METÓDA PER PARTES

VETA Nech u, v majú spojité derivácie na J. Potom

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx.}$$

dôkaz: nech $H(x)$ je primitívna funkcia k $u'(x)\cdot v(x)$ na J.

$$\boxed{H'(x) = u'(x)\cdot v(x)}, \text{ resp. } \boxed{\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = H(x)+C}$$

pozrime

$$\left[u(x)\cdot v(x) - H(x)\right]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - H'(x) =$$

$$= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) - u'(x)\cdot v(x) = u(x)\cdot v'(x)$$

funkcia $\boxed{u(x)\cdot v(x) - H(x)}$ je primitívna k $u(x)\cdot v'(x)$

teda

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)\,dx} = u(x)\cdot v(x) - H(x) + C = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$\int u\, v'\,dx = u\cdot v - \int u' v\,dx$$

dokázali sme vzťah P.P.

PRÍKLADY

① $$\int (2x+1)\cdot e^x\,dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+1 & v' = e^x \\ u' = 2 & v = e^x \end{matrix} \right| = (2x+1)\cdot e^x - \int 2\,e^x\,dx = (2x+1)\cdot e^x - 2e^x$$

② $$\int x^2\cdot \cos 3x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & v' = \cos 3x \\ u' = 2x & v = \frac{\sin 3x}{3} \end{matrix} \right| = x^2\cdot\frac{\sin 3x}{3} - \int 2x\cdot\frac{\sin 3x}{3}\,dx = \frac{x^2}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\int x\sin 3x\,dx = (*)$$

{ pomocný výpočet:

viem $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$$\int \cos 3x\,dx = \left| \begin{matrix} \text{subs. } 3x = t \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{matrix} \right| = \int \cos t\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \boxed{\frac{1}{3}\sin 3x + C} \}$$

Zapamätajme si

$$\int \cos 4x\,dx = \frac{\sin 4x}{4} + C, \quad \int \cos 10x\,dx = \frac{\sin 10x}{10} + C$$

vo všeobecnosti $$\boxed{\int \cos(kx)\,dx = \frac{\sin kx}{k} + C} \; ; \; \boxed{\int \sin(kx)\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + C} \}$$

$(*) =$ ešte raz metóda P.P

$$\left| \begin{matrix} u = x & v' = \sin 3x \\ u' = 1 & v = -\frac{\cos 3x}{3} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\left[x\cdot\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)dx\right] = \frac{x^2}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}x\cdot\cos 3x - \frac{2}{9}\int \cos 3x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{9}\cdot\frac{\sin 3x}{3} + C$$

POUŽITIE metódy per partes:

$$\left.\begin{matrix} \int P_n(x)\cdot e^{kx}\,dx \\ \int P_n(x)\cdot \sin kx\,dx \\ \int P_n(x)\cdot \cos kx\,dx \end{matrix}\right\} \text{volíme } u(x) = P_n(x)$$

$$\left\{ \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + C \right\} \quad \int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

pokračovanie príkladov:

③ $$\int x^3\cdot \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} \cancel{u = x^3} & \cancel{v' = \ln x} \\ \cancel{u' = 3x^2} & \cancel{v = ?} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} u = \ln x & v' = x^3 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \underbrace{\frac{x^4}{4}\cdot \ln x}_{u\cdot v} - \int \underbrace{\frac{1}{x}\cdot\frac{x^4}{4}}_{u'\cdot v}\,dx$$

voľba musí byť opačná

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C$$

④ $$\int 1\cdot \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{matrix} \right| = x\cdot\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\cdot\ln x - x + C$$

? než ku mi je súčin ?

podobne integrujeme aj

$$\underbrace{\int 1\cdot \arcsin x\,dx, \; \int 1\cdot \arccos x\,dx, \; \int 1\cdot \operatorname{arctg} x\,dx, \; \int 1\cdot \operatorname{arccotg} x\,dx}_{\text{metóda PER PARTES}}$$

integrály typu:

$$\left.\begin{matrix} \int P_n(x)\cdot \ln x\,dx \\ \int P_n(x)\cdot \arcsin x\,dx \\ \int P_n(x)\cdot \arccos x\,dx \\ \int P_n(x)\cdot \operatorname{arctg} x\,dx \\ \int P_n(x)\cdot \operatorname{arccotg} x\,dx \end{matrix}\right\} \text{volíme } v'(x) = P_n(x)$$

polynóm integrujeme.

⑤ $$\int 1\cdot\arcsin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$x\cdot\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{matrix} \text{subs. } 1-x^2 = t \\ -2x\,dx = dt \\ x\,dx = -\frac{1}{2}dt \end{matrix} \right| =$$

krásny príklad na substitúciu

$$= x\cdot\arcsin x - \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = x\arcsin x + \sqrt{t} + C =$$

$$= x\cdot\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

⑥ $$\boxed{\int e^x\cdot \sin x\,dx} = \left| \begin{matrix} u = e^x & v' = \sin x \\ u' = e^x & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

voľba môže byť ľubovoľná

$$= -e^x\cdot\cos x - \int e^x\cdot(-\cos x)\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cdot\cos x\,dx =$$

urobme ešte raz P.P

$$\left| \begin{matrix} u = e^x & v' = \cos x \\ u' = e^x & v = \sin x \end{matrix} \right|$$

$$\boxed{= -e^x\cos x + e^x\cdot\sin x - \int e^x\cdot\sin x\,dx}$$

pozrime sa na výpočet ako na rovnicu, kde neznáma je $\int e^x \sin x\,dx$

$$\boxed{\int e^x\sin x\,dx} = -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx$$

$$2\int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) + C$$

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

podobne počítame aj $\int e^x\cdot\cos x\,dx$

INTEGROVANIE RACIONÁLNYCH FUNKCIÍ

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$$

- rýdzoracionálna $n < m$
- nerýdzoracionálna $n \geq m$ → vieme predeliť: polynóm + rýdzoracion. funkciu

polynóm → integrovať vieme

príklad: $$\int (2x^3 - 4x^2 + 8)\,dx = 2\cdot\frac{x^4}{4} - 4\cdot\frac{x^3}{3} + 8x + C$$

⇐ stačí sa naučiť integrovať rýdzoracionálnu funkciu.

↓ vieme rozložiť na SÚČET parciálnych zlomkov

⇓ stačí vedieť integrovať parc. zlomky, čo je super. ☺

TEDA vieme zintegrovať ľubovoľnú racion. funkciu.

MÁME JEDNOZNAČNÝ POSTUP.

INTEGROVANIE PARC. ZLOMKOV:

$$\frac{A}{x-\alpha}, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^n}, \quad \frac{Bx+C}{\underbrace{x^2+px+q}_{\text{nemá reálne korene.}}}$$

① $$\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = A\cdot\ln|x-\alpha| + C$$

{ integr. vzorce

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C} \}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| + C}$$

② $$\boxed{\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx}_{\;n\in\mathbb{N}} = \left| \begin{matrix} \text{subst. } x-\alpha = t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t^n}\,dt =$$

princíp.

$$= \int t^{-n}\,dt = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \boxed{\frac{(x-\alpha)^{1-n}}{1-n} + C}$$

príklad:

$$\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \int (x-3)^{-2}\,dx = \left| \begin{matrix} x-3 = t \\ dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{x-3} + C$$

$$\boxed{\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C}$$

VRACIAM POŽRANÉ 10 min.