

Matematika 2 – 9.cvičenie

opakujúci

RNDr. Z. Gibová, PhD.

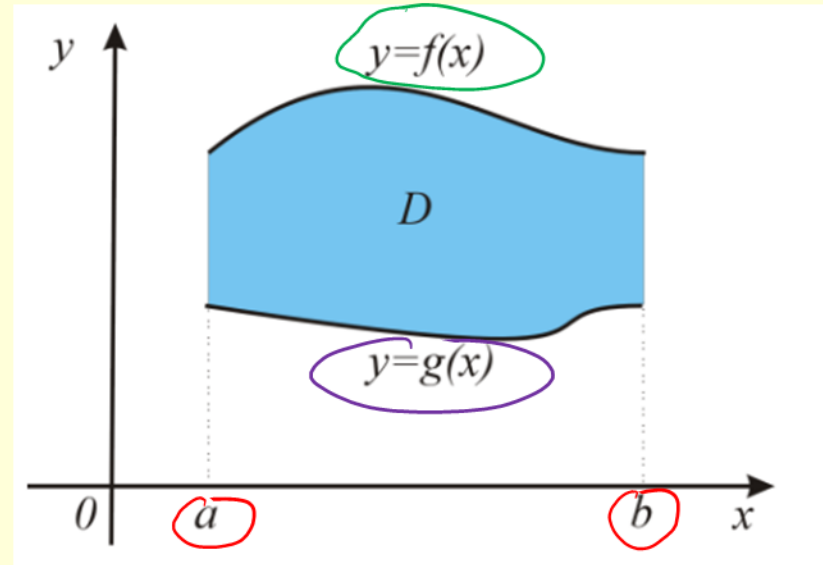
Použitie určitého integrálu

Plošný obsah rovinných útvarov

elementárna oblasť vzhľadom na os x **typ** $[x, y]$

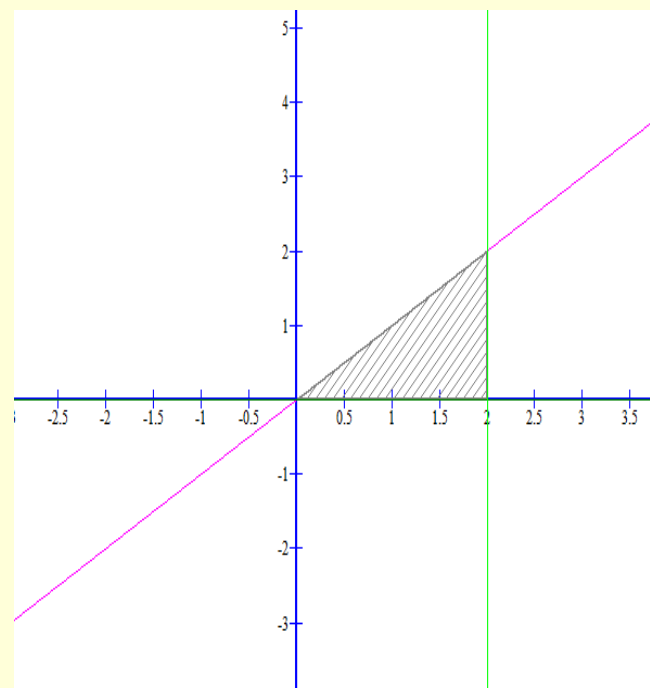
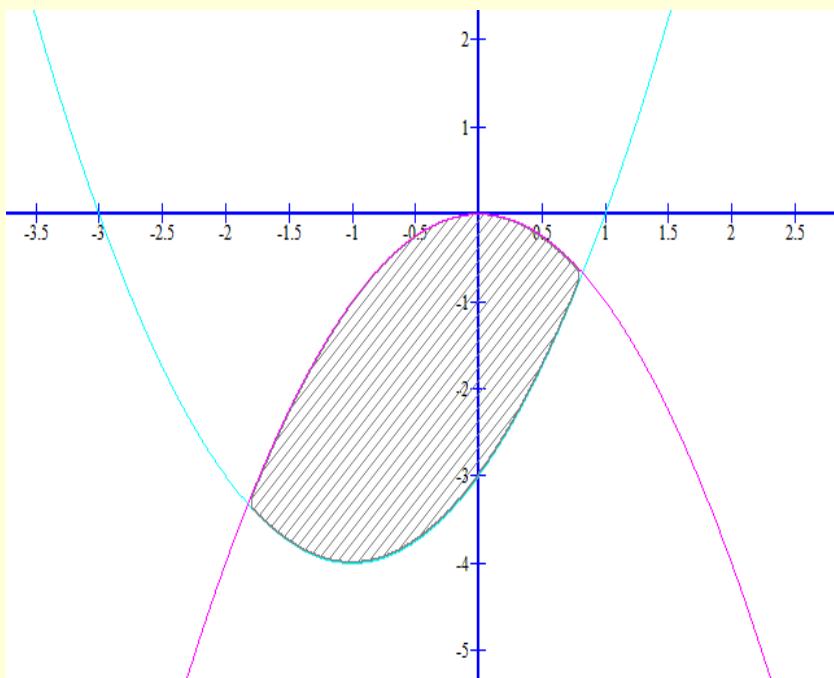
$$a \leq x \leq b$$
$$g(x) \leq y \leq f(x)$$

plocha je zhora a zdola ohraničená
funkciami



Plošný obsah elementárnej oblasti D sa počíta podľa vzorca $P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

Príklady:

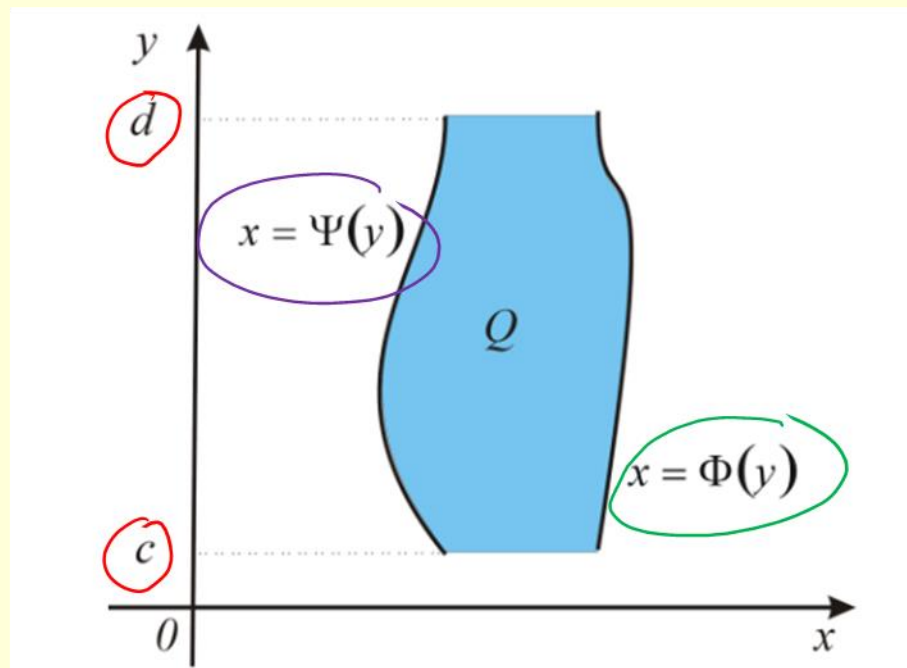


plocha je zhora a zdola ohraničená funkciami

elementárna oblasť vzhľadom na os y **typ** $[y, x]$

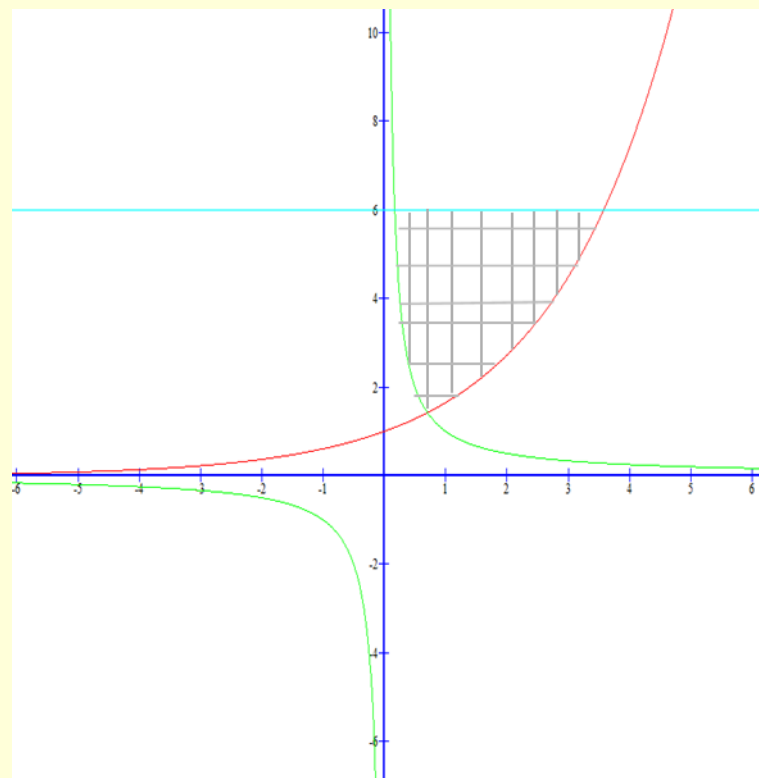
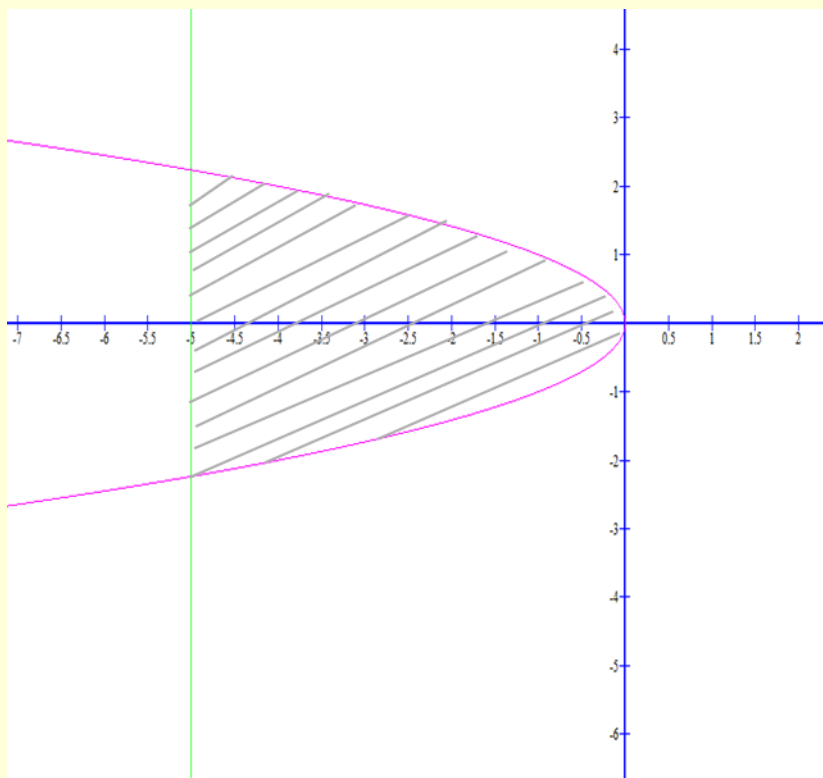
$$c \leq y \leq d$$
$$\Psi(y) \leq x \leq \Phi(y)$$

plocha je zprava a zľava ohraničená
funkciami



Plošný obsah elementárnej oblasti Q sa počíta podľa vzorca $P = \int_c^d [\Phi(y) - \Psi(y)] dy$.

Príklady:

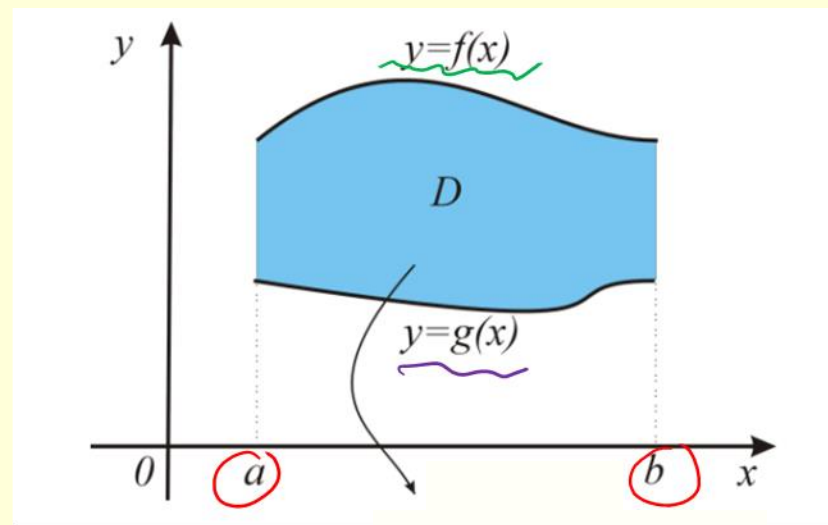


plocha je zprava a zľava ohraničená funkciami

Použitie určitého integrálu

Objem rotačného telesa

$$a \leq x \leq b$$
$$g(x) \leq y \leq f(x)$$



Rotácia okolo osi x

Rotáciou krivočiareho lichobežníka A v priestore $\mathbf{R}^3$ s osami x, y, z , okolo x -ovej osi vznikne rotačné teleso, ktorého objem V vypočítame pomocou vzorca

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

Pr. 1 – 66 / 18: Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

$$y = \frac{4}{x}, y = 6 - 2x$$

1. zobrazit' krivky do grafu a určiť typ elementárnej oblasti
2. určiť hranice plochy – vypočítat' priesečníky (x - ové súradnice priesečníkov, dávame do rovnosti y – ové súradnice)
3. Vypočítat' plochu oblasti

Pr. 2 – 65 / 14: Vypočítajte

a) obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami,

b) objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti okolo osi x .

$$y = x^2 - x, y = -x^2 + 3x$$

Pr. 3: Sú dané krivky $y = x^2, y = 4$. Vypočítajte

a) obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami,

b) objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti okolo osi x .

1. zobrazit' krivky do grafu a určiť typ elementárnej oblasti

$y = x^2$ graf - parabola $y = 4$ graf - priamka

$V(0, 0)$

$x = 1, y = 1$

$x = -1, y = 1$

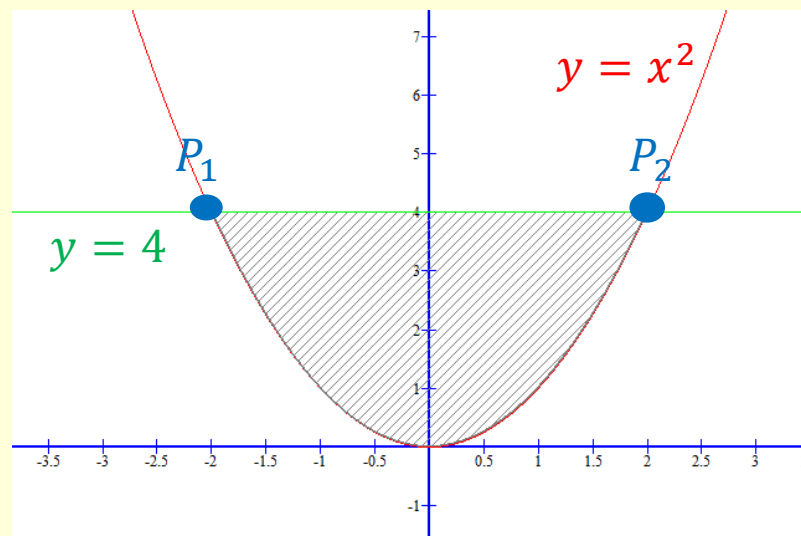
$x = 0, y = 4$

$x = 1, y = 4$

Plocha typ $[x, y]$:

$$x_{p1} \leq x \leq x_{p2}$$

$$g(x) \leq y \leq f(x)$$



2. určiť hranice plochy – vypočítať priesečníky (x - ové súradnice priesečníkov, dávame do rovnosti y – ové súradnice)

$$y_1 = y_2$$

$$x^2 = 4$$

$$x_p = \pm 2$$

$$x_{p1} = -2, x_{p2} = 2$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$x^2 \leq y \leq 4$$

3. Vypočítat' plochu oblasti

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \\ &= \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = \left(\frac{16}{3} \right) - \left(-\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

4. Vypočítat' objem oblasti

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_{-2}^2 (4^2 - (x^2)^2) dx =$$

$$V = \pi \int_{-2}^2 (16 - x^4) dx = \pi \left[16x - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 = \pi \left[\left(16 \cdot 2 - \frac{2^5}{5} \right) - \left(16 \cdot (-2) - \frac{(-2)^5}{5} \right) \right]$$

$$V = \pi \left[\left(32 - \frac{32}{5} \right) - \left(-32 - \frac{(-32)}{5} \right) \right] = \pi \frac{256}{5}$$

Kontrolka: Doplňte chýbajúce hranice pre danú elementárnu oblasť:

a) typu $[x, y]$

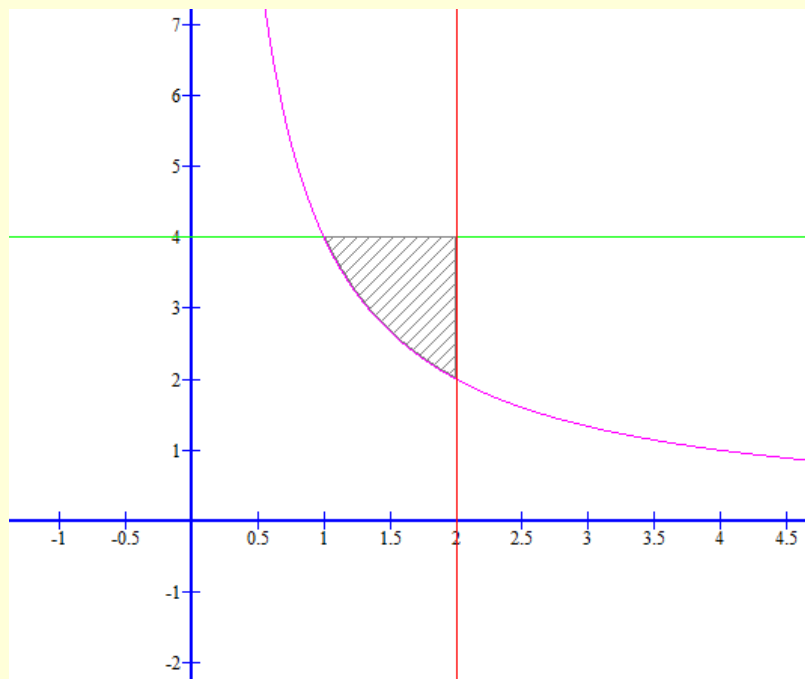
$$? \leq x \leq 2$$

$$\frac{4}{x} \leq y \leq ?$$

b) typu $[y, x]$

$$2 \leq y \leq ?$$

$$? \leq x \leq 2$$



Pr. 4 – 64 / 4: Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

$$x = y^2, y = x - 2$$

Pr. 5: Vypočítajte

- a) obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami,
- b) objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti okolo osi x .

$$y = 3, y = x, x = 0$$

1. zobrazit' krivky do grafu a určiť typ elementárnej oblasti

$y = x$ graf - priamka

$$x = 1, y = 1$$

$$x = -1, y = -1$$

$y = 3$ graf - priamka

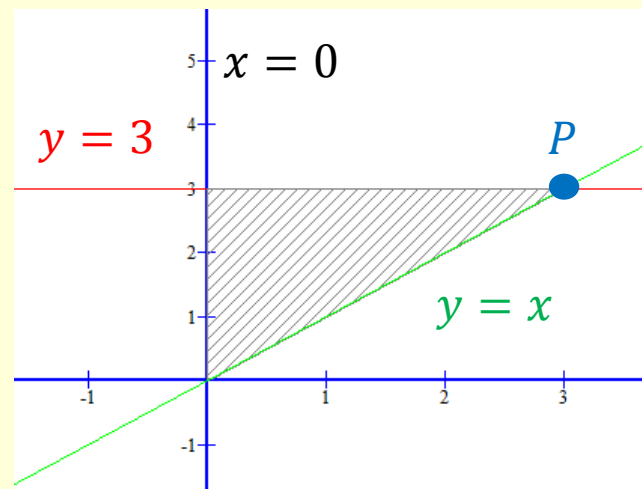
$$x = 0, y = 3$$

$$x = -2, y = 3$$

Plocha typ $[x,y]$:

$$0 \leq x \leq x_p$$

$$g(x) \leq y \leq f(x)$$



2. určiť hranice plochy – vypočítať priesečníky (y-ové súradnice priesečníkov, dávame do rovnosti x –ové súradnice)

$$y_1 = y_2$$

$$x = 3 \rightarrow x_p = 3$$

$$0 \leq x \leq 3$$

$$x \leq y \leq 3$$

3. Vypočítat' plochu oblasti

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

$$P = \int_0^3 (3 - x)dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \left(3 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} \right) - 0 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

4. Vypočítat' objem oblasti

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx$$

$$V = \pi \int_0^3 (3^2 - x^2)dx = \pi \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \pi \left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} \right) - 0 = \pi(27 - 9) = 18\pi$$

Dú: kap. 64 / 3, 8, 13, 17, 19, 22, 33, 35, 42, 45
68 / 2, 6, 7, 9, 11, 13, 18, 22, 25, 29

7. Malá písomka

1. (0,2 b) Vyriešte určitý integrál

$$\int_1^3 (3x^2) dx = \left[\frac{3x^3}{3} \right]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 26$$

2. (0,3 b) Vyriešte určitý integrál pomocou substitúcie

$$\int_1^e \ln x \frac{1}{x} dx = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right|_{x=1 \rightarrow t=\ln 1=0}^{x=e \rightarrow t=\ln e=1}$$