Matematika 2 – 5.cvičenie

príprava

Neurčitý integrál

Neurčitý integrál – píšeme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

c – integračná konštanta, $F(x)$ – primitívna funkcia

Vzťahy:

integrál zo súčinu konštanty k, kde k je reálne číslo, a funkcie $f(x)$ je

$$\int k\, f(x) dx = k \int f(x) dx = k\, F(x) + c,$$

integrál zo súčtu (rozdielu) funkcií $f(x)$ a $g(x)$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x) + c.$$

Základné vzorce:

- $\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x\, dx = e^x + c$
- $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{cotg} x + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + c$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + c$

$\int 1\, dx = x + c$

Substitučná metóda riešenia neurčitých integrálov

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \int f(t)\mathrm{d}t$$

substitúcia

Postup pri riešení:

1. Nájdeme v integráli zloženú funkciu $f(\varphi(x))$ a deriváciu jej vnútornej funkcie $\varphi'(x)\mathrm{d}x$.
2. Zavedieme substitúciu za $\varphi(x) = t$ a $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.
3. Integrál s novou premennou ***t*** integrujeme podľa pravidiel a vzorcov pre integrovanie.
4. Vo výsledku integrálu nahradíme ***t*** pôvodným výrazom, za ktorý bola zavedená substitúcia.