NMPaMŠ – 4.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

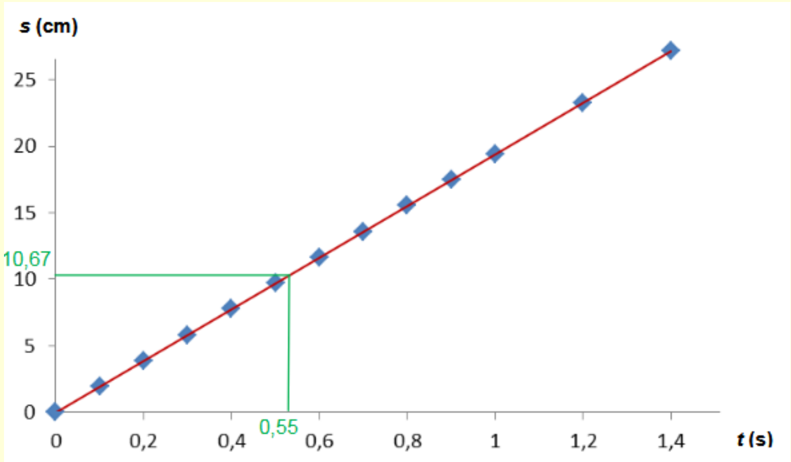
Aproximácia funkcií

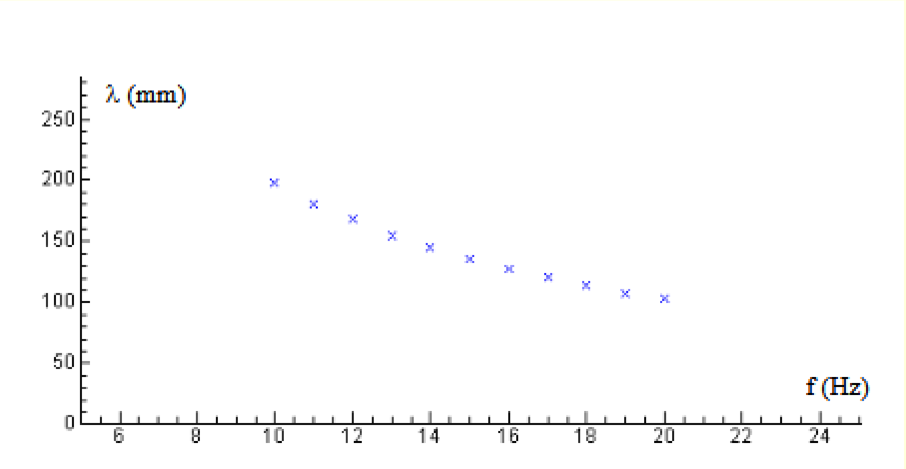
Ak máme množinu hodnôt x_i, pre ktoré poznáme $f(x_i)$, a

a) chceme poznať hodnotu $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x_k})$ **pre** $\boldsymbol{x_k}$, ktorý nie je z tejto množiny

b) chceme viesť touto závislosťou **najvhodnejšiu funkciu.**

Hľadáme vhodnú funkciu $g(x)$, ktorou nahradíme funkciu $f(x)$.Tento proces sa nazýva **aproximácia**.





Dva spôsoby aproximácie: a) Lagrangeov interpolačný polynóm

b) metóda najmenších štvorcov

1. Lagrangeov interpolačný polynóm

Pri aproximácii funkcie $f(x)$ danej v $\boldsymbol{n+1}$ bodoch (daná tabuľkou) použijeme **Lagrangeov interpolačný polynóm** $\boldsymbol{g(x) = L_n(x)}$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

x_i – uzlové body funkcie = $n + 1$

n – stupeň Lagrangeovho polynómu

Pr. 1: Zostrojte Lagrangeov interpolačný polynóm pre funkciu $f(x)$, ktorá je daná tabuľkou.

$\boldsymbol{i}$	**0**	**1**	**2**	**3**
$\boldsymbol{x_i}$	-1	0	2	4
$\boldsymbol{y_i = f(x_i)}$	5	2	-4	-10

1. Určíme počet uzlových bodov $f(x)$ a stupeň LP

počet uzlových bodov: $\boldsymbol{x_i}$ = 4 = *n* + 1 stupeň LP: *n* = 3

2. Zapíšeme Lagrangeov polynóm

$$L_3(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + l_2(x)f(x_2) + l_3(x)f(x_3)$$

3. Vypočítame jednotlivé $l_i(x)$

$$\boldsymbol{l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}} = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(-1-0)(-1-2)(-1-4)}$$

$$l_0(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{-15}$$

$$\boldsymbol{l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}} = \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(0+1)(0-2)(0-4)}$$

$$l_1(x) = \frac{x^3-5x^2+2x+8}{8}$$

$$\boldsymbol{l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_1-x_3)}} = \frac{(x+1)(x-0)(x-4)}{(2+1)(2-0)(2-4)}$$

$$l_2(x) = \frac{x^3-3x^2-4x}{-12}$$

$$\boldsymbol{l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}} = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(4+1)(4-0)(4-2)}$$

$$l_3(x) = \frac{x^3-2x^2-2x}{40}$$

4. Vypočítame Lagrangeov polynóm

$$L_3(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + l_2(x)f(x_2) + l_3(x)f(x_3)$$

$$L_3(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{-15}.\mathbf{5} + \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{8}.\mathbf{2} + \frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{-12}.(\mathbf{-4}) + \frac{x^3 - 2x^2 - 2x}{40}.(\mathbf{-10})$$

z tabuľky f(x)

$$L_3(x) = \frac{-4x^3 + 24x^2 - 32x + 3x^3 - 15x^2 + 6x + 24 + 4x^3 - 12x^2 - 16x - 3x^3 + 3x^2 + 6x}{12}$$

$$L_3(x) = \frac{-36x + 24}{12} = -3x + 2$$

Ak máme určiť hodnotu $f(x)$ pre x, ktoré nie je z tabuľky, dosadíme do $L_n(x)$ príslušné x

Napr. pre x = 1 $L_3(1) = -3.1 + 2 = -1$

Pr. 2: Zostrojte Lagrangeov interpolačný polynóm pre funkciu $f(x)$, ktorá je daná tabuľkou a určte hodnotu funkcie v bode $x = 3$.

$\boldsymbol{i}$	**0**	**1**	**2**
$\boldsymbol{x_i}$	0	1	5
$\boldsymbol{y_i = f(x_i)}$	2	3	147

počet uzlových bodov: $\boldsymbol{x_i}$ = 3 = *n* + 1 stupeň LP: *n* = 2

$$L_2(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + l_2(x)f(x_2)$$

$$\boldsymbol{l_0(x)} = \frac{\boldsymbol{(x-x_1)(x-x_2)}}{\boldsymbol{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}} = \frac{(x-1)(x-5)}{(0-1)(0-5)} = \frac{x^2-6x+5}{5}$$

$$\boldsymbol{l_1(x)} = \frac{\boldsymbol{(x-x_0)(x-x_2)}}{\boldsymbol{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}} = \frac{(x-0)(x-5)}{(1-0)(1-5)} = \frac{x^2-5x}{-4}$$

$$\boldsymbol{l_2(x)} = \frac{\boldsymbol{(x-x_0)(x-x_1)}}{\boldsymbol{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}} = \frac{(x-0)(x-1)}{(5-0)(5-1)} = \frac{x^2-x}{20}$$

$$L_2(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{5} . 2 + \frac{x^2 - 5x}{-4} . 3 + \frac{x^2 - x}{20} . 147$$

$$L_2(x) = \frac{8x^2 - 48x + 40 - 15x^2 + 75x + 147x^2 - 147x}{20}$$

$$\boldsymbol{L_2(x) = \frac{140x^2 - 120x + 40}{20} = 7x^2 - 6x + 2}$$

$$L_2(3) = 7.9 - 6.3 + 2 = 47$$

2. Metóda najmenších štvorcov

Máme množinu hodnôt x_i, pre ktoré poznáme y_i, $i = 0, 1, \ldots n$. Chceme viesť touto závislosťou najvhodnejšiu funkciu.

Metóda najmenších štvorcov umožňuje pomocou nameraných hodnôt f(x) vypočítať parametre funkcie $g(x) = \varphi(x)$, ktorou budeme aproximovať nameraného hodnoty.

Funkcia, ktorou budeme aproximovať

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x)$$

kde k = 0,1, 2, ...

pre k = 1 (funkcia y(x) má dva parametre a_0, a_1) $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i)$

Sústava rovníc

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_0(x_i),$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_1(x_i).$$

Pri použití MNŠ porovnávame danú funkciu φ(x), ktorou máme aproximovať odmeranú závislosť f(x) so všeobecným predpisom funkcie

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i)$$

zistíme, čomu sa rovnajú jednotlivé členy:

Napr. $\underline{g(x) = a_1 x + a_0}$

$\varphi_0(x_i) = 1$

$\varphi_1(x_i) = x_i$

$\varphi(x) = g(x) = y_i$

Pr. 3: Pre hodnoty zadané tabuľkou, určte metódou najmenších štvorcov optimálne hodnoty parametrov a_0 a a_1 v závislosti $g(x) = a_0 + a_1 \sin x$.

i	0	1	2
x_i	1	3	4
$y_i = f(x_i)$	6	2	1

1. Určíme počet parametrov vo funkcii g(x) a zapíšeme funkciu φ(x), ktorou budeme aproximovať.

2 parametre - $a_0, a_1,\ \varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$

2. Porovnáme funkciu φ(x) s danou funkciou g(x).

$$g(x) = a_0 1 + a_1 \sin x$$
$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$$

$$\varphi_0(x_i) = 1,\ \varphi_1(x_i) = \sin x_i$$

3. Napíšeme sústavu rovníc pre danú funkciu = počet parametrov.

$$a_0 \sum_{i=0}^{2} \varphi_0(x).\varphi_0(x) + a_1 \sum_{i=0}^{2} \varphi_0(x).\varphi_1(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i.\varphi_0(x)$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{2} 1.1 + a_1 \sum_{i=0}^{2} 1.\sin x_i = \sum_{i=0}^{2} y_i.1$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{2} \varphi_0(x).\varphi_1(x) + a_1 \sum_{i=0}^{2} \varphi_1(x).\varphi_1(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i.\varphi_1(x)$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{2} 1.\sin x_i + a_1 \sum_{i=0}^{2} 1.(\sin x_i)^2 = \sum_{i=0}^{2} y_i.\sin x_i$$

4. Vypočítame jednotlivé sumy.

$$\sum_{i=0}^{2} y_i.1 = 6 + 2 + 1 = 9$$

$$\sum_{i=0}^{2} 1.1 = 1 + 1 + 1 = 1 \quad \sum_{i=0}^{2} 1.(\sin x_i)^2 = (\sin^2 1)(\sin^2 3) + (\sin^2 4) = 1{,}301$$

$$\sum_{i=0}^{2} 1.\sin x_i = \sin 1 + \sin 3 + \sin 4 = 0{,}226 \quad \sum_{i=0}^{2} y_i.\sin x_i = 6\sin 1 + 2\sin 3 + \sin 4 = 4{,}574$$

5. Zostavíme sústavu rovníc a vypočítame hodnoty parametrov.

$$a_0 3 + a_1 0{,}226 = 9$$

$$a_0 0{,}226 + a_1 1{,}301 = 4{,}574$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 0{,}226 \\ 4{,}574 & 1{,}301 \end{vmatrix} = 10{,}675$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 0{,}226 & 4{,}574 \end{vmatrix} = 11{,}688$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0{,}226 \\ 0{,}226 & 1{,}301 \end{vmatrix} = 3{,}852$$

$$a_0 = \frac{D_1}{D} = 2{,}771$$

$$a_1 = \frac{D_2}{D} = 3{,}034$$

6. Zapíšeme funkciu g(x) = φ(x) s vypočítanými parametrami.

$$\boldsymbol{g(x) = 2,771 + 3,034 \sin x}$$

Pr. 4: Napíšte sústavu rovníc pre určenie parametrov a_0 a a_1 pomocou metódy najmenších štvorcov pre funkciu $g(x) = a_0 x^2 + a_1 \frac{1}{x}$ danú tabuľkou

i	0	1	2
x_i	1	2	5
$y_i = f(x_i)$	2	4	10

1. Určíme počet parametrov vo funkcii g(x) a zapíšeme funkciu φ(x), ktorou budeme aproximovať.

2 parametre - a_0, a_1, $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$

2. Porovnáme funkciu φ(x) s danou funkciou g(x).

$$g(x) = a_0 x^2 + a_1 \frac{1}{x}$$
$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$$

$$\varphi_0(x) = x^2,\ \varphi_1(x) = \frac{1}{x}$$

3. Napíšeme sústavu rovníc pre danú funkciu = počet parametrov.

$$a_0 \sum_{i=0}^{2} \varphi_0(x).\varphi_0(x) + a_1 \sum_{i=0}^{2} \varphi_0(x).\varphi_1(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i.\varphi_0(x)$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{2} {x_i}^4 + a_1 \sum_{i=0}^{2} {x_i}^2 \frac{1}{x_i} = \sum_{i=0}^{2} y_i.{x_i}^2$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{2} \varphi_0(x).\varphi_1(x) + a_1 \sum_{i=0}^{2} \varphi_1(x).\varphi_1(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i.\varphi_1(x)$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{2} {x_i}^2 \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{{x_i}^2} = \sum_{i=0}^{2} y_i.\frac{1}{x_i}$$

4. Vypočítame jednotlivé sumy.

$$\sum_{i=0}^{2} {x_i}^4 = 1^4 + 2^4 + 5^4 = 642$$

$$\sum_{i=0}^{2} y_i.{x_i}^2 = 2.1 + 4.4 + 10.25 = 268$$

$$\sum_{i=0}^{2} {x_i}^2 \frac{1}{x_i} = \sum_{i=0}^{2} x_i = 1 + 2 + 5 = 8$$

$$\sum_{i=0}^{2} y_i.\frac{1}{x_i} = \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{10}{5} = 6$$

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{1}{{x_i}^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25} = 1{,}29$$

5. Zostavíme sústavu rovníc.

$$a_0 642 + a_1 8 = 268$$

$$a_0 8 + a_1 1{,}29 = 6$$

Dú: Príklady na riešenie 1: C / 1 – 5, D / 1 - 8