Matematika 2 – 8.cvičenie opakujúci

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Určitý integrál

3.1 Newton – Leibnizov vzorec

Nech funkcia *f* je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech má na tomto intervale primitívnu funkciu *F*(*x*). Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \text{číslo}$$

určitý integrál

dané hranice integrovania

a dolná hranica

b horná hranica

Pr. 1: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_{-1}^{1} \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) \mathrm{d}x$$

Pr. 2: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^3 (x^2+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^3 \left(x^2 + x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\right]_1^3 =$$

$$\left(\frac{1}{3}3^3 + \frac{2}{3}\sqrt[2]{3^3}\right) - \left(\frac{1}{3}0^3 + \frac{2}{3}\sqrt[2]{0^3}\right) = \left(\frac{1}{3}3^3 + \frac{2}{3}\sqrt[2]{3^3}\right) - 0 = \left(\mathbf{9} + \mathbf{2}\sqrt[2]{\mathbf{3}}\right)$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[2]{3^2.3} = \frac{2}{3}\sqrt[2]{3^2}.\sqrt[2]{3} = \frac{2}{3}3\sqrt[2]{3}$$

Pr. 3 : Vypočítajte určitý integrál

$$\int_{0}^{2} \frac{5x - 10}{x - 1} \, \mathrm{d}x$$

Pr. 4 – 58 / 5: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{(\cancel{x-2})(x-3)}{\cancel{x-2}} \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (x-3)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1^2}{2} - 3.1 \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} - 3.(-1) \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} + 3 \right) = -3 - 3 = \mathbf{-6}$$

Určitý integrál

3.2 Substitučná metóda

Nech funkcia *f* je spojitá na intervale $\mathrm{I} \in \langle a, b\rangle$ a nech funkcia má spojitú deriváciu na ohraničenom intervale $\mathrm{J} \in \langle c, d\rangle$ a zobrazuje interval I do J. Potom platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_c^d = \mathrm{F}(d) - \mathrm{F}(c)$$

$$\left|\begin{array}{c} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ a \to c = \varphi(a) \\ b \to d = \varphi(b) \end{array}\right|$$

c, d nové hranice po substitúcii pre t

a, b pôvodné hranice pre x

Pr. 5 – 58 / 17: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos x)^4 \sin x \, dx$$

Pr. 6 – 58 / 14: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^1 2x(x^2+2)^3\,dx$$

$$\int_0^1 2x\,(x^2+2)^3\,\mathrm{d}x = \int_2^3 t^3\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4}\right]_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \mathbf{\frac{65}{4}}$$

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + 2 = t \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{dt} \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \to t = 1 + 2 = 3 \\ 0 \to t = 0 + 2 = 2 \end{array}$$

Pr. 7 – 58 / 20: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$$

Určitý integrál

3.3 Metóda per partes

Nech funkcie *u*,*v* sú spojito diferencovateľné na intervale $\mathrm{I} \in \langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b u(x).\, v'(x)\mathrm{d}x = [u(x).\, v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{dx}$$

Pr. 8 – 60 / 36: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^2 xe^{-x}\,dx$$

Pr. 9: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_1^2 (2x+1)e^x$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = 2x + 1 & v' = e^x \\ u' = 2 & v = e^x \end{array} \right|$$

$$[(2x+1)e^x]_1^2 - \int_1^2 2e^x \,\mathrm{d}x = [(2x+1)e^x]_1^2 - [2e^x]_1^2 =$$

$$= (4+1)e^2 - (2+1)e^1 - 2e^2 + 2e^1 = 3e^2 - e^1$$

Pr. 10 – 60 / 34: Vypočítajte určitý integrál

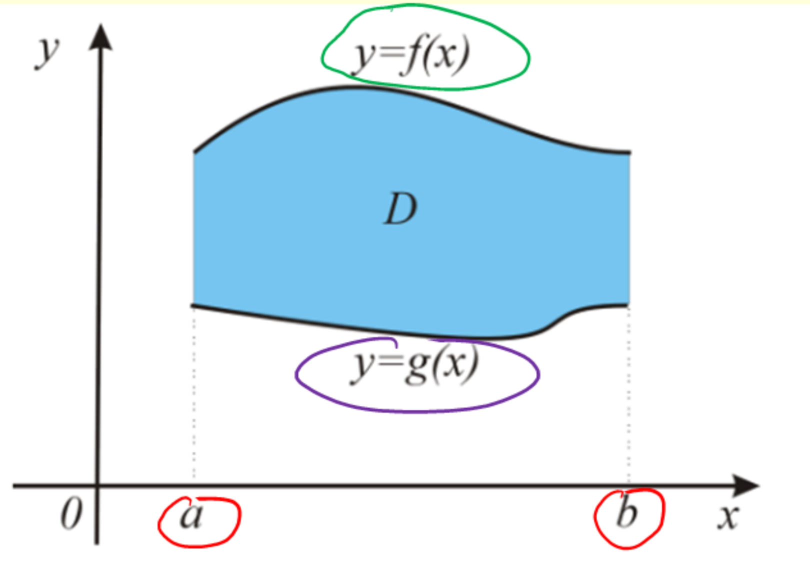
$$\int_{2}^{e} x \ln x \, dx$$

Dú: str. 58 / 3, 15, 16, 19, 32, 33

Použitie určitého integrálu
Plošný obsah rovinných útvarov

elementárna oblasť vzhľadom na os *x* **typ [x, y]**

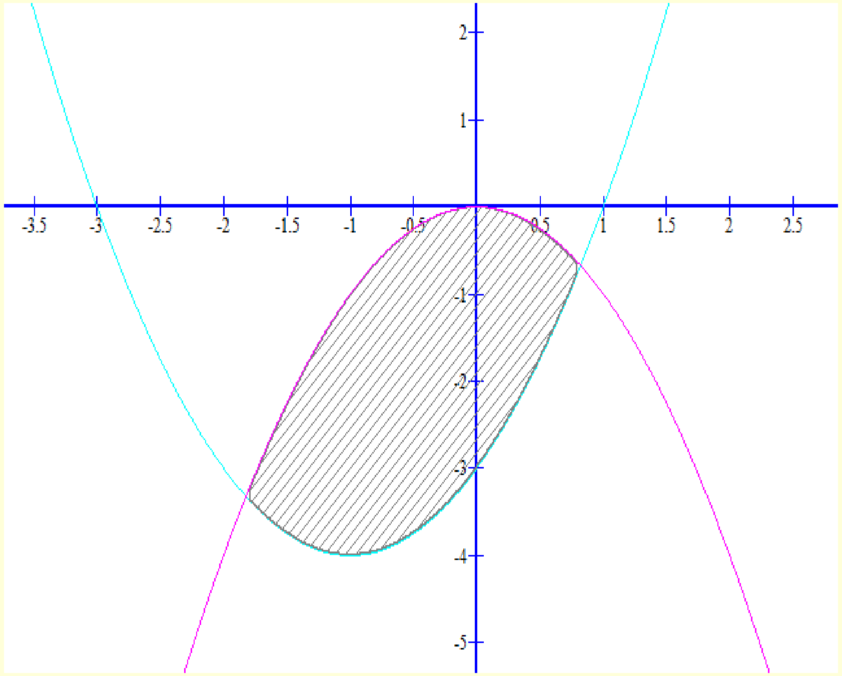
$$a \leq \boldsymbol{x} \leq b$$
$$g(x) \leq \boldsymbol{y} \leq f(x)$$

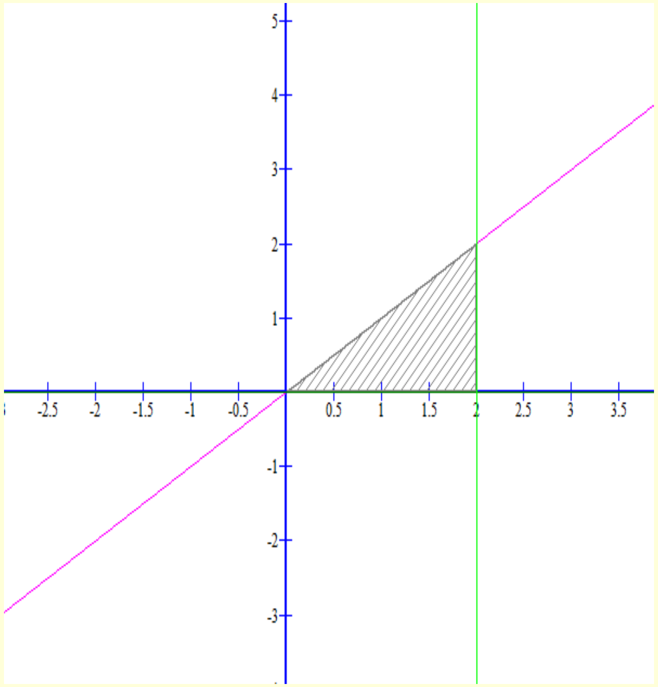


plocha je zhora a zdola ohraničená funkciami

Plošný obsah elementárnej oblasti D sa počíta podľa vzorca $P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.

Príklady:

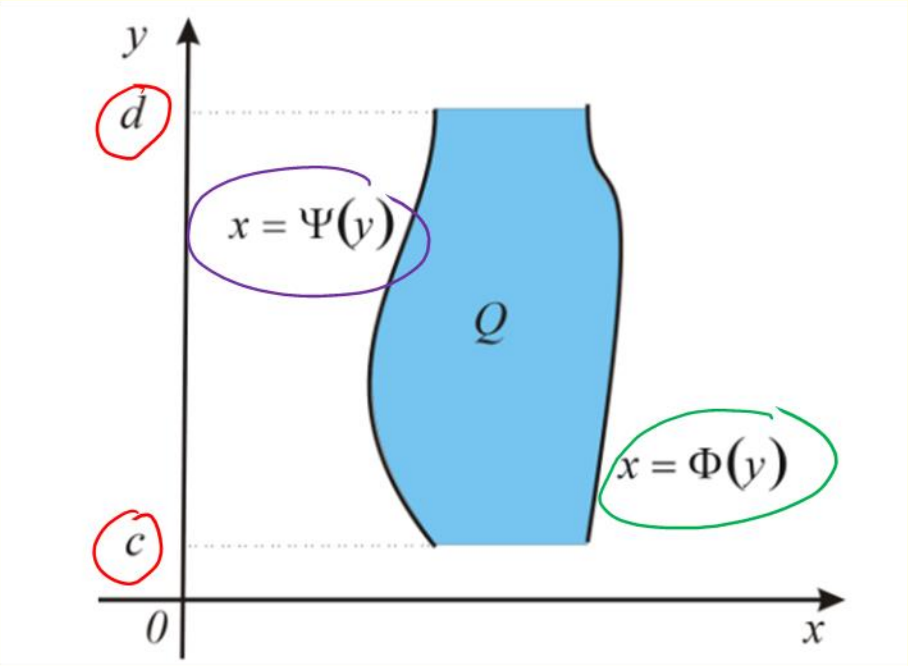




plocha je zhora a zdola ohraničená funkciami

elementárna oblasť vzhľadom na os *y* **typ [y,x]**

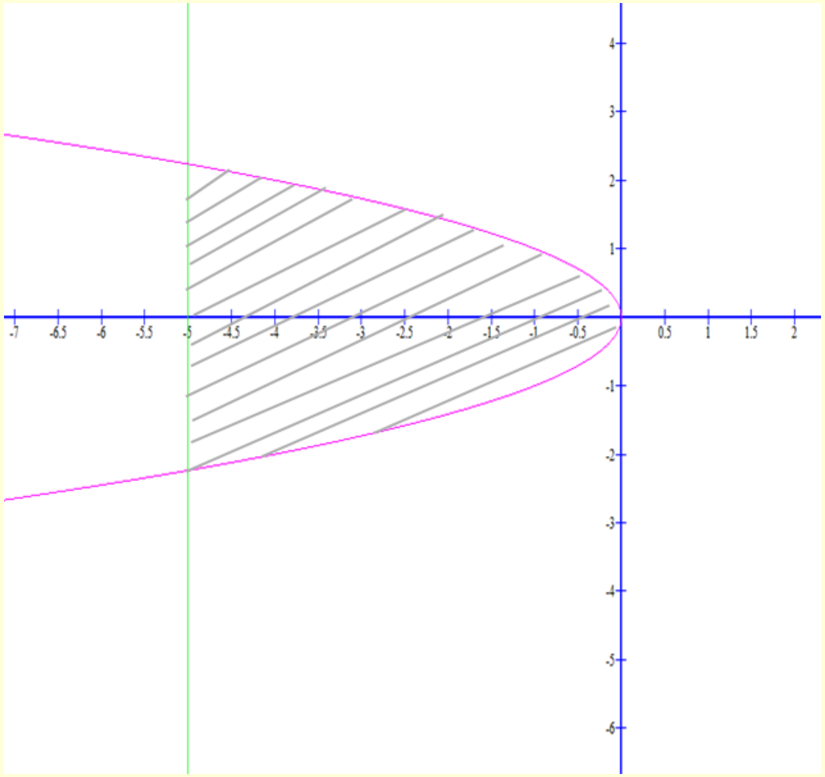
$$c \leq \boldsymbol{y} \leq d$$
$$\Psi(y) \leq \boldsymbol{x} \leq \phi\,(y)$$

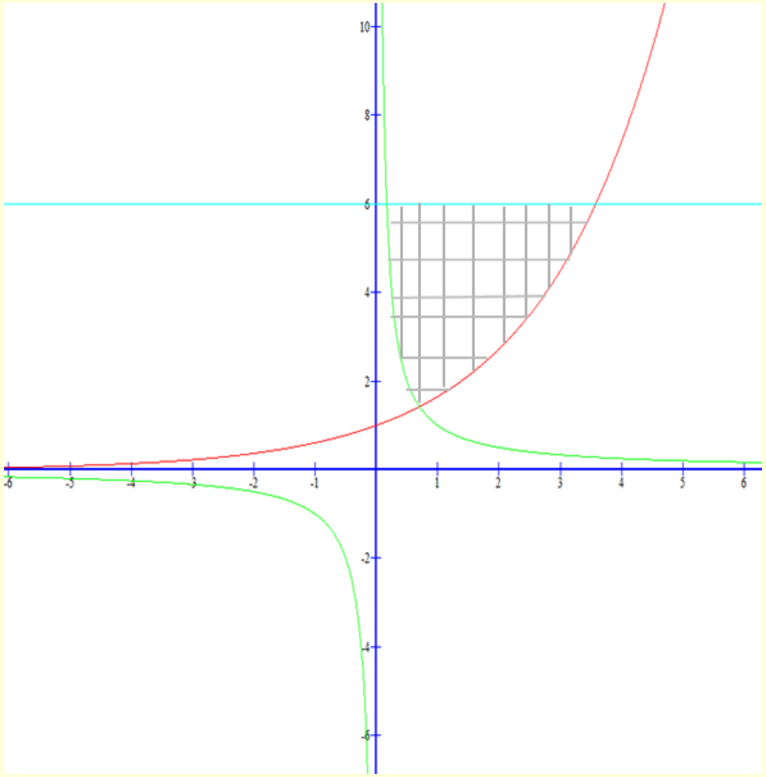


plocha je zprava a zľava ohraničená funkciami

Plošný obsah elementárnej oblasti Q sa počíta podľa vzorca $P = \int_c^d [\Phi(y) - \Psi(y)]\,dy$.

Príklady:

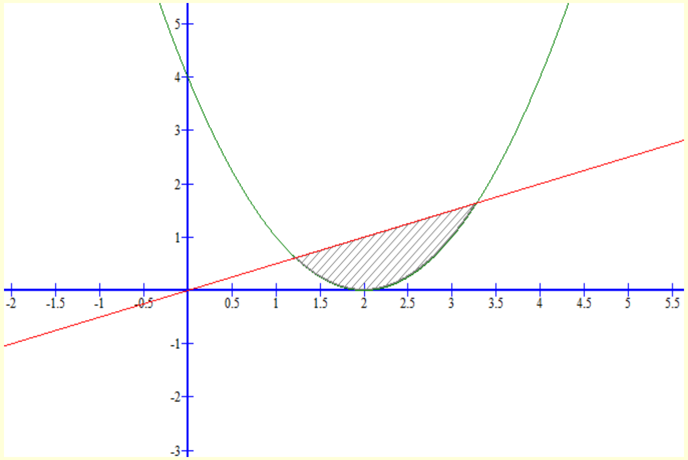




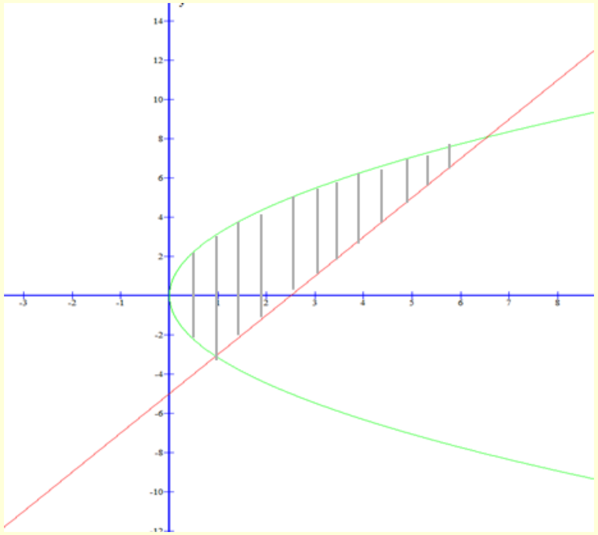
plocha je zprava a zľava ohraničená funkciami

Určte typ elementárnej oblasti v nasledujúcich príkladoch:

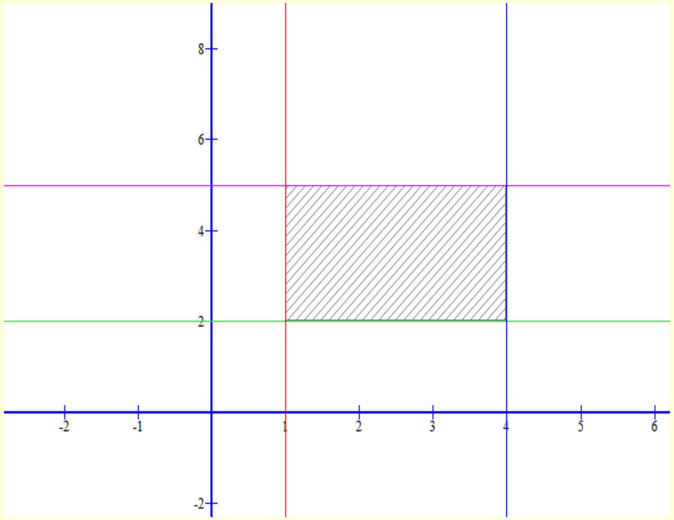
a)



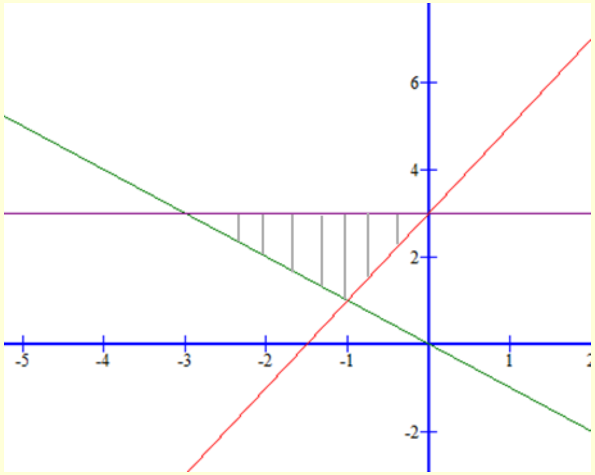
b)



c)



d)



Výsledky: [x, y] - a, c , [y, x] – b,c, d

Pr. 1: Sú dané krivky $y = 2e^x, y = e^x + 2, x = 0.$ Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

1. **zobraziť krivky do grafu a určiť typ elementárnej oblasti**
2. **Určiť hranice plochy – vypočítať priesečníky**
3. **Vypočítať plochu oblasti**