- cieľom revidovanej simplexovej metódy je urýchliť výpočet, t.j. pri výpočte vykonať menej operácií ako pri štandardnej simplexovej metóde
- myšlienka metódy spočíva v tom, že pri každej iterácii nie je potrebné prepočítavať hodnoty celkovej simplexovej tabuľky, ale postačuje nato len poznatok správania sa množiny bázických indexov $\boldsymbol{B}$ a matice $\boldsymbol{B}^{-1}$
- na začiatku je potrebné určiť vektor $\vec{u}$ a jednotlivé kroky iterácií budú reprezentované indexom s

- autorom je William Orchard-Hays (1956)
- algoritmus pozostáva zo šiestich krokov:

- K1: (Štartovací krok) - položíme $s = 1$ a $\boldsymbol{B}_s^{-1} = \boldsymbol{I}$, kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matica a nech $\vec{u}(s) = \vec{0}$ je počiatočný nulový vektor
- K2: (Test optimality) - vypočítame redukované ceny z_j^s

$$z_j^s = u(s)_j \cdot \boldsymbol{a}_j - c_j \quad \text{pre j=1,...,n}$$

Ak $\vec{z^s} \geqq \vec{0}$ a $\vec{u}(s) \geqq \vec{0}$, tak riešenie je optimálne a algoritmus končí.

- K3: (Voľba vstupnej premennej) - položíme

$$z^s_{n+i} = u(s)_i \quad \text{pre } i = 1, \ldots, m$$

$$z^s_k = \min_{j=1,\ldots,n+m} \{z^s_j\},$$

kde index k (pri ktorom nastáva dané minimum) nám určí novú vstupnú premennú x_k

- K4: (Voľba výstupnej premennej) - vypočítame stĺpec

$$\boldsymbol{a}^s_k = \boldsymbol{B}^{-1}_s \cdot \boldsymbol{a}^1_k$$

a následne vyberieme pivota na základe štandardných predpokladov simplexovej metódy

- K5: prepočtom tabuľky podľa stanoveného pivota získavame vektor $\vec{x}^{s+1}$ s príslušnou hodnotou účelovej funkcie z^{s+1}
- K6: nárast iterácie $s \to s+1$ a nasleduje krok K2

V prípade možného zacyklenia

- lexikografické pravidlo je nepoužiteľné v revidovanej metóde
- Blandovo pravidlo je možné aplikovať len v prípade použitia rovnakých premenných s rôznymi indexami (za uvedených predpokladov je použiteľné v revidovanej metóde)

Teória duality

Ak úloha **LP** nie je primárne prípustná, tak teória duality nám umožňuje riešiť namiesto danej primárnej úlohy k nej príslušnú duálnu úlohu a následne z optimálnej tabuľky určiť výsledok aj pre pôvodnú primárnu úlohu.

- úlohou duálneho simplexového algoritmu je riešiť priamo pôvodnú primárnu úlohu bez nejakého explicitného prechodu k duálnej úlohe
- autorom je Carlton E. Lemke (1954)
- zapísaním úlohy do simplexovej tabuľky (ktorá musí byť duálne prípustná) sa snažíme dosiahnuť aj primárnu prípustnosť vhodným výberom pivota spomedzi záporných kandidátov podľa istého pravidla, ktoré nám po prepivotovaní zachová duálnu prípustnosť

Predpoklady použitia duálneho simplexového algoritmu pre úlohu **LP**

- predpokladáme duálnu prípustnosť
- predpokladáme primárnu neprípustnosť, t.j. úloha nie je prípustná

Pravidlá pre výber riadkov a stĺpcov:

- výber ľubovoľného riadka $i \in \{1, \dots, m\}$, pre ktorý platí $x_{i0} < 0$
- výber stĺpca $j \in \{1, \dots, n\}$ s pivotom $x_{ij} < 0$ tak, aby platilo

$$\lambda = \frac{x_{0i}}{x_{ij}} = \max\left\{ \frac{x_{0k}}{x_{ik}} : \text{pre } k \text{ také, že } x_{ik} < 0 \right\}$$

- ak v každom riadku, v ktorom je $x_{i0} < 0$ je aj $x_{ij} \geqq 0$ pre každé $j \in \{1, \dots, n\}$, tak úloha **LP** je neprípustná

Postup pre dosiahnutie duálnej prípustnosti:

Umelé ohraničenie

1. vytvoríme umelé ohraničenie

$$\sum_{j \in N} x_j \leqq M,$$

   kde M je veľké číslo
2. pridaním pomocnej premennej x_{n+1} do danej nerovnosti, rozšírime pôvodnú simplexovú tabuľku o 1 riadok a o 1 stĺpec
3. ak vyberieme pivota zo stĺpca s minimálnou zápornou relatívnou cenou a z novopridaného riadku tabuľky, tak následným prepivotovaním dosiahneme duálne prípustnú úlohu

Postup pre dosiahnutie duálnej prípustnosti:

Dvojfázová Primárno-Duálna metóda

1. úloha nie je primárne ani duálne prípustná, t.j. ani $\vec{b} \geqq \vec{0}$ a ani $-\vec{c} \geqq \vec{0}$
2. zmeníme účelovú funkciu $\vec{c} \to \vec{c}\,'$ tak, aby $-\vec{c}\,' \geqq \vec{0}$ a riešime úlohu duálnym algoritmom
3. v prípade, ak skončí neprípustne, tak aj pôvodná úloha je neprípustná
4. ak skončí optimálne, tak v druhej fáze zavedieme pôvodnú účelovú funkciu a riešime ju primárnym simplexovým algoritmom

- autorom je C. W. Carrol (1961) a neskôr ju podrobnejšie spracovali Anthony V. Fiacco a Garth P. McCormick (1964)
- základnou myšlienkou je nahradenie úlohy na viazaný extrém postupnosťou úloh na voľný extrém
- v každej takejto iterácii sa bude riešiť pomocná úloha na voľný extrém, ktorá bude závislá od parametra
- postupnosť takýchto riešení bude následne konvergovať k optimálnemu riešeniu pôvodnej úlohy
- nakoľko sa účelová funkcia dvoch po sebe riešených úloh líši len minimálne, tak riešenie získané v k-tej iterácii je dobrým odhadom pre riešenie, ktoré získame v $k + 1$-vej iterácii

Penalizačná metóda

- je určená pre úlohy typu

$$\min\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in M\} \text{ pre } M \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,$$

kde M je uzavretá a Ω je otvorená množina.

- je to všeobecnejší postup pre optimalizačné úlohy s možnosťou modifikácie aj pre úlohy **LP**
- metóda potrebuje pre svoju činnosť vytvorenie takzvanej penalizačnej funkcie (ktorej hodnota je závislá na splnení obmädzujúcich podmienok)
- ak sú všetky splnené tak jej hodnota je nulová, avšak s mierou nesplnenia týchto podmienok jej hodnota narastá

- zavedieme penalizačnú funkciu $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$, ktorá spĺňa podmienku $\sigma(\vec{x}) = 0$ pre $\vec{x} \in M$ a rastie so vzdialenosťou od množiny M
- cieľom úlohy je stanoviť

$$\min\{f(\vec{x}) + \mu \cdot \sigma(\vec{x}) : \vec{x} \in \Omega\},$$

  t. j. k účelovej funkcii pridať funkciu, ktorá bude penalizovať porušenie každého ohraničenia
- ohraničeniu $h_j(\vec{x}) = 0$ zodpovedá penále $\mu \cdot h_j^2(\vec{x})$
- ohraničeniu $g_i(\vec{x}) \leq 0$ zodpovedá $\mu \cdot [\max\{0, g_i(\vec{x})\}]^2$
- takýmto prístupom je kritérium pre $q \in \mathbb{N}$ (zvyčajne pre $q = 2$) v tvare:

$$\mu \cdot \sigma(\vec{x}) = \mu \cdot \sum_{i=1}^{m} \left[\max\{0, g_i(\vec{x})\}\right]^q + \mu \cdot \sum_{j=1}^{p} \left|h_j(\vec{x})\right|^q$$

Algoritmus metódy penalizačnej funkcie

- K1: Zvolíme kritérium ukončenia $\varepsilon > 0$, index $k = 1$, východiskový penalizačný parameter μ_k a koeficient zmeny penalizačného parametra b.
- K2: Riešením úlohy

$$F(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \mu_k \cdot \sigma(\vec{x}) \to \min$$

  získame bod $\vec{x}^{\mu_k}$ a položíme $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^{\mu_k}$.
- K3: Ak $\mu_k \cdot \sigma(\vec{x}^{\mu_k}) < \varepsilon$, tak koniec. Inak $\mu_{k+1} = b \cdot \mu_k$, $k \to k+1$ a pokračujeme krokom K2.