planimetrie: $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$

pro zlomek: $\boxed{\frac{Ax+B}{x^2+px+q}}$ $\frac{B}{x^2+px+q}$

$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ ... $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$

$p^2-4q<0$

rozmyslet

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2+1}\,\frac{dx}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} =$$

vyjmeme ze čitatele

$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$

$\left(x^2+q-\frac{p^2}{4}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C$$

$a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$

$\boxed{\text{příklad}}$ $\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$ vyjmeme $a=0$

$x^2+x+2=0$

nemá řešení

$$= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{1}{4}\right)}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{2-\frac{1}{4}}}\right)^2+1}\,\frac{dx}{\sqrt{2-\frac{1}{4}}} =$$

$a = \sqrt{\frac{7}{4}}$

$$= \left|\begin{array}{l} \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}} = t \\ dx = a\,dt \end{array}\right| = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}} + C$$

$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$

pro zlomek: $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$ $p^2-4q<0$

postup: upravíme čitatel na derivaci jmenovatele

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

příklad: $\int \frac{3(x+1)}{x^2+x+2}\,dx = 3\int \frac{x+1}{x^2+x+2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+x+2}\,dx =$

chceme v čitateli $(2x+1)$ $\frac{3}{2} = 1+\frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{3}{2}}{x^2+x+2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+2}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\int \frac{2x+1}{x^2+x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2+x+2}\,dx\right) = \frac{3}{2}\left(\ln|x^2+x+2| + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{7}}\right) + C$$

$\frac{1}{2}$

druhý má $\frac{1}{2}$

v čitateli mám

v čitateli mám vyjmenovatel, vyjmeme ze 2.

$\boxed{\text{PŘÍKLAD}}$ $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx = *$

mám ve jmenovateli

1) nejprve celou mnohočlen mohu mnohočlen funkcí, kde dělím

$$\begin{array}{l} (x^2+1):(x^3-x^2+x-1) = x+1 \\ -(x^3-x^2+x^2-x) \\ \quad -(x^2-x^2+x-1) \\ \quad\quad 2 \end{array}$$

2) vyjádřeme funkcí rozdělím na součet jedn. zlomků

3) integrujeme jedn. zlomky

$$* = \int \boxed{x+1} + \boxed{\frac{2}{x^3-x^2+x-1}}\,dx$$

vyjádříme funkci

$$\frac{2}{x^3-x^2+x-1} = \frac{2}{x^2(x-1)+(x-1)} = \boxed{\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}} \quad |\cdot(x-1)(x^2+1)$$

vyjádříme

2 zlomky

$$2 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

dosadímeme: $\boxed{x=1}$: $2 = A\cdot 2$

$\boxed{A=1}$

nech $x=0$:

$$2 = 1\cdot(0+1)+(B\cdot 0+C)(0-1)$$

$$2 = 1-C$$

$$\boxed{C=-1}$$

potom z porovnání metody:

$$2 = (Ax^2)-Ax+Bx^2-Bx+Cx-C$$

$x^2$: $0 = A+B$

$0 = 1+B$

$\boxed{B=-1}$

máme za 2. integrál:

$$\int \left(x+1+\boxed{\frac{1}{x-1}}+\boxed{\frac{-x-1}{x^2+1}}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x^2+1)}\,dx = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+1}\,dx$$

chceme v čitateli $(2x)$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1| - \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x}{x^2+1} + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx\right) = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| -$$

int. vzorec $\int \frac{1}{t}\,dt$ int. vzorec

$$-\operatorname{arctg} x + C$$

## INTEGROVÁNÍ NĚKTERÝCH IRACIONÁLNÍCH FUNKCÍ (obsahují odmocniny)

$\boxed{\text{příklad}}$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = \left|\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5\,dt \\ \sqrt{x} = t^3 \\ \sqrt[3]{x} = t^2 \end{array}\right| = \int \frac{1}{t^3+t^2}\,6t^5\,dt = 4\int \frac{t^3}{t^2+t}\,dt =$

nsn $\{2,3\} = 6$

IRACIONÁLNÍ F.

$\sqrt{x} = t$

$x = t^2$

$$= 4\int \frac{t^2\cdot t}{t(t+1)}\,dt = 4\int \frac{t^2}{t+1}\,dt = 4\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

mnohočlen

dostaneme racionální funkci

$$\left(\begin{array}{l} t^2:(t+1) = t-1 \\ -(t^2+t) \\ \quad -t \\ \quad -(-t-1) \\ \quad\quad 1 \end{array}\right)$$

$$= 4\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C = 2\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x}+4\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C$$

$f(x) = x$, $f'(x) = 1$, $\frac{1}{x}$ ... $f(x)$

VŠEOBECNĚ integrál typu $\int R\left[x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, \dots, x^{\frac{1}{k_n}}\right]dx$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$

$x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$

ruším nestálicou: $\boxed{x = t^k}$

kde $k$ je nsn $\{k_1, \dots, k_n\}$, potom mi vznikne

dostaneme racionální funkci

$\frac{A}{B+C} = \frac{A}{B}+\frac{A}{C}$

$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C}+\frac{B}{C}$

příklad: $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx = \left|\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5\,dt \\ \sqrt[6]{x} = t \\ \sqrt[3]{x} = t^2 \\ \sqrt{x} = t^3 \end{array}\right| = \int \frac{t}{t^2+t^3}\,6t^5\,dt =$

nsn $\{6,3,2\} = 6$

$$= 6\int \frac{t^{6+1}}{t^2(1+t)}\,dt = 6\int \frac{t^4}{1+t}\,dt = 6\int \left(t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

pracuji

už je to poz. zlomek

$m \geq n$

mnohočlen dělení

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

$m < n$

$$t^4:(t+1) = t^3-t^2+t-1$$

$$\left(\begin{array}{l} (t^4+t^3) \\ -t^3 \\ -(-t^3-t^2) \\ t^2 \\ -(t^2+t) \\ -t \\ -(-t-1) \\ 1 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{t+1}$ + vyjádřeme

$$= 6\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x}^4}{4}-\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln|\sqrt[6]{x}+1|\right)+C$$

## DALŠÍ TYP IRACION. FUNKCIE

pod odmocninami může být

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$\boxed{\text{příklad}}$ $\int \frac{4\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}\,dx = \left|\begin{array}{l} x+2 = t^6 \\ \boxed{x = t^6-2} \\ dx = 6t^5\,dt \\ \sqrt{x+2} = t^3 \\ \sqrt[3]{x+2} = t^2 \\ t = \sqrt[6]{x+2} \end{array}\right| = \int \frac{4(t^6-2)+5\cdot t^3}{(t^2)^2}\,6t^5\,dt =$

$\sqrt[3]{(x+2)^2} = \sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{x+2}$

nsn $\{2,3\} = 6$

$\sqrt[3]{(x+2)^2} = \left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2$

$$= 6\int \frac{4t^6-8+5t^3}{t^4}\,t^5\,dt$$

$$= 6\int \left(4t^7-8t+5t^4\right)dt = 6\left[\frac{4t^8}{8}-\frac{8t^2}{2}+\frac{5t^5}{5}\right]+C =$$

$$= 3\cdot t^8-24t^2+6t^5+C = 3\sqrt[6]{x+2}^8-24\sqrt[3]{x+2}+6\sqrt[6]{x+2}^5+C =$$

$$= 3\sqrt[3]{(x+2)^4}-24\sqrt[3]{x+2}+6\sqrt[6]{(x+2)^5}+C$$