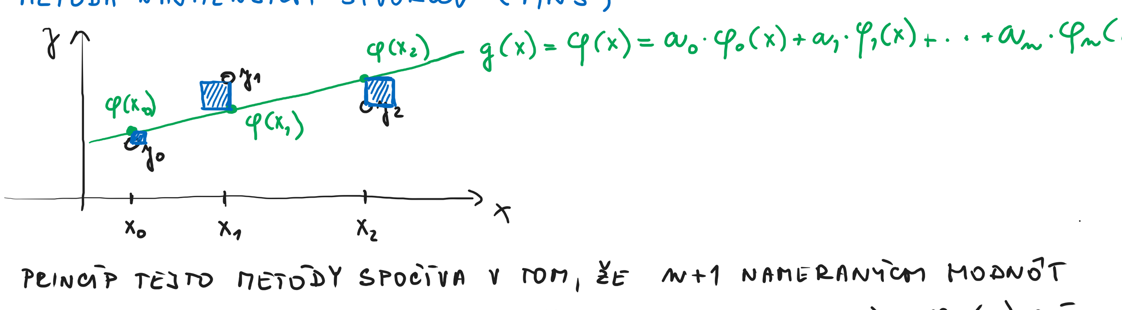
METÓDA NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV (MNŠ)



PRINCÍP TEJTO METÓDY SPOČÍVA V TOM, ŽE $n+1$ NAMERANÝCH HODNÔT $y_0; y_1; \dots; y_n$ IDEME APROXIMOVAŤ POMOCOU F-CIE $\varphi(x)$; $\varphi_i(x)$ SÚ ZNÁME F-CIE A MY BUDEME HĽADAŤ ICH „VHODNÚ" KOMBINÁCIU, ČIŽE BUDEME HĽADAŤ KOEFICIENTY $a_0, a_1, \dots, a_m$ TAK, ŽE SÚČET ŠTVORCOV (DRUHÝCH MOCNÍN) ODCHÝLIEK NAMERANÝCH A APROXIMOVANÝCH (VYPOČÍTANÝCH) HODNÔT MUSÍ BYŤ MINIMÁLNY.

VYTVORÍME VÝRAZ → F-CIU S S PREMENNÝMI $a_0, a_1, \dots, a_m$

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} [a_0\cdot\varphi_0(x_i) + a_1\cdot\varphi_1(x_i) + \dots + a_m\cdot\varphi_m(x_i) - y_i]^2$$

TAKTO VYTVORENÝ SÚČET MÁ BYŤ MINIMÁLNY, PRETO BUDEME HĽADAŤ LOKÁLNE MINIMUM F-CIE $S(a_0, \dots, a_m)$ → MAT 2

POTREBUJEME NÁJSŤ STACIONÁRNY BOD F-CIE S (UROBÍME PARCIÁLNE DERIVÁCIE 1. RÁDU A POLOŽÍME ICH ROVNÉ 0)

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \wedge \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \wedge \dots \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0$$

TAKTO ZÍSKAME SÚSTAVU $m+1$ ROVNÍC S $m+1$ NEZNÁMYMI $(a_0; \dots; a_m)$

$$\begin{aligned}
a_0\cdot(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_0, \varphi_1) + a_2\cdot(\varphi_0, \varphi_2) + \dots + a_m(\varphi_0, \varphi_m) &= (\varphi_0, y)\\
a_0\cdot(\varphi_1, \varphi_0) + a_1\cdot(\varphi_1, \varphi_1) + a_2\cdot(\varphi_1, \varphi_2) + \dots + a_m(\varphi_1, \varphi_m) &= (\varphi_1, y)\\
a_0\cdot(\varphi_2, \varphi_0) + a_1\cdot(\varphi_2, \varphi_1) + a_2\cdot(\varphi_2, \varphi_2) + \dots + a_m(\varphi_2, \varphi_m) &= (\varphi_2, y)\\
&\vdots\\
a_m\cdot(\varphi_m, \varphi_0) + a_1(\varphi_m, \varphi_1) + a_2\cdot(\varphi_m, \varphi_2) + \dots + a_m(\varphi_m, \varphi_m) &= (\varphi_m, y)
\end{aligned} \qquad (\Delta)$$

KDE (φ_i, φ_j) JE SKALÁRNY SÚČIN VEKTOROV φ_i A φ_j

PRÍKLAD 5: $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ $\Rightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}\cdot\bar{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3 =$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i\cdot b_i$$

$\bar{a} = (a_0, a_1, a_2)$, $\bar{b} = (b_0, b_1, b_2)$ $\Rightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{i=0}^{2} a_i\cdot b_i$

SÚSTAVU (Δ) PREPÍŠEME DO TVARU

$$a_0\cdot\sum_{i=0}^{n}\varphi_0(x_i)\cdot\varphi_0(x_i) + a_1\cdot\sum_{i=0}^{n}\varphi_0(x_i)\cdot\varphi_1(x_i) + \dots + a_m\cdot\sum_{i=0}^{n}\varphi_0(x_i)\cdot\varphi_m(x_i) = \sum_{i=0}^{n}\varphi_0(x_i)\cdot y_i$$
$$\vdots$$
$$a_0\cdot\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\cdot\varphi_0(x_i) + a_1\cdot\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\cdot\varphi_1(x_i) + \dots + a_m\cdot\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\cdot\varphi_m(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_m(x_i)\cdot y_i$$

RIEŠENÍM TAKEJTO SÚSTAVY NÁJDEME NEZNÁME KOEFICIENTY $a_0, a_1, \dots, a_m$

PRÍKLAD 6: F-CIU DANÚ TABUĽKOU APROXIMUJME POMOCOU MNŠ POLYNÓMOM 1. STUPŇA (LINEÁRNA F-CIA)

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
y_i	-2,5	0,5	1,5	2,5

APROXIMAČNÁ F-CIA JE

$$\boxed{\varphi(x) = a_0\cdot\underbrace{1}_{\varphi_0} + a_1\cdot\underbrace{x}_{\varphi_1}}$$

; $\bar{\varphi}_0 = \bar{1} = (1, 1, 1, 1)$; $\bar{\varphi}_1 = \bar{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

1) ZAPÍŠEME VŠEOBECNÚ SÚSTAVU 2 ROVNÍC S 2 NEZNÁMYMI

$$a_0(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_0, y)$$
$$a_0(\varphi_1, \varphi_0) + a_1(\varphi_1, \varphi_1) = (\varphi_1, y)$$

2) SÚSTAVU PREPÍŠEME DO TVARU SO SUMAMI

$$a_0\sum_{i=0}^{3}1\cdot 1 + a_1\sum_{i=0}^{3}1\cdot x_i = \sum_{i=0}^{3}1\cdot y_i$$
$$a_0\sum_{i=0}^{3}x_i\cdot 1 + a_1\cdot\sum_{i=0}^{3}x_i\cdot x_i = \sum_{i=0}^{3}x_i\cdot y_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a_0\overbrace{\sum_{i=0}^{3}1}^{4} + a_1\cdot\sum x_i &= \sum y_i\\ a_0\sum x_i + a_1\sum (x_i)^2 &= \sum x_i\cdot y_i\end{aligned}}$$

3) ZADANÚ TABUĽKU DOPLNÍME O POŽADOVANÉ STĹPCE

i	x_i	y_i	$(x_i)^2$	$x_i\cdot y_i$
0	-1	-2,5	1	2,5
1	0	0,5	0	0
2	1	1,5	1	1,5
3	2	2,5	4	5
	$\sum x_i = 2$	$\sum y_i = 2$	$\sum (x_i)^2 = 6$	$\sum x_i y_i = 9$

4) VYTVORÍME A VYPOČÍTAME SÚSTAVU

$$4\cdot a_0 + 2a_1 = 2 \quad /(-3)$$
$$2\cdot a_0 + 6a_1 = 9$$

$$-10a_0 = 3$$
$$\underline{\underline{a_0 = -0,3}}$$

$a_1 = 1 - 2a_0$
$a_1 = 1 + 0,6$
$\underline{\underline{a_1 = 1,6}}$

5) ZAPÍŠEME VÝSLEDNÚ APROXIMAČNÚ F-CIU

$$\varphi(x) = a_0 + a_1\cdot x$$
$$\boxed{\varphi(x) = -0,3 + 1,6\cdot x}$$

PRÍKLAD 7: F-CIU DANÚ TABUĽKOU APROXIMUJME POMOCOU MNŠ F-CIOU

$$\varphi(x) = a_0\cdot\underbrace{\sin x}_{\varphi_0} + a_1\cdot\underbrace{\cos x}_{\varphi_1}$$

i	0	1	2	3
x_i	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π
y_i	2	2,2	1	-2

$\bar{\varphi}_0 = \sin x = (\sin 0; \sin\frac{\pi}{4}; \sin\frac{\pi}{2}; \sin\pi)$
$\bar{\varphi}_1 = \cos x = (\cos 0; \cos\frac{\pi}{4}; \cos\frac{\pi}{2}; \cos\pi)$

1) VŠEOBECNÁ SÚSTAVA

$$a_0(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_0, y)$$
$$a_0(\varphi_1, \varphi_0) + a_1(\varphi_1, \varphi_1) = (\varphi_1, y)$$

2) SÚSTAVA SO SUMAMI

$$a_0\sum_{i=0}^{3}(\sin x_i)^2 + a_1\sum_{i=0}^{3}(\sin x_i)\cdot(\cos x_i) = \sum_{i=0}^{3}y_i\cdot\sin x_i$$
$$a_0\sum_{i=0}^{3}(\cos x_i)(\sin x_i) + a_1\cdot\sum_{i=0}^{3}(\cos x_i)^2 = \sum_{i=0}^{3}y_i\cdot\cos x_i$$

3) TABUĽKA

i	x_i	y_i	$\sin x_i$	$\cos x_i$	$(\sin x_i)^2$	$(\cos x_i)^2$	$\sin x_i\cdot\cos x_i$	$y_i \sin x_i$	$y_i \cos x_i$
0	0	2	0	1	0	1	0	0	2
1	$\pi/4$	2,2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	1/2	1/2	$1,1\sqrt{2}$	$1,1\cdot\sqrt{2}$
2	$\pi/2$	1	1	0	1	0	0	1	0
3	π	-2	0	-1	0	1	0	0	2
					1,5	2,5	0,5	2,5556	5,5556

4) SÚSTAVA – KONKRÉTNA

$$1,5a_0 + 0,5a_1 = 2,5556$$
$$0,5a_0 + 2,5a_1 = 5,5556 \quad (-3)$$

$$-7a_1 = -14,1112$$
$$\underline{\underline{a_1 = 2,0159}} \qquad \underline{a_0 = 1,0318}$$

5) APROXIMAČNÁ F-CIA

$$\varphi(x) = a_0\sin x + a_1\cos x$$
$$\boxed{\varphi(x) = 1,0318\sin x + 2,0159\cos x}$$

PRÍKLAD 8: ODHADNIME HODNOTU F-CIE Z PRÍKLADU 7 V BODE $x = \frac{\pi}{3}$.

$$\varphi(\underset{\frac{\pi}{3}}{x}) = 1,0318\sin\frac{\pi}{3} + 2,0159\cos\frac{\pi}{3} = 1,0318\frac{\sqrt{3}}{2} + 2,0159\frac{1}{2} \doteq \underline{\underline{1,9015}}$$

DOMÁCA ÚLOHA

1) F-CIU ZADANÚ TABUĽKOU APROXIMUJTE LAGR. INTERP. POLYN.

x_i	0	2	3	5
y_i	1	3	2	5

$\left[\frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1\right]$

2) ODHADNITE HODNOTU F-CIE Z ÚLOHY 1 PRE $x = 4$.

3) NÁJDITE INVERZNÝ LAGR. INTERP. POLYNÓM PRE F-CIU DANÚ TABUĽKOU

x_i	1	2	4
y_i	1	4	16

$\left[-\frac{1}{90}y^2 + \frac{35}{90}y + \frac{56}{90}\right]$

4) F-CIU ZADANÚ TABUĽKOU APROXIMUJTE POMOCOU MNŠ F-CIOU

$$\varphi(x) = a_0\cdot 1 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2$$

x_i	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y_i	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

$[1,0023x^2 - 4,0143x + 5,0221]$

5) MNŠ; $\varphi(x) = a_0\cdot 1 + a_1\cdot e^x$

x_i	0	0,5	1,1	2
y_i	-1,75	0,53	0,95	1,25

$[-0,8085 + 0,3231\cdot e^x]$

6) ODHADNITE HODNOTU F-CIE Z ÚLOHY 5 PRE $x = 2,5$.