + 13}{(x-2)(x^2 + x + 3)}$$

$$g(x) = \frac{7x^2 - 7x + 13}{(x-2)(x^2 + x + 3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 3}$$

$$g(x)=\frac{7x^2-7x+13}{(x-2)(x^2+x+3)}=\frac{A\,(x^2+x+3)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+x+3)}$$

$$7x^2-7x+13=A(x^2+x+3)+(Bx+C)(x-2)$$

c) určenie koeficientov A, B, C pomocou dosadzovacej metódy

$x=2$: $\quad 7.4-7.2+13=A(4+2+3)$

$$27=9A \qquad A=3$$

$x=0$: $\quad 13=3A+C(0-2)$

$$13=3.3-2C$$

$$2C=9-13 \qquad C=-2$$

$x=1$: $\quad 7-7+13=5A+(B+C)(1-2)$

$$13=15+(B-2)(-1)$$

$$-2=-B+2$$

$$B=4$$

d) Zápis pôvodnej funkcie f(x) pomocou parciálnych zlomkov

$$f(x)=1+\frac{7x^2-7x+13}{x^3-x^2+x-6}=\frac{3}{x-2}+\frac{4x-2}{x^2+x+3}$$

Dú: Mat 2 – str. 17 / 2, 8, 11, 12, 20, 21, 27