

NMPaMŠ – 6.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Numerický výpočet určitého integrálu

2. Simpsonova metoda

Pri tejto metóde je

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + 2f(x_{i+2})]$$

nazývame ho **elementárny vzorec**.

Pr. 1: Vypočítajte daný integrál Simpsonovou metódou pre $n = 10$ delení a urobte odhad chyby výpočtu

$$\int_0^5 \frac{1}{1+x} dx$$

1. Určíme krok delenia h $h = \frac{b - a}{n} = \frac{5 - 0}{10} = 0,5$

2. Urobíme tabuľku s n delením intervalu, určíme $x_i, f(x_i)$

i	x_i	$f(x_i)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

3. Vypočítáme integrál

$$\int_a^b f(x) dx \approx S(n) = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right]$$

4. Vypočítáme M_4

$$M_4 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(4)}(x)|$$

5. Horný odhad chyby

$$|R_S(n)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180n^4}$$

Pr. 2: Vypočítajte daný integrál Simpsonovou metódou pre $n = 6$ delení a urobte odhad chyby výpočtu. V tabuľke zaokrúhľujte na 5 desatinných miest.

$$\int_0^1 e^x dx$$

$$a = 0, b = 1, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6}$$

i	x_i	$f(x_i) = e^x$
0	0	1
1	1/6	1,18136
2	2/6	1,39561
3	3/6	1,64872
4	4/6	1,94773
5	5/6	2,30098
6	1	2,71828

$$\int_a^b f(x) dx \approx S(n) = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right]$$

$$S(6) = \frac{1}{18} [1 + 2,71828 + 4 \cdot 5,13106 + 2 \cdot 3,34334] = 1,71829$$

$$M_4 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(4)}(x)|$$

$$M_4 \geq \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |e^x| = 2,71829$$

$$f(x) = e^x$$

$$f^4(x) = e^x$$

$$|R_S(n)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180n^4}$$

$$|R_S(n)| \leq \frac{(1-0)^5 \cdot 2,71829}{180 \cdot 6^4} = 0,00001$$

$$\int_0^1 e^x dx \approx S(6) = 2,71829 \text{ s chybou } 0,00001$$

Pr. 3: Vypočítajte daný integrál Simpsonovou metódou pre $n = 8$ delení a urobte odhad chyby výpočtu.

$$\int_1^3 \sqrt{1 + 2x} \, dx$$

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - 1}{8} = \frac{1}{4}$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1,73205
1	$\frac{5}{4}$	1,87083
2	$\frac{6}{4}$	2
3	$\frac{7}{4}$	2,12132
4	$\frac{8}{4}$	2,23607
5	$\frac{9}{4}$	2,34521
6	$\frac{10}{4}$	2,44949
7	$\frac{11}{4}$	2,54951
8	3	2,64576

$$\int_a^b f(x) dx \approx S(n) = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right]$$

$$S(8) = \frac{1}{12} [1,73205 + 2,64576 + 4,8,88687 + 2,6,68556] = 4,4413675$$

$$M_4 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(4)}(x)|$$

$$M_4 \geq \max_{x \in \langle 1, 3 \rangle} \left| -15(1 + 2x)^{-\frac{7}{2}} \right| = 0,3208$$

$$|R_s(n)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180n^4}$$

$$|R_s(8)| \leq \frac{(3-1)^5 \cdot 0,3208}{180 \cdot 8^4} = 0,000014$$

$$f(x) = \sqrt{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{2}(1+2x)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{2}(1+2x)^{-\frac{7}{2}} \cdot 2 = -15(1+2x)^{-\frac{7}{2}}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+2x} dx \approx S(8) = 4,441368 \text{ s chybou } 0,000014$$

Dú:Príklady na riešenie 1: G / 1 – 5