APROXIMÁCIA F-CIÍ

UVEDIEME 2 METÓDY, KTORÉ MÔŽEME POUŽIŤ NA APROXIMÁCIU (NAHRADENIE) DANÝCH ÚDAJOV (NAPR. EXPERIMENTÁLNYCH) POMOCOU TEORETICKÝCH ZÁVISLOSTÍ.

VO VŠEOBECNOSTI SA BUDEME ZAOBERAŤ APROXIMÁCIOU F-CIE f POMOCOU F-CIE g. FUNKCIU g VOLÍME NA ZÁKLADE INFORMÁCIÍ O FCII f.

F-CIU g HĽADÁME OBYČAJNE V TVARE $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot g_i(x)$.

ZA FCIE g_i; $i = 0, 1, \dots, n$ BERIEME VÄČŠINOU ELEMENTÁRNE FCIE $(1, x; x^1; x^2; \dots)$.

KOEFICIENTY c_i; $i = 0, 1, \dots, n$ URČUJEME POMOCOU VHODNÝCH KRITÉRIÍ

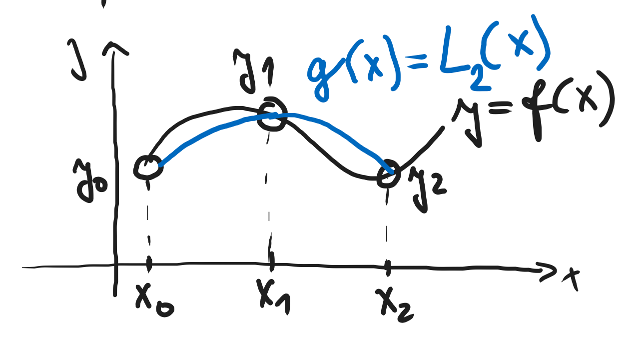
MY SA BUDEME ZAOBERAŤ

a) INTERPOLAČNOU APROXIMÁCIOU (LAGRANGEOV INTERPOLAČNÝ POLYNÓM)

b) APROXIMÁCIOU METÓDOU NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV (MNŠ)

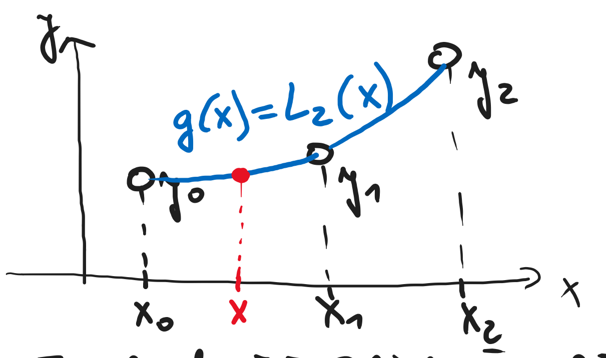
LAGRANGEOV INTERPOLAČNÝ POLYNÓM

PRINCÍP TEJTO METÓDY SPOČÍVA V TOM, ŽE F-CIU f (JEJ $n+1$ UZLOVÝCH BODOV) APROXIMUJEME POLYNOMICKOU F-CIOU (POLYNÓMOM), PRIČOM MUSÍ PLATIŤ, ŽE FUNKČNÉ HODNOTY POLYNÓMU MUSIA BYŤ V UZLOVÝCH BODOCH $(x_0; x_1; x_2; \dots; x_n)$ ROVNAKÉ AKO HODNOTY APROXIMOVANEJ FCIE f.



F-CIA f JE ZADANÁ PREDPISOM

(NAPR. PRI VÝPOČTE INTEGRÁLU Z FCIE, KU KTOREJ NEPOZNÁM PRIMITÍVNU F-CIU)



F-CIA f JE ZADANÁ TABUĽKOU (BEZ PREDPISU)

(NAPR. PRI VÝPOČTE HODNÔT V INÝCH BODOCH AKO V UZLOVÝCH)

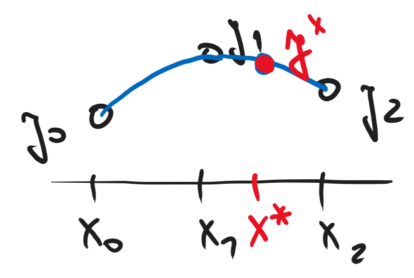
LAGRANGEOV INTERPOLAČNÝ POLYNÓM PRE UZLOVÉ BODY $\underbrace{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n}_{n+1}$ MÁ TVAR:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})\bullet(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})\bullet(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \cdot y_i \quad (\heartsuit)$$

n ↓ STUPEŇ POLYNÓMU

VYUŽITIE TEJTO METÓDY

a) POTREBUJEME POZNAŤ „PRIBLIŽNÚ" FUNKČNÚ HODNOTU V BODE x^*, KTORÝ NIE JE UZLOVÝM BODOM



POSTUP: VYTVORÍME LAGR. POLYNÓM $L_n(x)$ A DOSADÍME ZA $x = x^* \Rightarrow L_n(x^*) = y^*$

b) OPAČNÁ ÚLOHA – POZNÁM HODNOTU y^*, ALE NEVIEM, AKÉMU „PRIBLIŽNÉMU" x^* BY MOHLA PRISLÚCHAŤ

POSTUP: VYTVORÍME INVERZNÝ LAGR. POLYNÓM (VO VZŤAHU ($\heartsuit$) ZAMENÍME $x \Leftrightarrow y$) A POMOCOU INVERZNÉHO POLYNÓMU VYPOČÍTAME $x^* = L^{-1}(y)$

$$L_n^{-1}(y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(y-y_0)(y-y_1)\cdots\bullet\cdots(y-y_n)}{(y_i-y_0)(y_i-y_1)\cdots\bullet\cdots(y_i-y_n)} \cdot x_i$$

c) FCIU ZADANÚ TABUĽKOU POTREBUJEME NAHRADIŤ F-CIOU POMOCOU KONKRÉTNEHO PREDPISU $\Rightarrow g(x) = L_n(x)$

POSTUP: VYTVORÍME LAGR. INTERP. POLYNÓM VO VŠEOBECNOM TVARE

PRÍKLAD 1: F-CIU DANÚ TABUĽKOU APROXIMUJME POMOCOU LAGR. INTERP. POLYNÓMU

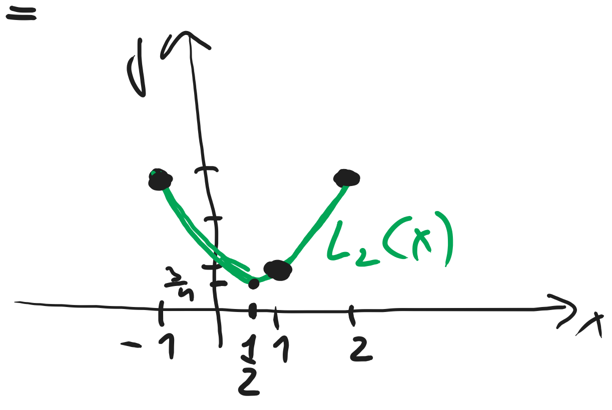
	x_0	x_1	x_2
x_i	-1	1	2
y_i	3	1	3
	y_0	y_1	y_2

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \cdot y_2 =$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} \cdot 3 + \frac{\overbrace{(x-(-1))}^{(x+1)}(x-2)}{(1-(-1))(1-2)} \cdot 1 + \frac{\overbrace{(x-(-1))}^{(x+1)}(x-1)}{(2-(-1))(2-1)} \cdot 3 =$$

$$= \underline{\underline{x^2 - x + 1}}$$

$$= \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} + 1 = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}$$



CHYBA APROXIMÁCIE FCIE PRI POUŽITÍ LAGR. POLYNÓMU

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)| ;$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in \langle x_0; x_n \rangle = I} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

x ↓ NIE UZLOVÝ BOD