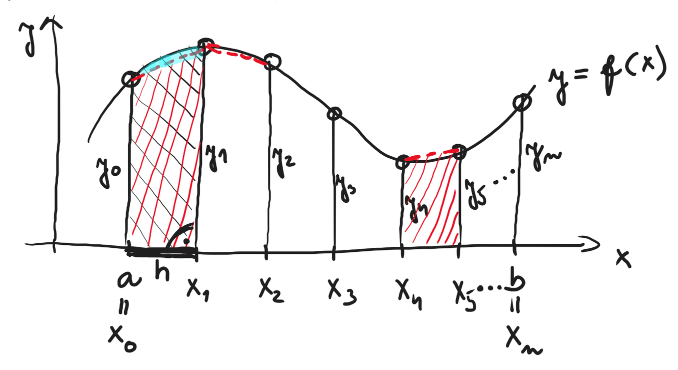
NUMERICKÝ VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU

- NIE KAŽDÁ F-CIA MUSÍ MAŤ PRIMITÍVNU F-CIU
- NÁJDENIE PRIMITÍVNEJ F-CIE MÔŽE BYŤ OBTIAŽNE

POČÍTAME $\int_a^b f(x)\,dx$

LICHOBEŽNÍKOVÁ METÓDA

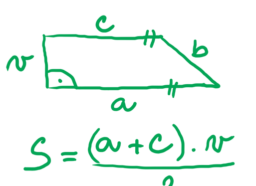
PRINCÍP METÓDY VYSVETLÍME NA OBRÁZKU. INTERVAL $\langle a, b\rangle$ ROZDELÍME NA n ROVNAKÝCH ČASTÍ POMOCOU UZLOVÝCH BODOV $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$, KDE $x_{i+1}=x_i+h$; PRIČOM $h=\frac{b-a}{n}$



F-CIU $f(x)$ NA KAŽDOM INTERVALE $\langle x_i; x_{i+1}\rangle$ NAHRADÍME LINEÁRNOU F-CIOU (ČERVENÁ ČIARKOVANÁ ÚSEČKA). TAKTO VZNIKNE n – PRAVOUHLÝCH LICHOBEŽNÍKOV.

$\int_a^b f(x)\,dx$ V SKUTOČNOSTI PREDSTAVUJE PLOCHU OBLASTI MEDZI F-CIOU $f(x)$ A OSOU O_x NA INTERVALE $\langle a, b\rangle$.

MY SKUTOČNÚ PLOCHU NAHRADÍME POMOCOU UVEDENÝCH LICHOBEŽNÍKOV, ČÍM SA DOPUSTÍME URČITEJ CHYBY.



$S=\frac{(a+c)\cdot v}{2}$

PLATÍ:
$$\boxed{\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)\,dx} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \boxed{\approx}$$
$$\approx \frac{h}{2}(y_0+y_1)+\frac{h}{2}(y_1+y_2)+\dots+\frac{h}{2}(y_{n-1}+y_n) =$$
$$= \boxed{\frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\dots+2y_{n-1}+y_n)} + R_L$$

ODHAD ABSOLÚTNEJ CHYBY (AKO ĎALEKO SME SA DOSTALI S NAŠÍM VÝSLEDKOM OD SKUTOČNEJ-PRESNEJ HODNOTY) => $|R_L|$

$$\boxed{|R_L| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2 < \varepsilon} \;;\; \boxed{M_2=\max_{\langle a,b\rangle}|f''(x)|}$$

PRÍKLAD 1: VYPOČÍTAJME $\int_{0,3}^{1} \ln(3x+1)\,dx$ PRE $n=7$, UROBME ODHAD CHYBY.

1) VYPOČÍTAME DĹŽKU KROKU $h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0,3}{7}=0,1$

2) VYTVORÍME TABUĽKU

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_{i+1}=x_i+h$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y_i=\ln(3x_i+1)$	0,6419	0,7885	0,9163	1,0296	1,1314	1,2238	1,3083	1,3863

y_0 $\quad\underbrace{0,7885+\dots+1,3083}_{6,3979}\quad$ y_7

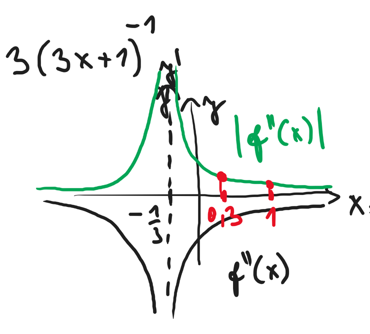
3) HODNOTY Z TABUĽKY DOSADÍME DO VZORCA PRE VÝPOČET INTEGRÁLU
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0+2\cdot\boxed{y_1+y_2+\dots+y_{n-1}}+y_n\right)$$
$$\int_{0,3}^{1} \ln(3x+1)\,dx \approx \frac{0,1}{2}\left(0,6419+2\cdot\boxed{6,3979}+1,3863\right) \doteq \underline{\underline{0,7412}}$$

4) UROBÍME ODHAD ABSOLÚTNEJ CHYBY
$$|R_L| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2 \;;\; M_2=\max_{\langle a,b\rangle}|f''(x)|$$

$f(x)=\ln(3x+1)$

$f'(x)=\frac{3}{3x+1}=3(3x+1)^{-1}$

$$\boxed{f''(x)=\frac{-9}{(3x+1)^2}}$$



$M_2=\max_{\langle 0,3;1\rangle}|f''(x)|=|f''(0,3)|= = 2,4931$

$$|R_L| \le \frac{(1-0,3)^3}{12\cdot 7^2}\cdot 2,4931 = \underline{\underline{0,0015}}$$

$$\int_{0,3}^{1} \ln(3x+1)\,dx \approx 0,7412 \pm 0,0015$$

PRÍKLAD 2: VYPOČÍTAJME PRESNÚ HODNOTU $\int_{0,3}^{1} \ln(3x+1)\,dx$ A POROVNAJME VÝSLEDOK S PRÍKLADOM 1.

$$\int_{0,3}^{1} 1\cdot\ln(3x+1)\,dx = \left| \begin{matrix} u=\ln(3x+1) & u'=\frac{3}{3x+1} \\ v'=1 & v=x \end{matrix} \right| = \left[x\cdot\ln(3x+1)\right]_{0,3}^{1} - \int_{0,3}^{1} \frac{3x+1-1}{3x+1}\,dx =$$
$$= \left[x\cdot\ln(3x+1)\right]_{0,3}^{1} - \int_{0,3}^{1}\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot 3}{3x+1}\right)dx = \left[x\cdot\ln(3x+1)-x+\frac{1}{3}\ln|3x+1|\right]_{0,3}^{1} =$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

$$= \left(1\cdot\ln 4 - 1 + \frac{1}{3}\ln 4\right) - \left(0,3\cdot\ln 1,9 - 0,3 + \frac{1}{3}\ln 1,9\right) \doteq 0,7419$$

$|0,7412-0,7419| = \underline{\underline{0,0007}} \le 0,0015$ → ODHAD ABSOL. CHYBY Z PRÍKLADU 1

→ URČITE TO PLATÍ

PRÍKLAD 3: VYPOČÍTAJME $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ S PRESNOSŤOU $\varepsilon=0,01$.

1) ZO VZORCA PRE ODHAD CHYBY URČÍME $\underline{\underline{n}}$ A POMOCOU NEHO VYPOČÍTAME DĹŽKU KROKU h.
$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2 < \varepsilon \Rightarrow 12n^2\cdot\varepsilon > (b-a)^3\cdot M_2 \Rightarrow \boxed{n > \sqrt{\frac{(b-a)^3\cdot M_2}{12\cdot\varepsilon}}} \quad (*)$$

$f(x)=e^{-x^2}$

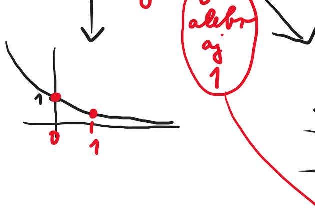
$f'(x)=-2x\cdot e^{-x^2}$

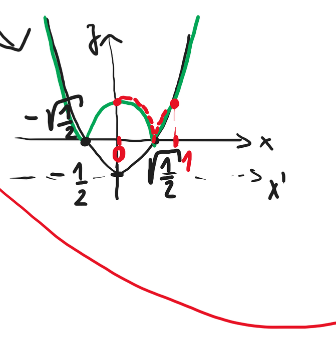
$f''(x)=-2\cdot e^{-x^2}+(-2x)\cdot(-2x\,e^{-x^2})=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=e^{-x^2}\cdot(-2+4x^2)=4e^{-x^2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$

$$M_2=\max_{\langle 0,1\rangle}|f''(x)|=\max\left|4\cdot e^{-x^2}\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\right|=\max\left(4\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^{x^2}\cdot\left|x^2-\frac{1}{2}\right|\right)\le$$
$$\le 4\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^{x^2}\cdot\left|x^2-\frac{1}{2}\right| = 4\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^0\cdot\left|0-\frac{1}{2}\right| = 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{2}}$$

0

0 alebo aj 1





$\left|x^2-\frac{1}{2}\right|=\left|\left(x-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\right|\left|\left(x+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\right|$

$x=0$ $\quad$ $x=1$

$\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$(*)$ $n > \sqrt{\frac{(1-0)^3\cdot 2}{12\cdot 0,01}} \doteq \sqrt{16,67} \doteq 4,08 \Rightarrow \boxed{n=5}$ ASPOŇ

$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{5}=0,2$

2) VYTVORÍME TABUĽKU

i	0	1	2	3	4	5
x_{i+1}	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$y_i = e^{-(x_i)^2}$	1	0,96079	0,85214	0,69768	0,52729	0,36788

y_0 $\quad\underbrace{0,96079+\dots+0,52729}_{3,03790}\quad$ y_5

3) DOSADENÍM DO VZORCA PRE VÝPOČET INTEGRÁLU DOSTANEME
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{0,2}{2}\left(1+2\cdot\boxed{3,0379}+0,36788\right) \doteq \underline{\underline{0,74437}} \pm 0,01$$