

RIEŠENIE SÚSTAV NELINEÁRNYCH ROVNÍC (2 ROVNICE S 2 NEZNÁMYMI) NEWTONOVA METÓDA

UVAŽUJEME SÚSTAVU 2 ROVNÍC S 2 NEZNÁMYMI

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0 & (\square) \\ G(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

PREDPOKLADAJME, ŽE POZNÁME n -TÉ ITERÁCIE (x_n, y_n) HLÁDANÉHO RIEŠENIA A HLÁDAME NOVÉ "BLIŽŠIE" ITERÁCIE, KTORÉ SÚ OD PREDCHÁDZAJÚCEJ ITERÁCIE VZDIALENÉ O $\Delta x, \Delta y$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \quad (\heartsuit)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y$$

DOSADENÍM VZŤAHOV (\heartsuit) DO VZŤAHOV (\square) DOSTANEME:

$$\begin{aligned} F(x_n + \Delta x, y_n + \Delta y) &= 0 & (\Delta) \\ G(x_n + \Delta x, y_n + \Delta y) &= 0 \end{aligned}$$

TAKÚTO SÚSTAVU VIENE ROZVINITĚM FCIÍ F A G DO TAYLOROVHO RADU LINEARIZOVAŤ (TAYLOROV ROZVOJ KONČÍME PRI DIFERENCIÁLE 1. RADU)

$$\begin{aligned} F(x_n + \Delta x, y_n + \Delta y) &= F(x_n, y_n) + F'_x(x_n, y_n) \Delta x + F'_y(x_n, y_n) \Delta y + R_F \\ G(x_n + \Delta x, y_n + \Delta y) &= G(x_n, y_n) + G'_x(x_n, y_n) \Delta x + G'_y(x_n, y_n) \Delta y + R_G \end{aligned}$$

NEJAKÉ ZVÝŠKY O KTORÝCH PREDPOKLADÁME, ŽE SÚ ZANEDBATEĽNÉ

ROZVINITĚ F-ČIE DOSADÍME DO (Δ)

$$F(x_n, y_n) + F'_x(x_n, y_n) \Delta x + F'_y(x_n, y_n) \Delta y = 0$$

$$G(x_n, y_n) + G'_x(x_n, y_n) \Delta x + G'_y(x_n, y_n) \Delta y = 0$$

PO ÚPRAVE:

$$\begin{aligned} F'_x(x_n, y_n) \Delta x + F'_y(x_n, y_n) \Delta y &= -F(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) \Delta x + G'_y(x_n, y_n) \Delta y &= -G(x_n, y_n) \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

↓ KONŠTANTY ↓ NEZNÁME

AK ZO SÚSTAVY (\spadesuit) VYPOČÍTAME Δx A Δy , DOSADENÍM DO (\heartsuit) DOSTANEME ĎALŠIU "NOVÚ" ITERÁCIU (x_{n+1}, y_{n+1})

PRI TEJTO METÓDE SI ŠTARTOVACIE BODY (NULTÁ ITERÁCIA $\rightarrow (x_0, y_0)$) VIENE VOLIŤ LUBOVOĽNE (ALE VHODNĚ, ABY SME SA OD SKUTOČNÉHO RIEŠENIA NENACHÁZALI "PRÍLIŠ" DĽAĽKO).

ITERAČNÝ PROCES BUDEME UKONČOVAŤ, AK BUDE PLATIŤ:

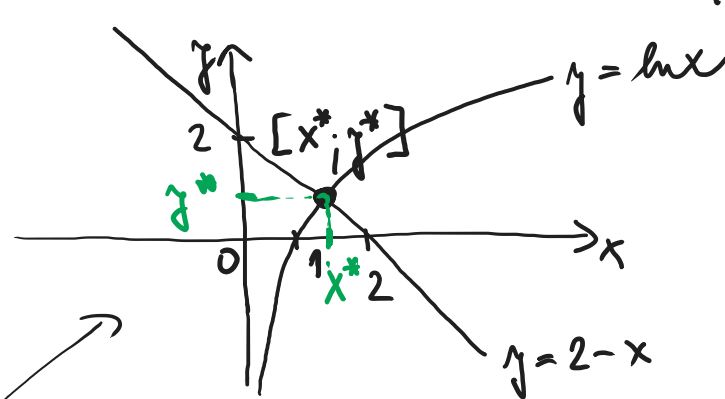
$$|\Delta x| < \epsilon \wedge |\Delta y| < \epsilon$$

POTOM HLÁDANÉ RIEŠENIE S PRESNOSŤOU ϵ BUDE $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta x \\ y_{n+1} = y_n + \Delta y \end{cases}$

PRÍKLAD 1: NEWT. MET. S PRESNOSŤOU $\epsilon = 5 \cdot 10^{-2} = 0,05$

RIEŠME SÚSTAVU ROVNÍC

$$\begin{aligned} F: \ln x - y &= 0 \\ G: 2 - x - y &= 0 \end{aligned}$$



$[x^*, y^*]$ - PRESNĚ SKUTOČNĚ RIEŠENIE
 $x^* \in \langle 1, 2 \rangle$
 $y^* \in \langle 0, 2 \rangle$

1) POMOČOU VHODNÉMU NÁČRTU ZVOLÍME ŠTARTOVACÍ ROD

$$x_0 = 1,2$$

$$y_0 = 0,8$$

2) VYTVORÍME ∇ PARCIÁLNE DERIVÁCIE A VYTVORÍME VŠEOBECNÚ SÚSTAVU (\spadesuit)

$$\begin{aligned} F'_x = \frac{1}{x} & \quad F'_y = -1 \\ G'_x = -1 & \quad G'_y = -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x_n} \cdot \Delta x - 1 \cdot \Delta y = -(\ln x_n - y_n) \\ -1 \cdot \Delta x - 1 \cdot \Delta y = -(2 - x_n - y_n) \end{cases}$$

3) POMOČOU VYTVORENEJ SÚSTAVY HLÁDAME Δx A Δy

$$\text{PRE } \begin{matrix} x_0 = 1,2 \\ y_0 = 0,8 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1,2} \Delta x - \Delta y = -\ln 1,2 + 0,8 \\ -\Delta x - \Delta y = -2 + 1,2 + 0,8 \end{cases}$$

NA VÝPOČET NEZNÁMYCH Δx A Δy POUŽIJEME CRAMEROVO PRAVIDLO

$$\begin{aligned} F'_x \cdot \Delta x + F'_y \cdot \Delta y &= -F \Rightarrow \Delta x = \frac{D_1}{D} \\ G'_x \cdot \Delta x + G'_y \cdot \Delta y &= -G \Rightarrow \Delta y = \frac{D_2}{D} \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \neq 0 \quad ; \quad D_1 = \begin{vmatrix} -F & F'_y \\ -G & G'_y \end{vmatrix} \quad ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} F'_x & -F \\ G'_x & -G \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0,833 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1,833 \quad ; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0,6176784 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -0,6176784 \quad ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0,833 & 0,6176784 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,6176784$$

$$\Delta x = 0,3369155 \quad |\Delta x| < \epsilon \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x \Rightarrow x_1 = 1,2 + 0,3369155 = 1,5369155$$

$$\Delta y = -0,3369155 \quad |\Delta y| < \epsilon \Rightarrow y_1 = y_0 + \Delta y \Rightarrow y_1 = 0,8 - 0,3369155 = 0,4630845$$

$$\text{PRE } \begin{matrix} x_1 = 1,53692 \\ y_1 = 0,46308 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 0,65065 \Delta x - \Delta y = 0,03331 \\ -\Delta x - \Delta y = -0,000001 \end{cases}$$

$$\Delta x = 0,02018 \Rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x \Rightarrow x_2 = 1,557097$$

$$\Delta y = -0,0218 \Rightarrow y_2 = y_1 + \Delta y \Rightarrow y_2 = 0,442291$$

$|\Delta x| < 0,05$
 $|\Delta y| < 0,05$ } VÝPOČET KONČÍME

$$(x^*, y^*)^T \approx (1,55709; 0,442291)^T \pm 0,05$$