

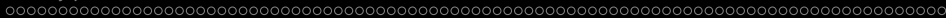


# *Rentový počet*

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

`monika.molnarova@tuke.sk`



## Obsah

- 1 Rentový počet
  - Úvod
  - Polehotná renta s konštantnou splátkou
  - Polehotná renta s rovnomerne rastúcou splátkou
  - Predlehotná renta s konštantnou splátkou
  - Odložená renta s konštantnou splátkou
  - Prerušená renta s konštantnou splátkou
  - Večná renta
  - Renta so spojitým úrokovaním









# Klasifikácie renty - I

- 1** Klasifikácia renty podľa podmienok splácania:
  - **renta podmienená**  
- výplata je viazaná na splnenie určitých podmienok
  - **renta nepodmienená**  
- výplata nie je viazaná na splnenie žiadnych podmienok
- 2** Klasifikácia renty podľa doby splatnosti renty:
  - **renta konečná**  
- výplata je viazaná na konečný časový úsek
  - **renta nekonečná (večná)**  
- výplata nie je viazaná na časový úsek





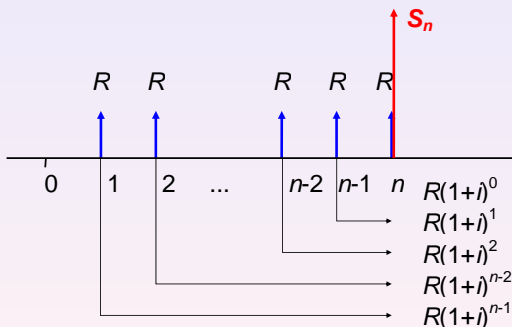






**$p = 1$  - Budúca hodnota renty - Definícia**

Každá splátka narastie za príslušný počet períód o úroky na novú hodnotu. Súčet týchto nových hodnôt na konci doby splatnosti je **budúca hodnota polehotnej renty  $S_n$** .



Obr.: Budúca hodnota renty



## $p = 1$ - Výpočet budúcej hodnoty renty

$$S_n = R + R \cdot (1 + i) + R \cdot (1 + i)^2 + \dots + R \cdot (1 + i)^{n-2} + R \cdot (1 + i)^{n-1}$$

konkrétne

$$S_8 = 500 + 500 \cdot (1 + 0,06) + 500 \cdot (1 + 0,06)^2 + \dots + 500 \cdot (1 + 0,06)^7$$

na pravej strane je súčet prvých  $n = 8$  členov geometrickej postupnosti s kvocientom  $q = 1 + 0,06$ , ktorý nahradíme výrazom

$$a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} (= S_n)$$

$$S_8 = 500 \cdot \frac{(1 + 0,06)^8 - 1}{(1 + 0,06) - 1}$$

$$S_8 = 500 \cdot \frac{(1 + 0,06)^8 - 1}{0,06} = 4\,948,73395$$

všeobecne

$$S_n = R \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

## Definícia

Polehotným sporiteľom nazývame výraz

$$s_{n|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ktorý udáva, koľkokrát sa zväčší pravidelne polehotne platená renta so splátkou  $R = 1$  peňažnej jednotky za  $n$  období pri úrokovej sadzbe  $i$  za jednu obdobiu.

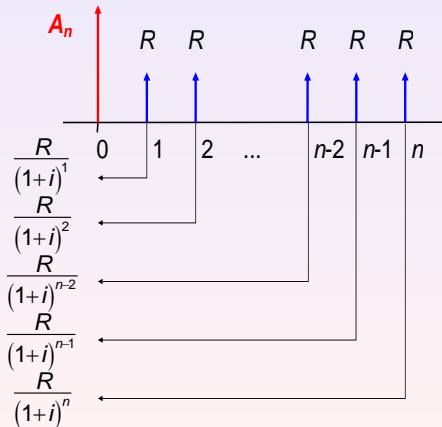
$$\text{Platí teda: } S_n = R \cdot \underbrace{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}_{s_{n|i}}$$

$$S_n = R \cdot s_{n|i}$$



## $p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Definícia

Každá splátka mala pôvodnú hodnotu. Súčet týchto pôvodných hodnôt na začiatku doby splatnosti je **súčasná hodnota polehotnej renty  $A_n$** .





$p = 1$  - Súčasná hodnota renty - Príklad 2**Príklad 2:**

Pán Podolník sa dohodol s pánom Podhorom, že dlžobu vyrovná piatimi splátkami po 200 eur koncom každého nasledujúceho roka pri 6% ročnej úrokovej miere. Koľko eur si pán Podolník požičal?

Zápis:

$$R = 200$$

$$i = 0,06$$

$$n = 5$$

$$p = 1$$

$$m = 1$$

---

$$A_5 = ?$$

$p = 1$  - Výpočet súčasnej hodnoty renty

$$A_n = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R}{(1+i)^n}$$

konkrétne

$$A_5 = \frac{200}{1+0,06} + \frac{200}{(1+0,06)^2} + \frac{200}{(1+0,06)^3} + \frac{200}{(1+0,06)^4} + \frac{200}{(1+0,06)^5}$$

súčet prvých  $n = 5$  členov geometrickej postupnosti s kvocientom

$$q = \frac{1}{1+0,06} \quad (a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = A_n)$$

$$\begin{aligned} A_5 &= \frac{200}{1+0,06} \cdot \frac{\frac{1}{(1+0,06)^5} - 1}{\frac{1}{1+0,06} - 1} = \frac{200}{1+0,06} \cdot \frac{(1+0,06)^{-5} - 1}{\frac{1-1-0,06}{1+0,06}} \\ &= 200 \cdot \frac{1 - (1+0,06)^{-5}}{0,06} = 842,47276 \end{aligned}$$

všeobecne

$$A_n = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

 $p = 1$  - Polehotný zásobiteľ

## Definícia

**Polehotným zásobiteľom** nazývame výraz

$$a_{n|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

ktorý udáva, prítomnú hodnotu renty so splátkou  $R = 1$  peňažnej jednotky za  $n$  období pri úrokovej sadzbe  $i$  za jednu obdobia.

$$\text{Platí teda: } A_n = R \cdot \underbrace{\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}}_{a_{n|i}}$$

$$A_n = R \cdot a_{n|i}$$

# $p = 1$ - Vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou renty

## Veta (vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou renty)

Nech  $A_n$  je súčasná a  $S_n$  budúca hodnota polehotnej renty s konštantnou splátkou pri ročnej úrokovej sadzbe  $i$  a s jednou splátkou za rok. Potom

$$S_n = A_n \cdot (1 + i)^n$$



$p = 1$  - výška splátky - Príklad 4**Príklad 4:**

Brat má sestre vyplatiť dedičský podiel 350 000 eur o 5 rokov. Koľko musí uložiť koncom každého roka na účet v banke, aby nasporil dedičský podiel pri 11% ročnej úrokovej miere?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl}
 S_n & = & 350\,000 \\
 n & = & 5 \\
 i & = & 0,11 \\
 p & = & 1 \\
 m & = & 1 \\
 \hline
 R & = & ?
 \end{array}$$







$p = 1$  - doba splatnosti - Príklad 5

Riešenie:

$$S_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$34\,076,55 = 3\,000 \cdot \frac{(1 + 0,028)^n - 1}{0,028}$$

$$(1 + 0,028)^n - 1 = 34\,076,55 \cdot \frac{0,028}{3\,000}$$

$$(1 + 0,028)^n = 1 + 34\,076,55 \cdot \frac{0,028}{3\,000}$$

$$n = \frac{\ln(1 + 34\,076,55 \cdot \frac{0,028}{3\,000})}{\ln 1,028}$$

$$n = 10$$



$p = 1$  - doba splatnosti - Príklad 6**Riešenie:**

$$A_n = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$17\,000 = 4\,000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,04)^{-n}}{0,04}$$

$$1 - (1 + 0,04)^{-n} = 17\,000 \cdot \frac{0,04}{4\,000}$$

$$(1 + 0,04)^{-n} = 1 - 17\,000 \cdot \frac{0,04}{4\,000}$$

$$n = - \frac{\ln(1 - 17\,000 \cdot \frac{0,04}{4\,000})}{\ln 1,04}$$

$$n = 4,75$$



## $p$ ľubovoľné - Terminológia a označenie

Použité skratky:

- $A_n$  súčasná hodnota renty
- $S_n$  budúca hodnota renty
- $n$  doba splatnosti renty
- $R$  splátka (anuita)
- $p$  počet splátok za rok
- $m$  počet úrokových períód (konverzií) za rok
- $i$  ročná úroková sadzba, ak  $m = 1$
- $j$  nominálna úroková sadzba, ak  $m > 1$



# $p$ ľubovoľné - Budúca hodnota renty - Ilustrácia

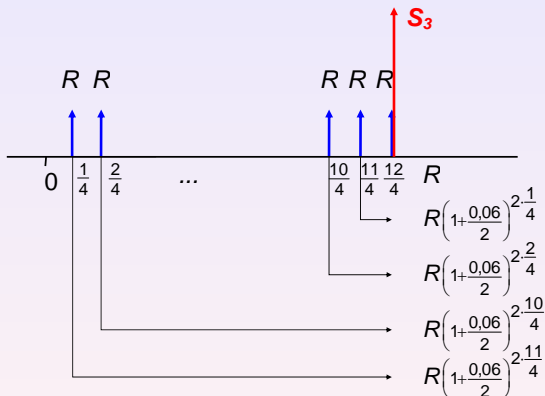
## Príklad 7:

Koľko sa nám podarí našetriť za tri roky, ak ukladáme na účet v banke 150 eur štvrtročne pri 6% nominálnej úrokovej miere a polročnom úrokovaní?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} R & = & 150 \\ j & = & 0,06 \\ p & = & 4 \\ m & = & 2 \\ n & = & 3 \\ \hline S_n & = & ? \end{array}$$

# $p$ ľubovoľné - Budúca hodnota renty



Obr.: Budúca hodnota renty

## $p$ ľubovoľné - Výpočet budúcej hodnoty renty

$$S_n = R + R \left[ \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \right]^{\frac{1}{p}} + R \left[ \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \right]^{\frac{2}{p}} + \dots + R \left[ \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \right]^{n - \frac{1}{p}}$$

konkrétne

$$S_3 = 150 + 150 \left[ \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} + 150 \left[ \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^2 \right]^{\frac{2}{4}} + \dots + 150 \left[ \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^2 \right]^{\frac{11}{4}}$$

súčet prvých  $np = 12$  členov geometrickej postupnosti

s kvocientom  $q = \left[ \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} = \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^{\frac{2}{4}}$  ( $a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = S_n$ )

$$S_3 = 150 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^{\frac{2}{4} \cdot 12} - 1}{\left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^{\frac{2}{4}} - 1} = 1\,954,96934$$

všeobecne

$$S_n = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$



## $p$ ľubovoľné - Výpočet budúcej hodnoty renty - Príklad 8

### Príklad 8:

Počas desiatich rokov si budeme mesačne polehotne ukladať 15 eur pri 10% nominálnej úrokovej miere a štvrtročnom úrokovaní. Akú sumu budeme mať na konte po poslednej splátke?

Zápis:

$$R = 15$$

$$j = 0,1$$

$$p = 12$$

$$m = 4$$

$$n = 10$$

---


$$S_{10} = ?$$

## $p$ ľubovoľné - Výpočet budúcej hodnoty renty - Príklad 8

Riešenie:

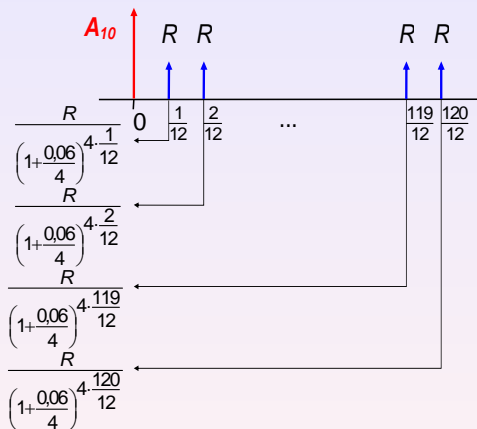
$$S_n = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$S_{10} = 15 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{4 \cdot 10} - 1}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1}$$

$$S_{10} = 3\,058,25217$$



# $p$ ľubovoľné - Súčasná hodnota renty



Obr.: Súčasná hodnota renty

## $p$ ľubovoľné - Výpočet súčasnej hodnoty renty

$$A_{10} = \frac{R}{\left[ \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^4 \right]^{\frac{1}{12}}} + \frac{R}{\left[ \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^4 \right]^{\frac{2}{12}}} + \dots + \frac{R}{\left[ \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^4 \right]^{\frac{119}{12}}} + \frac{R}{\left[ \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^4 \right]^{\frac{120}{12}}}$$

súčet prvých  $np=120$  členov geometrickej postupnosti s kvocientom

$$q = \frac{1}{\left[ \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^4 \right]^{\frac{1}{12}}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}}} \quad (a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = A_n)$$

$$A_{10} = \frac{R}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}}} \cdot \frac{\frac{1}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12} \cdot 120}} - 1}{\frac{1}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}}} - 1} = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{-\frac{4}{12} \cdot 120} - 1}{1 - \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}}}$$

všeobecne

$$A_n = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$



## $p$ ľubovoľné - Výpočet súčasnej hodnoty renty

$$A_{10} = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{-\frac{4}{12} \cdot 120}}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1}$$

$$3058,25217 = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{-\frac{4}{12} \cdot 120}}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1}$$

$$R = 3058,25217 \cdot \frac{1,025^{\frac{1}{3}} - 1}{1 - 1,025^{-40}}$$

$$R = 40,27596$$



## $p$ ľubovoľné - Vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou renty

### Veta (vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou renty)

Nech  $A_n$  je súčasná a  $S_n$  budúca hodnota polehotnej renty s konštantnou splátkou pri nominálnej úrokovej sadzbe  $j$  s počtom konverzií  $m$  a s počtom splátok  $p$  za rok. Potom

$$S_n = A_n \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}$$

## $p$ ľubovoľné - Vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou renty

### Príklad 10:

Ak si našetrenú sumu 3 058,25217 z predchádzajúceho príkladu nebudeme postupne vyberať, ale vyberieme si ju naraz po uplynutí nasledujúcich desiatich rokov, aká bude výška sumy, ak sa úroky budú pripisovať polročne?

Riešenie:

$$S_n = A_n \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} = 3\,058,25217 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{2}\right)^{2 \cdot 10} = 8\,114,45346$$



## $p$ ľubovoľné - výška splátky - Príklad 11

### Príklad 11:

Za 8 rokov sa podarilo Petre nasporiť 13 204,61 eur v banke pri 3,4% nominálnej úrokovej miere a polročnom úročení. Koľko eur vkladala do banky koncom každého mesiaca?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl}
 S_n & = & 13\,204,61 \\
 n & = & 8 \\
 j & = & 0,034 \\
 p & = & 12 \\
 m & = & 2 \\
 \hline
 R & = & ?
 \end{array}$$

## $p$ ľubovoľné - výška splátky - Príklad 11

Riešenie:

$$S_n = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$R = S_n \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}$$

$$R = 13\,204,61 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,034}{2}\right)^{\frac{2}{12}} - 1}{\left(1 + \frac{0,034}{2}\right)^{2 \cdot 8} - 1}$$

$$R = 120$$

 $p$  ľubovoľné - doba splatnosti - Príklad 12**Príklad 12:**

Koľko celých rokov bude môcť Karol vyberať koncom každého mesiaca po 200 eur z banky, v ktorej sa mesačne úročí jeho začiatočný vklad 20 000 eur pri 1,5% nominálnej úrokovej miere?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} A_n & = & 20\,000 \\ R & = & 200 \\ j & = & 0,015 \\ p & = & 12 \\ m & = & 12 \\ \hline n & = & ? \end{array}$$

## $p$ ľubovoľné - doba splatnosti - Príklad 12

Riešenie:

$$A_n = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$20\,000 = 200 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,015}{12}\right)^{-12 \cdot n}}{\left(1 + \frac{0,015}{12}\right)^{\frac{12}{12}} - 1}$$

$$100 = \frac{1 - \left(1 + \frac{0,015}{12}\right)^{-12 \cdot n}}{\frac{0,015}{12}}$$

$$1 - \left(1 + \frac{0,015}{12}\right)^{-12 \cdot n} = 100 \cdot \frac{0,015}{12}$$



## p ľubovoľné - doba splatnosti - Príklad 12

$$1 - \left(1 + \frac{0,015}{12}\right)^{-12 \cdot n} = 100 \cdot \frac{0,015}{12}$$

$$\left(1 + \frac{0,015}{12}\right)^{-12 \cdot n} = 1 - 100 \cdot \frac{0,015}{12}$$

$$-12n \cdot \ln\left(1 + \frac{0,015}{12}\right) = \ln\left(1 - 100 \cdot \frac{0,015}{12}\right)$$

$$n = \frac{\ln\left(1 - 100 \cdot \frac{0,015}{12}\right)}{12 \ln\left(1 + \frac{0,015}{12}\right)}$$

$$n = 8,9$$

## Zaradenie podľa klasifikácie

### Polehotná renta s rovnomerne rastúcou splátkou

atribúty:

- nepodmienená
- konečná
- polehotná
- ročná, t. j. s počtom splátok za rok  $p = 1$
- s rovnomerne rastúcou splátkou, t. j. výška splátky sa zvyšuje pravidelne s ročnou sadzbou  $\alpha$ , t. j. postupnosť splátok má tvar:

$$R, R(1 + \alpha), R(1 + \alpha)^2, \dots, R(1 + \alpha)^{n-1}$$

## Budúca hodnota renty - Ilustrácia

### Príklad:

Na konci každého roka počas 5 rokov budeme vkladat' do banky sumu, ktorej hodnotu budeme každoročne zvyšovať o 10 %. Prvý vklad bude mať výšku 1 500 eur. Banka poskytuje 5% ročnú úrokovú mieru. Akú sumu našetríme?

### Zápis:

$$R = 1\,500$$

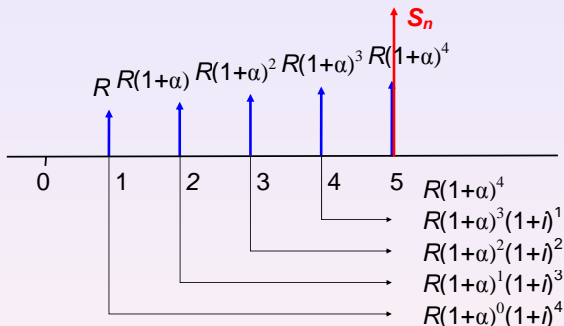
$$n = 5$$

$$i = 0,05$$

$$\alpha = 0,1$$

$$\hline S_5 = ?$$

## Budúca hodnota renty



Obr.: Budúca hodnota renty



## Výpočet budúcej hodnoty renty

$$S_5 = 1\,500(1+0,1)^4 + 1\,500(1+0,1)^3(1+0,05) + \\ + 1\,500(1+0,1)^2(1+0,05)^2 + 1\,500(1+0,1)(1+0,05)^3 + \\ + 1\,500(1+0,05)^4$$

súčet prvých  $n = 5$  členov geometrickej postupnosti s kvocientom

$$q = \frac{1+0,05}{1+0,1} \text{ nahradíme výrazom } a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_5 = 1\,500(1+0,1)^4 \frac{\left(\frac{1+0,05}{1+0,1}\right)^5 - 1}{\left(\frac{1+0,05}{1+0,1}\right) - 1} = 1\,500(1+0,1)^4 \frac{\left(\frac{1+0,05}{1+0,1}\right)^5 - 1}{\frac{1+0,05-1-0,1}{1+0,1}} =$$

$$= 1\,500(1+0,1)^5 \cdot \frac{\left(\frac{1+0,05}{1+0,1}\right)^5 - 1}{0,05 - 0,1} =$$

$$= 1\,500(1+0,1)^5 \cdot \frac{(1+0,05)^5 - (1+0,1)^5}{(1+0,1)^5} \cdot \frac{1}{0,05 - 0,1} =$$

$$= 1\,500(1+0,05)^5 \cdot \left[1 - \left(\frac{1+0,1}{1+0,05}\right)^5\right] \cdot \frac{1}{0,05 - 0,1} = 10\,026,853125$$

## Budúca a súčasná hodnota renty

všeobecne

- budúca hodnota renty

$$S_n = R(1+i)^n \left[ 1 - \left( \frac{1+\alpha}{1+i} \right)^n \right] \frac{1}{i-\alpha}$$

$$S_n = A_n(1+i)^n \quad \implies \quad A_n = \frac{S_n}{(1+i)^n}$$

- súčasná hodnota renty

$$A_n = R \left[ 1 - \left( \frac{1+\alpha}{1+i} \right)^n \right] \frac{1}{i-\alpha}$$





## Súčasná hodnota renty - Príklad

Riešenie:

$$A_n = R \left[ 1 - \left( \frac{1+\alpha}{1+i} \right)^n \right] \frac{1}{i-\alpha}$$

$$R = \frac{A_n \cdot (i - \alpha)}{\left[ 1 - \left( \frac{1+\alpha}{1+i} \right)^n \right]}$$

$$R = \frac{8\,000 \cdot (0,04 - 0,05)}{\left[ 1 - \left( \frac{1+0,05}{1+0,04} \right)^6 \right]}$$

$$R = 1\,353,70546$$

## Zaradenie podľa klasifikácie

### Predlehotná renta s konštantnou splátkou

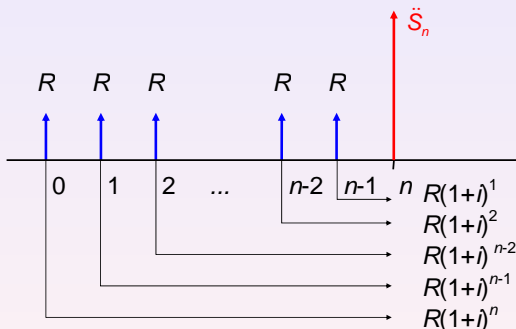
atribúty:

- nepodmienená
- konečná
- konštantná
- **predlehotná**
- s počtom splátok za rok
  - 1  $p = 1$
  - 2  $p$  ľubovoľné



## $p = 1$ - Budúca hodnota renty - Definícia

Každá splátka narastie za príslušný počet períód o úroky na novú hodnotu. Súčet týchto nových hodnôt na konci doby splatnosti je **budúca hodnota predlehotnej renty  $\ddot{S}_n$** .



Obr.: Budúca hodnota renty

## $p = 1$ - Výpočet budúcej hodnoty renty

Pomocou budúcej hodnoty polehotnej renty  $S_n$  určíme budúcu hodnotu predlehotnej renty  $\ddot{S}_n$

$$\begin{aligned}
 \ddot{S}_n &= R(1+i) + R(1+i)^2 + \dots + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n = \\
 &= (1+i) \cdot \underbrace{[R + R(1+i) + \dots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}]}_{S_n} = \\
 &= (1+i) \cdot S_n
 \end{aligned}$$

$\implies$

$$\ddot{S}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$











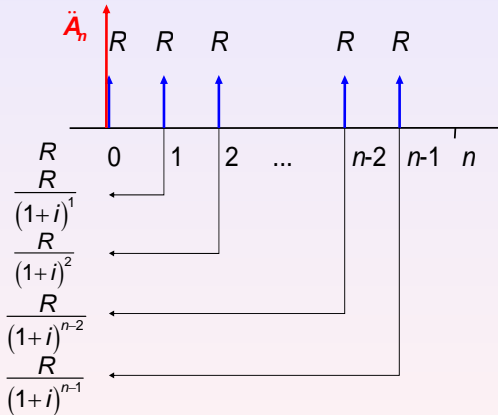






## $p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Definícia

Každá splátka mala pôvodnú hodnotu. Súčet týchto pôvodných hodnôt na začiatku doby splatnosti je **súčasná hodnota predlehotnej renty  $\ddot{A}_n$** .



Obr.: Súčasná hodnota renty



$p = 1$  - Výpočet súčasnej hodnoty renty

Analogicky pomocou súčasnej hodnoty polehotnej renty  $A_n$  určíme súčasnú hodnotu predlehotnej renty  $\ddot{A}_n$

$$\begin{aligned} \ddot{A}_n &= R + \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-2}} + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} = \\ &= (1+i) \cdot \underbrace{\left[ \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R}{(1+i)^n} \right]}_{A_n} = \\ &= (1+i) \cdot A_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{A}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

## Definícia

**Predlehotným zásobiteľom** nazývame výraz

$$\ddot{a}_{n|i} = (1+i) \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

ktorý udáva, prítomnú hodnotu renty so splátkou  $R = 1$  peňažnej jednotky za  $n$  období pri úrokovej sadzbe  $i$  za jednu obdobiu.

$$\text{Platí teda: } \ddot{A}_n = R \cdot \underbrace{(1+i) \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}}_{\ddot{a}_{n|i}}$$

$$\ddot{A}_n = R \cdot \ddot{a}_{n|i}$$





## $p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Príklad 5

### Príklad 5:

Pôžičku na byt vo výške 240 000 eur treba splatiť 30 rovnakými splátkami pri 5% ročnej úrokovej miere. Nájďme výšku ročnej splátky, ak sa tieto platia

- ① predlehotne,
- ② polehotne.

Zápis:

$$\begin{array}{rcl}
 1. & \ddot{A}_n & = 240\,000 \\
 & n & = 30 \\
 & i & = 0,05 \\
 \hline
 & R & = ?
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 2. & A_n & = 240\,000 \\
 & n & = 30 \\
 & i & = 0,05 \\
 \hline
 & R & = ?
 \end{array}$$

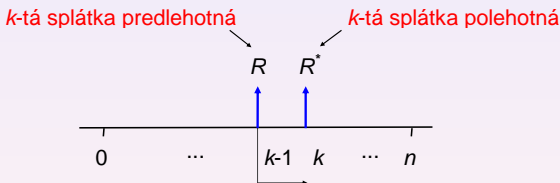




## Vzťah medzi polehotnou a predlehotnou splátkou

Každá predlehotná splátka úročí jednu periódu a stáva sa splátkou polehotnou

$$R^* = (1 + i) \cdot R$$



Obr.: Vzťah medzi polehotnou a predlehotnou splátkou



## $p = 1$ - doba splatnosti renty - Príklad 6

### Príklad 6:

Na koľko rokov vystačí Lívii suma 22 260,92 eur vložená do banky s 3,2% ročnou úrokovou mierou, keď si chce na začiatku každého roka vyberať 3 600 eur?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} R & = & 3\,600 \\ i & = & 0,032 \\ \hline \ddot{A}_n & = & 22\,260,92 \\ n & = & ? \end{array}$$

## $p = 1$ - doba splatnosti renty - Príklad 6

Riešenie:

$$\ddot{A}_n = R \cdot (1 + i) \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$22\,260,92 = 3\,600 \cdot (1 + 0,032) \cdot \frac{1 - (1 + 0,032)^{-n}}{0,032}$$

$$22\,260,92 \cdot \frac{0,032}{3\,600 \cdot 1,032} = 1 - 1,032^{-n}$$

$$1,032^{-n} = 1 - 22\,260,92 \cdot \frac{0,032}{3\,600 \cdot 1,032}$$

$$\ln 1,032^{-n} = \ln 0,80826$$

$$n = -\frac{\ln 0,80826}{\ln 1,032}$$

$$n = 6,758$$



## $p$ ľubovoľné - Budúca a súčasná hodnota renty

- budúca hodnota renty

$$\ddot{S}_n = R \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

- súčasná hodnota renty

$$\ddot{A}_n = R \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$



## $p$ ľubovoľné - Budúca hodnota renty - Príklad 7

Riešenie:

$$\ddot{S}_n = R \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$\ddot{S}_6 = 3\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{\frac{2}{2}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{2 \cdot 6} - 1}{\left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{\frac{2}{2}} - 1}$$

$$\ddot{S}_6 = 3\,000 \cdot 1,02 \cdot \frac{1,02^{12} - 1}{0,02}$$

$$\ddot{S}_6 = 41\,040,99457$$

## $p$ ľubovoľné - výška splátky - Príklad 8

### Príklad 8:

Za 8 rokov sa podarilo Petre nasporiť 13 204,61 eur v banke pri 3,4% nominálnej úrokovej miere a polročnom úročení. Koľko eur vkladala do banky začiatkom každého mesiaca?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl}
 \ddot{S}_8 & = & 13\,204,61 \\
 j & = & 0,034 \\
 p & = & 12 \\
 m & = & 2 \\
 n & = & 8 \\
 \hline
 R & = & ?
 \end{array}$$

## p ľubovoľné - výška splátky - Príklad 8

Riešenie:

$$\ddot{S}_n = R \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$R = \ddot{S}_n \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1\right]}$$

$$R = 13\,204,61 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,034}{2}\right)^{\frac{2}{12}} - 1}{\left(1 + \frac{0,034}{2}\right)^{\frac{2}{12}} \cdot \left[\left(1 + \frac{0,034}{2}\right)^{2 \cdot 8} - 1\right]}$$

$$R = 119,66$$



## $p$ ľubovoľné - doba splatnosti renty - Príklad 9

### Príklad 9:

Viktor si z banky na konci sporenia vybral 13 241,76 eur.  
 Na začiatku každého mesiaca si spovil sumou 120 eur, pričom nominálna úroková sadzba bola 0,034 a banka úročila vklady polročne. Koľko vkladov urobil?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl}
 \ddot{S}_n & = & 13\,241,76 \\
 p & = & 12 \\
 R & = & 120 \\
 j & = & 0,034 \\
 m & = & 2 \\
 \hline
 n \cdot p & = & ?
 \end{array}$$

$p$  ľubovoľné - doba splatnosti renty - Príklad 9

Riešenie:

$$\ddot{S}_n = R \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$13\,241,76 = 120 \cdot \left(1 + \frac{0,034}{2}\right)^{\frac{2}{12}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,034}{2}\right)^{2 \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{0,034}{2}\right)^{\frac{2}{12}} - 1}$$

$$1,017^{2n} - 1 = 13\,241,76 \cdot \frac{1,017^{\frac{1}{6}} - 1}{120 \cdot 1,017^{\frac{1}{6}}}$$

$$1,017^{2n} = 1,3095897$$

$$\ln 1,017^{2n} = \ln 1,3095897$$

$$n = \frac{\ln 1,3095897}{2 \cdot \ln 1,017}$$

$$n = 8 \quad \Rightarrow \quad n \cdot p = 8 \cdot 12 = 96 \quad \text{vkladov}$$

## $p$ ľubovoľné - súčasná hodnota renty - Príklad 10

### Príklad 10:

Jela bude splácať pôžičku s 10% nominálnou úrokovou mierou a mesačným úročením 7 rokov vždy začiatkom štvrťroka sumou vo výške 3 515,3814 eur. Akú sumu si požičala?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl}
 R & = & 3\,515,3814 \\
 j & = & 0,1 \\
 p & = & 4 \\
 m & = & 12 \\
 n & = & 7 \\
 \hline
 \ddot{A}_7 & = & ?
 \end{array}$$

## $p$ ľubovoľné - súčasná hodnota renty - Príklad 10

Riešenie:

$$\ddot{A}_n = R \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$\ddot{A}_7 = 3\,515,3814 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{\frac{12}{4}} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{-12 \cdot 7}}{\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1}$$

$$\ddot{A}_7 = 3\,515,3814 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^3 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{-84}}{\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^3 - 1}$$

$$\ddot{A}_7 = 71\,764,62$$

## $p$ ľubovoľné - výška splátky - Príklad 11

### Príklad 11:

Pavol vložil do banky pri 3,1% nominálnej úrokovej miere a polročnom úročení 25 000 eur z výhry. Akú čiastku môže v priebehu nasledujúcich 10 rokov vyberať na začiatku každého štvrtroka až do vyčerpania účtu?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl}
 \ddot{A}_{10} & = & 25\ 000 \\
 j & = & 0,031 \\
 p & = & 4 \\
 m & = & 2 \\
 n & = & 10 \\
 \hline
 R & = & ?
 \end{array}$$

## $p$ ľubovoľné - výška splátky - Príklad 11

Riešenie:

$$\ddot{A}_n = R \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$R = \ddot{A}_n \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}\right]}$$

$$R = 25\,000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,031}{2}\right)^{\frac{2}{4}} - 1}{\left(1 + \frac{0,031}{2}\right)^{\frac{2}{4}} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{0,031}{2}\right)^{-2 \cdot 10}\right]}$$

$$R = 723,27$$



$p$  ľubovoľné - doba splatnosti renty - Príklad 12

Riešenie:

$$\ddot{A}_n = R \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$20\,025 = 200 \cdot \left(1 + \frac{0,015}{12}\right)^{\frac{12}{12}} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,015}{12}\right)^{-12 \cdot n}}{\left(1 + \frac{0,015}{12}\right)^{\frac{12}{12}} - 1}$$

$$20\,025 = 200 \cdot 1,00125 \cdot \frac{1 - 1,00125^{-12 \cdot n}}{0,00125}$$

$$1 - 1,00125^{-12 \cdot n} = 20\,025 \cdot \frac{0,00125}{200 \cdot 1,00125}$$

$$1,00125^{-12 \cdot n} = 0,875$$

$$-12n \ln 1,00125 = \ln 0,875$$

$$n = -\frac{\ln 0,875}{12 \cdot \ln 1,00125} = 8,908 \implies 8 \text{ celých rokov}$$



## Zaradenie podľa klasifikácie

### Odložená renta s konštantnou splátkou

atribúty:

- nepodmienená
- konečná
- konštantná
- s počtom splátok za rok
  - 1  $p = 1$
  - 2  $p$  ľubovoľné

## $p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Ilustrácia

### **Príklad:**

Získali sme pôžičku vo výške 10 000 eur pri 6% ročnej úrokovej miere. Chceme ju splatiť desiatimi rovnakými splátkami vždy na konci roka. Prvá splátka pôžičky bude zaplatená na konci 6. roka. Vypočítajme veľkosť splátky.



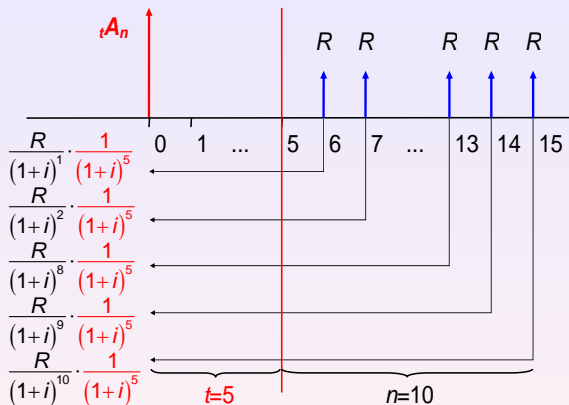
## Odložená renta - Definícia

### Definícia

**Odloženou rentou** nazývame takú rentu, pri ktorej sa prvá splátka uskutoční až po určitom čase  $t$  ( $t > \frac{1}{p}$ , t. j.  $t$  je väčšie ako perióda renty) od začiatku renty. Čas  $t$  nazývame **čakacou dobou**.





$p = 1$  - Súčasná hodnota renty - DefiníciaObr.: Súčasná hodnota odloženej polehotnej renty  $tA_n$

$p = 1$  - Výpočet súčasnej hodnoty renty

Pomocou súčasnej hodnoty polehotnej renty  $A_n$  určíme súčasnú hodnotu odloženej polehotnej renty  ${}_tA_n$

$$\begin{aligned}
 {}_5A_{10} &= \frac{R}{1+i} \cdot \frac{1}{(1+i)^5} + \frac{R}{(1+i)^2} \cdot \frac{1}{(1+i)^5} + \cdots + \\
 &\quad + \frac{R}{(1+i)^9} \cdot \frac{1}{(1+i)^5} + \frac{R}{(1+i)^{10}} \cdot \frac{1}{(1+i)^5} = \\
 &= \frac{1}{(1+i)^5} \cdot \underbrace{\left[ \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^9} + \frac{R}{(1+i)^{10}} \right]}_{A_{10}} = \\
 &= (1+i)^{-5} \cdot A_{10} = (1+i)^{-5} \cdot R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-10}}{i}
 \end{aligned}$$

$${}_tA_n = (1+i)^{-t} \cdot R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$p = 1$  - Súčasná hodnota renty - Príklad 1

Riešenie:

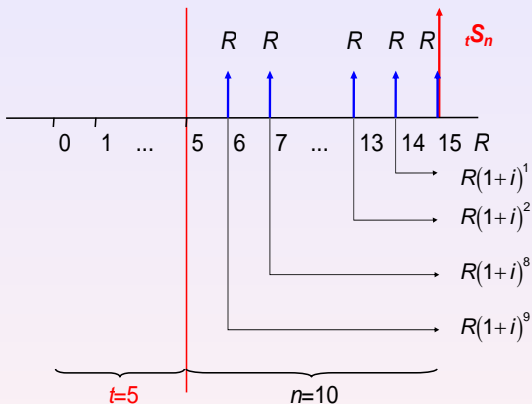
$${}_tA_n = (1 + i)^{-t} \cdot R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$R = {}_tA_n \cdot (1 + i)^t \cdot \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$$R = 10\,000 \cdot (1 + 0,06)^5 \cdot \frac{0,06}{1 - (1 + 0,06)^{-10}}$$

$$R = 1\,818,21977$$



$p = 1$  - Budúca hodnota renty - DefiníciaObr.: Budúca hodnota odloženej polehotnej renty  ${}_tS_n$





## $p$ ľubovoľné - Budúca a súčasná hodnota renty

- budúca hodnota renty

$${}_tS_n = S_n = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

- súčasná hodnota renty

$$\begin{aligned} {}_tA_n &= \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot t} \cdot A_n = \\ &= \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot t} \cdot R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \end{aligned}$$

$p$  ľubovoľné - Súčasná hodnota renty - Príklad 2

## Príklad 2:

Koľko si budeme môcť mesačne polehotne vyberať po dobu desiatich rokov z kapitálu vo výške 3 058,25217 eur pri 10% nominálnej úrokovej miere, ak sa úroky pripisujú štvrtročne a prvý výber sa má realizovať o 2 roky a 1 mesiac?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} {}_2A_{10} & = & 3\,058,25217 \\ j & = & 0,1 \\ n & = & 10 \\ t & = & 2 \\ p & = & 12 \\ m & = & 4 \\ \hline R & = & ? \end{array}$$



## $p$ ľubovoľné - Súčasná hodnota renty - Príklad 2

Riešenie:

$${}_tA_n = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot t} \cdot R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$R = {}_tA_n \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot t} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}$$

$$R = 3\,058,25217 \cdot 1,025^8 \cdot \frac{1,025^{\frac{4}{12}} - 1}{1 - 1,025^{-4 \cdot 10}}$$

$$R = 49,07234$$











## Súčasná hodnota - 1. časť

Zápis:

$$R_1 = 100$$

$$p_1 = 4$$

$$t_1 = 5$$

$$n_1 = 6$$

$$j = 0,03$$

$$m = 12$$

---

$${}_5A_6 = ?$$



## Súčasná hodnota - 1. časť

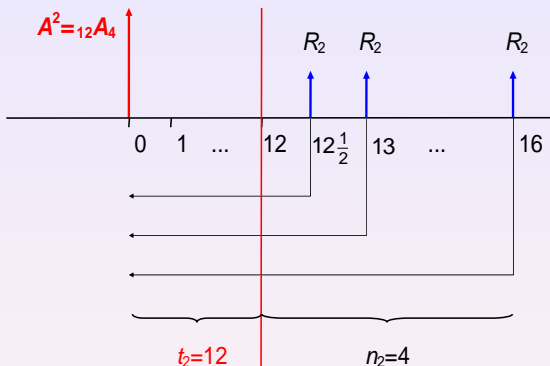
Riešenie:

$${}_tA_n = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot t} \cdot R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$${}_5A_6 = \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{-12 \cdot 5} \cdot 100 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{-12 \cdot 6}}{\left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1} = A^1$$

$$A^1 = 1\,883,94280$$

## Súčasná hodnota - 2. časť



Obr.: Súčasná hodnota prerušenej renty - 2. časť

## Súčasná hodnota - 2. časť

Zápis:

$$R_2 = 200$$

$$p_2 = 2$$

$$t_2 = 12$$

$$n_2 = 4$$

$$j = 0,03$$

$$m = 12$$

---

$${}_{12}A_4 = ?$$

## Súčasná hodnota - 2. časť

Riešenie:

$${}_tA_n = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot t} \cdot R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$${}_{12}A_4 = \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{-12 \cdot 12} \cdot 200 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{-12 \cdot 4}}{\left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{\frac{12}{2}} - 1} = A^2$$

$$A^2 = 1\,044,59175$$

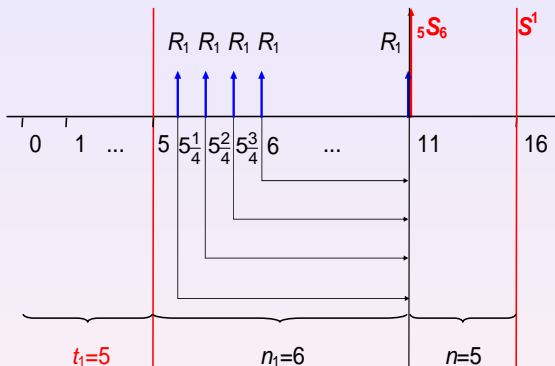


## Súčasná hodnota

Riešenie:

$$A = A^1 + A^2 = 2\,928,53455$$

## Budúca hodnota - 1. časť



Obr.: Budúca hodnota prerušenej renty - 1. časť

## Budúca hodnota - 1. časť

Zápis:

$$R_1 = 100$$

$$p_1 = 4$$

$$t_1 = 5$$

$$n_1 = 6$$

$$j = 0,03$$

$$m = 12$$

---

$${}_5S_6 = ?$$

$$S^1 = {}_5S_6 \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot 5}$$



## Budúca hodnota - 1. časť

Riešenie:

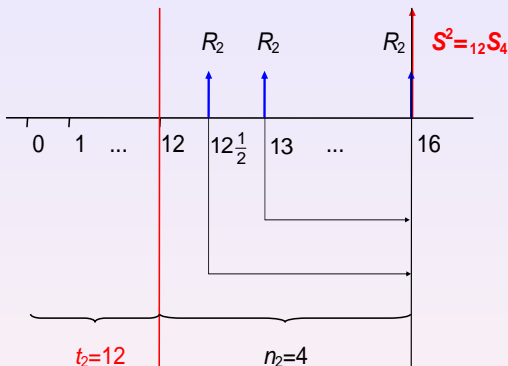
$${}_t S_n = S_n = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$${}_5 S_6 = S_6 = 100 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{12 \cdot 6} - 1}{\left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1}$$

$$S^1 = \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{12 \cdot 5} \cdot {}_5 S_6$$

$$S^1 = 3\,042,76867$$

## Budúca hodnota - 2. časť



Obr.: Budúca hodnota prerušenej renty - 2. časť

## Budúca hodnota - 2. časť

Zápis:

$$R_2 = 200$$

$$p_2 = 2$$

$$t_2 = 12$$

$$n_2 = 4$$

$$j = 0,03$$

$$m = 12$$

---


$${}_{12}S_4 = ?$$

## Budúca hodnota - 2. časť

Riešenie:

$${}_tS_n = S_n = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$${}_{12}S_4 = S_4 = 200 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{12 \cdot 4} - 1}{\left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{\frac{12}{2}} - 1} = S^2$$

$$S^2 = 1\,687,12719$$



## Budúca hodnota

**Riešenie:**

$$S = S^1 + S^2 = 4\,729,85169$$



## Zaradenie podľa klasifikácie

### Večná renta

atribúty:

- nepodmienená
- **nekonečná**
- polehotná
- s konštantnou splátkou
- s počtom splátok za rok  $p$

## Večná renta - Ilustrácia

## Príklad:

Aký zabezpečovací fond zabezpečí vyplácanie ceny vo výške 1 000 eur víťazovi každoročnej literárnej súťaže do neobmedzenej budúcnosti pri 4% ročnej úrokovej miere?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} p & = & 1 \\ i & = & 0,04 \\ n & \rightarrow & \infty \\ R & = & 1\ 000 \\ \hline A_{\infty} & = & ? \end{array}$$

## Večná renta - Definícia

## Definícia

**Večnou rentou** nazývame takú rentu, pri ktorej je počet splátok neohraničený.

Platí teda:  $n \rightarrow \infty$



## Výpočet súčasnej hodnoty renty

- $p = 1$

$$\begin{aligned} A_{\infty} &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \end{aligned}$$

$$A_{\infty} = \frac{R}{i}$$

- $p$  ľubovoľné

$$A_{\infty} = \frac{R}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$



## Výpočet súčasnej hodnoty renty - Príklad 4

### Príklad 4:

Aký zabezpečovací fond zabezpečí vyplácanie ceny vo výške 1 000 eur víťazovi každoročnej literárnej súťaže do neobmedzenej budúcnosti pri 4% ročnej úrokovej miere?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} p & = & 1 \\ i & = & 0,04 \\ n & \rightarrow & \infty \\ R & = & 1\,000 \\ \hline A_{\infty} & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$$A_{\infty} = \frac{R}{i} = \frac{1\,000}{0,04} = 25\,000$$





## Výpočet budoucí hodnoty renty

- $p = 1$

$$\begin{aligned} S_{\infty} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \end{aligned}$$

$$S_{\infty} = \infty$$

- $p$  ľubovoľné

$$S_{\infty} = \infty$$



## Zaradenie podľa klasifikácie

### Renta so spojitým úrokovaním

atribúty:

- nepodmienená
- s dobou splatnosti
  - ① ohraničenou - konečná renta
  - ② neohraničenou - večná renta
- polehotná
- s konštantnou splátkou
- s počtom splátok za rok  $p$
- s neohraničeným počtom konverzií  $m$ , t. j. so spojitým úrokovaním



## Výpočet súčasnej hodnoty renty - konečná

$$A_n = \lim_{m \rightarrow \infty} R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$A_n = R \cdot \frac{1 - e^{-j \cdot n}}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$



## Výpočet budúcej hodnoty renty - konečná

$$S_n = \lim_{m \rightarrow \infty} R \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$S_n = R \cdot \frac{e^{j \cdot n} - 1}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$



## Výpočet súčasnej hodnoty renty - Príklad 6

## Príklad 6:

Aký veľký musí byť zabezpečovací fond v banke, ak je uložený pri spojitom úrokovani pri nominálnej úrokovej miere 5 % a má poskytovať pravidelné štvrtročné splátky polehotne v sume 1 000 eur

- 1 po dobu 10 rokov,
- 2 po dobu nekonečne dlhú.

Zápis:

$$\begin{array}{ll} 1. & R = 1\,000 \\ & n = 10 \\ & j = 0,05 \\ & p = 4 \\ & m \rightarrow \infty \\ \hline & A_n = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2. & R = 1\,000 \\ & n \rightarrow \infty \\ & j = 0,05 \\ & p = 4 \\ & m \rightarrow \infty \\ \hline & A_\infty = ? \end{array}$$



## Výpočet súčasnej hodnoty renty - Príklad 6

Riešenie:

$$1. \quad A_n = R \cdot \frac{1 - e^{-j \cdot n}}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

$$A_{10} = 1\,000 \cdot \frac{1 - e^{-0,05 \cdot 10}}{e^{\frac{0,05}{4}} - 1}$$

$$A_{10} = 31\,281,22242$$

# Renta so spojitým úrokováním - večná - Definícia

## Definícia

**Večnou rentou so spojitým úrokováním** nazývame takú rentu, pri ktorej je počet konverzií neohraničený a počet splátok neohraničený.

Platí teda:  $m \longrightarrow \infty$  a  $n \longrightarrow \infty$

## Výpočet súčasnej a budúcej hodnoty renty - večná

- súčasná hodnota

$$A_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot \frac{1 - e^{-j \cdot n}}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

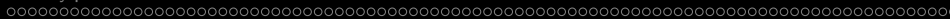
$$A_{\infty} = \frac{R}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

- budúca hodnota

$$S_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot \frac{e^{j \cdot n} - 1}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

$$S_{\infty} = \infty$$





Ďakujem za pozornosť.