

NMPaMŠ – 5.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Numerický výpočet určitého integrálu

1. Lichobežníková metoda

$$\int_a^b f(x) dx \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

Pr. 1: Vypočítajte daný integrál lichobežníkovou metódou s presnosťou $\varepsilon = 0,05$.

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx$$

1. Zvolíme interval $\langle a, b \rangle$, vypočítame hodnotu M_2 a horný odhad chyby pre určenie delenia n intervalu $\langle a, b \rangle$

$$\langle a, b \rangle = \langle 1, 4 \rangle$$

$$M_2 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$M_2 = \max_{x \in \langle 1, 4 \rangle} \left| -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \right| \quad \begin{array}{l} x = 1, \\ x = 4, \end{array} \quad \begin{array}{l} M_2 = 0,25 \\ M_2 = 0,03125 \end{array}$$

Poznámka: ak si uvedomíme, že $f''(x)$ je klesajúca stačí urobiť výpočet pre $x = 1$.

horný odhad chyby

$$|R_L(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon$$

$$\frac{(4-1)^3}{12n^2} 0,25 \leq 0,05$$

$$11,25 \leq n^2$$
$$3,35 \leq n$$

$$\frac{(4-1)^3}{12 \cdot 0,05} 0,25 \leq n^2$$

2. Určíme n delení intervalu a krok delenia h

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$3,35 \leq n \rightarrow \mathbf{n = 4}$$
 najbližšie celé číslo

3. Urobíme tabuľku s n delením intervalu $\langle a,b \rangle$, určíme x_i , $f(x_i)$

i	x_i	$f(x_i)$
0	$a = 1$	1
1	$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$	1,323
2	$\frac{10}{4}$	1,581
3	$\frac{13}{4}$	1,803
$4 = n$	$b = 4$	4

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$f(x_i) = \sqrt{x_i}$$

4. Vypočítame integrál

$$\int_a^b f(x) dx \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

$$L(4) = \frac{3}{2} \left[1 + 2 + 2 \cdot 4,707 \right] = 4,65525$$

5. Zapišeme výsledok vzhľadom na presnosť ε

$$L(4) \approx 4,66 \quad \varepsilon = 0,05$$

Pr. 2: Vypočítajte daný integrál lichobežníkovou metódou, ak je dané $n = 6$ a odhadnite chybu výpočtu.

$$\int_4^{6,4} \ln x \, dx$$

1. Určíme krok delenia h

2. Urobíme tabuľku s n delením intervalu, určíme x_i , $f(x_i)$

i	x_i	$f(x_i)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

3. Vypočítáme integrál

$$\int_a^b f(x) dx \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

4. Vypočítáme hodnotu M_2 a horný odhad chyby

$$M_2 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|$$

$$|R_L(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

5. Zapišeme výsledek

Pr. 3: Vypočítajte daný integrál lichobežníkovou metódou s presnosťou $\varepsilon = 0,02$.

$$\int_1^4 \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

1. Zvolíme interval $\langle a, b \rangle$, vypočítame hodnotu M_2 a horný odhad chyby pre určenie delenia n intervalu

$$\langle a, b \rangle = \langle 1, 4 \rangle$$

$$f(x) = (1+x)^{-2}$$

$$f'(x) = (-2)(1+x)^{-3}$$

$$f''(x) = 6(1+x)^{-4}$$

$$M_2 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|$$

$$M_2 = \max_{x \in \langle 1, 4 \rangle} \left| 6 \frac{1}{(x+1)^4} \right| \quad \begin{array}{ll} x = 1, & M_2 = 0,375 \\ x = 4, & M_2 = 0,0096 \end{array}$$

horný odhad chyby

$$|R_L(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon$$

$$\frac{(4-1)^3}{12n^2} 0,375 \leq 0,02$$

$$\frac{(4-1)^3}{12 \cdot 0,02} 0,375 \leq n^2$$

$6,49 \leq n \rightarrow n = 7$ najbližšie celé číslo

2. Určíme krok delenia h

$$h = \frac{b - a}{n} \quad h = \frac{4 - 1}{7} = \frac{3}{7}$$

3. Urobíme tabuľku s n delením intervalu, určíme $x_i, f(x_i)$

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	0,25
1	$\frac{10}{7}$	0,1696
2	$\frac{13}{7}$	0,1225
3	$\frac{16}{7}$	0,0926
4	$\frac{19}{7}$	0,0725
5	$\frac{22}{7}$	0,0583
6	$\frac{25}{7}$	0,0479
7	4	0,04

$$x_{i+1} = x_i + h \rightarrow x_1 = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

$$f(x_i) = \frac{1}{(1 + x_i)^2}$$

$$\sum_{i=1}^6 f(x_i) = 0,5634$$

$$f(1) = 0,25, f(4) = 0,04$$

4. Vypočítáme integrál

$$\int_a^b f(x) dx \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

$$L(7) = \frac{\overset{h}{\boxed{\frac{3}{7}}}}{2} \left[\underbrace{0,25}_{f(a)} + \underbrace{0,04}_{f(b)} + 2 \cdot \underbrace{0,5634}_{\sum_{i=1}^6 f(x_i)} \right] = 0,3036$$

↓
vz h i a do m
na E

5. Zapišeme výsledek

$$L(7) = 0,30$$

Dú:Príklady na riešenie 1: E / 1 – 5, F / 1 - 5