

# Matematika 2 – 9.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

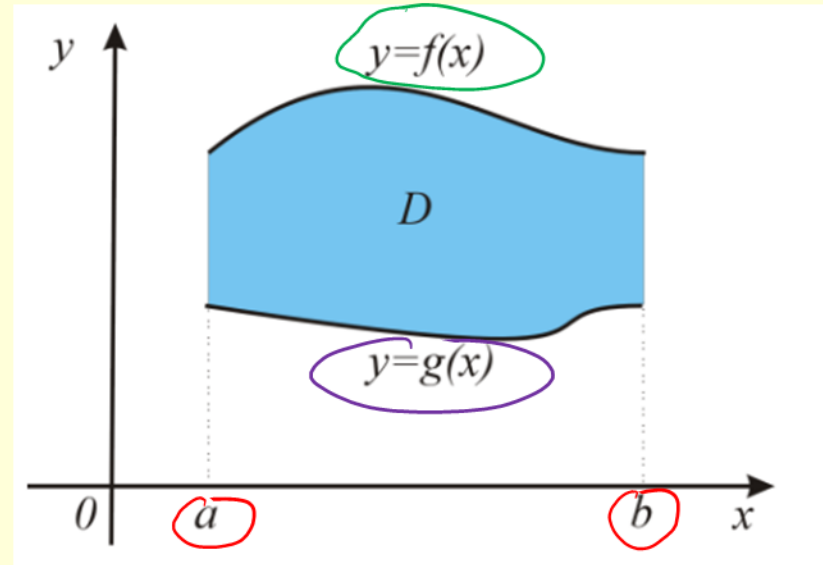
# Použitie určitého integrálu

## Plošný obsah rovinných útvarov

**elementárna oblasť** vzhľadom na os  $x$  **typ**  $[x, y]$

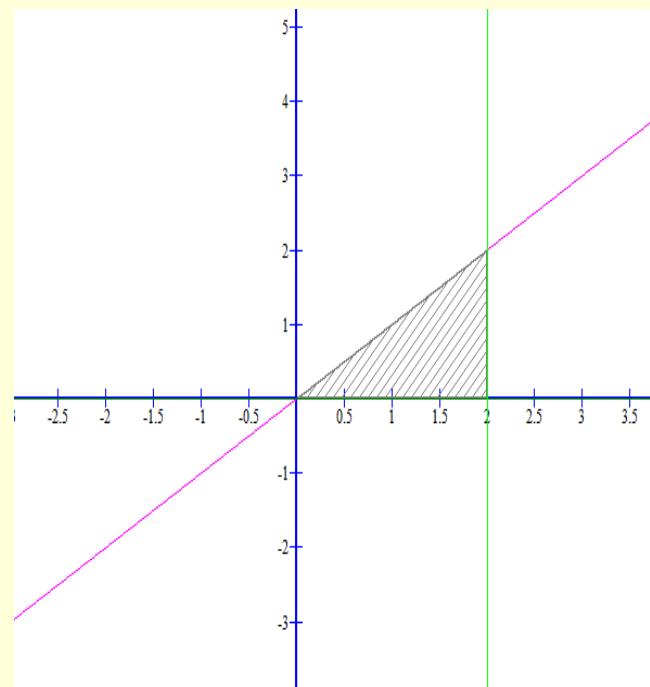
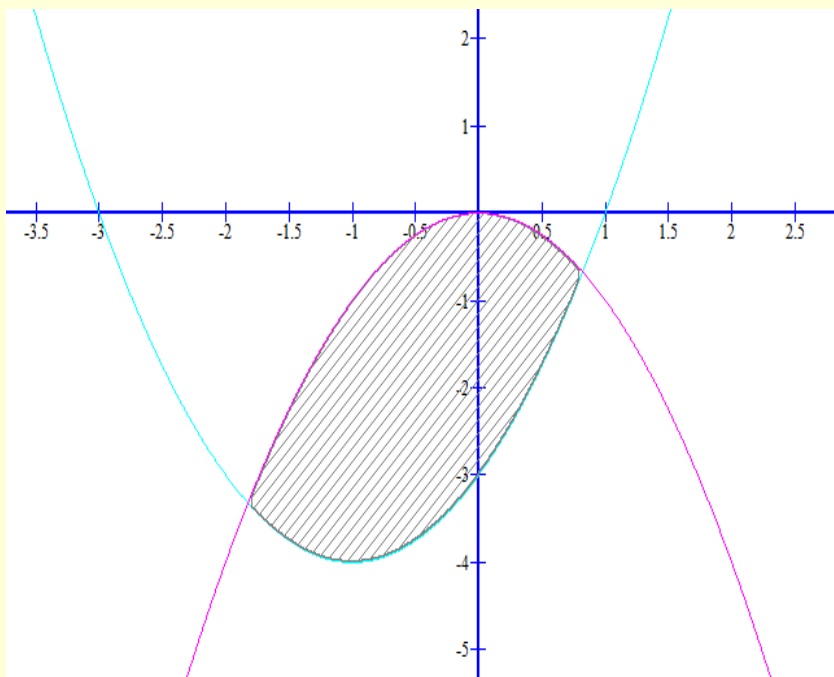
$$a \leq x \leq b$$
$$g(x) \leq y \leq f(x)$$

plocha je zhora a zdola ohraničená  
funkciami



Plošný obsah elementárnej oblasti  $D$  sa počíta podľa vzorca  $P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ .

## Príklady:

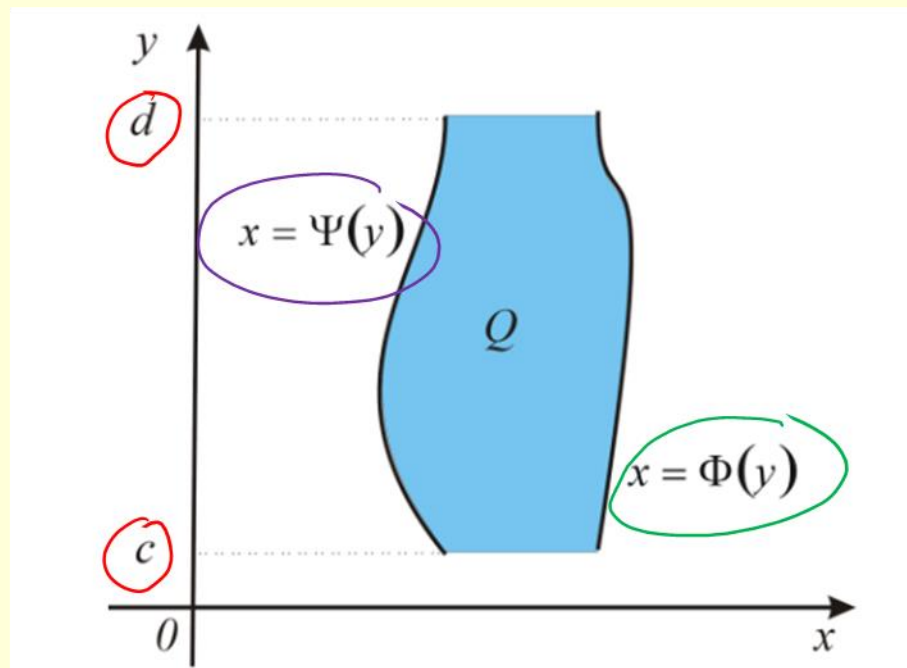


plocha je zhora a zdola ohraničená funkciami

**elementárna oblasť** vzhľadom na os  $y$  **typ**  $[y, x]$

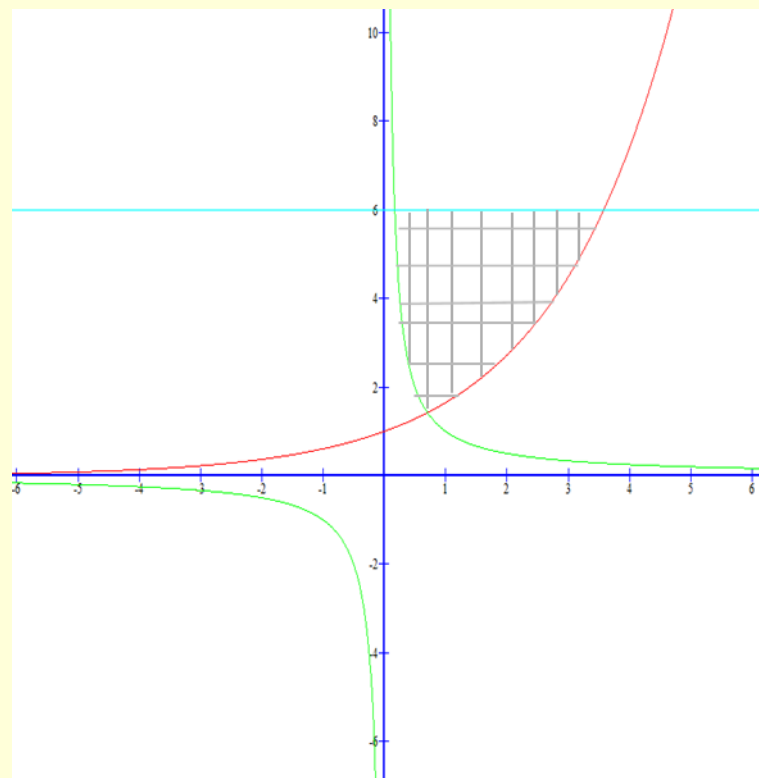
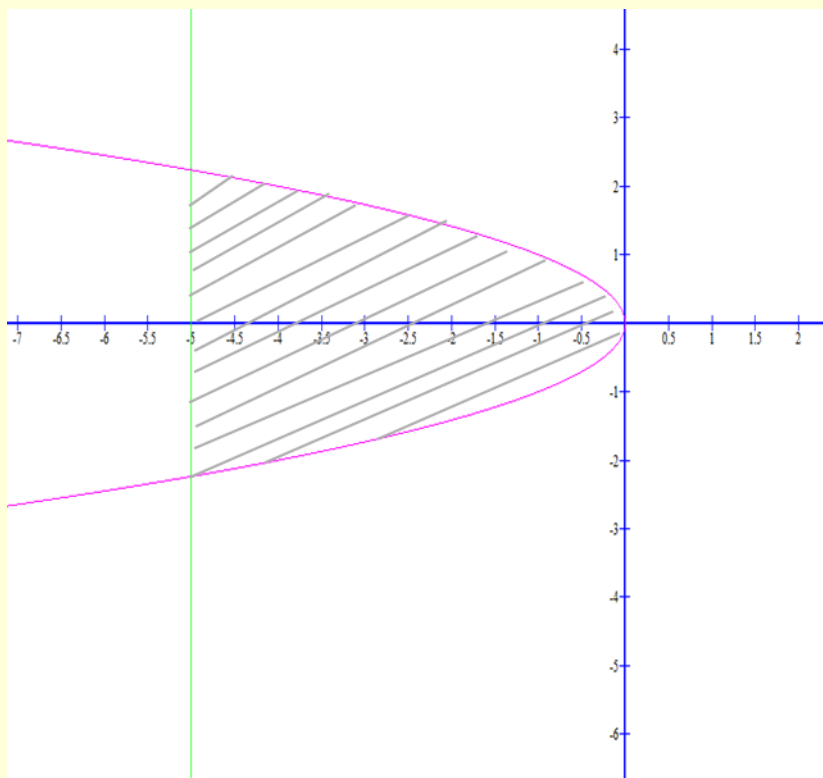
$$c \leq y \leq d$$
$$\Psi(y) \leq x \leq \Phi(y)$$

plocha je zprava a zľava ohraničená  
funkciami



Plošný obsah elementárnej oblasti  $Q$  sa počíta podľa vzorca  $P = \int_c^d [\Phi(y) - \Psi(y)] dy$ .

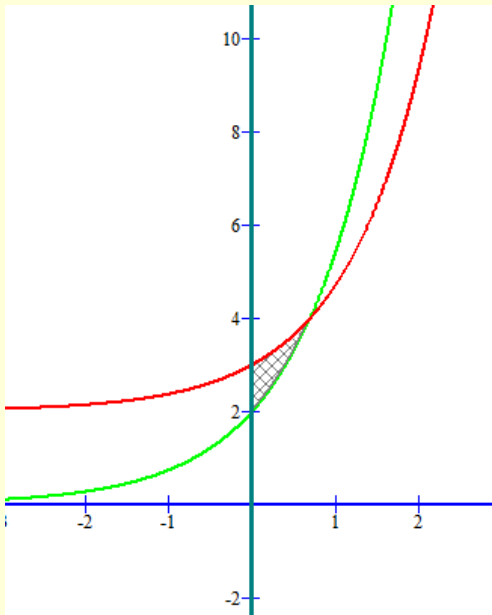
## Príklady:



plocha je zprava a zľava ohraničená funkciami

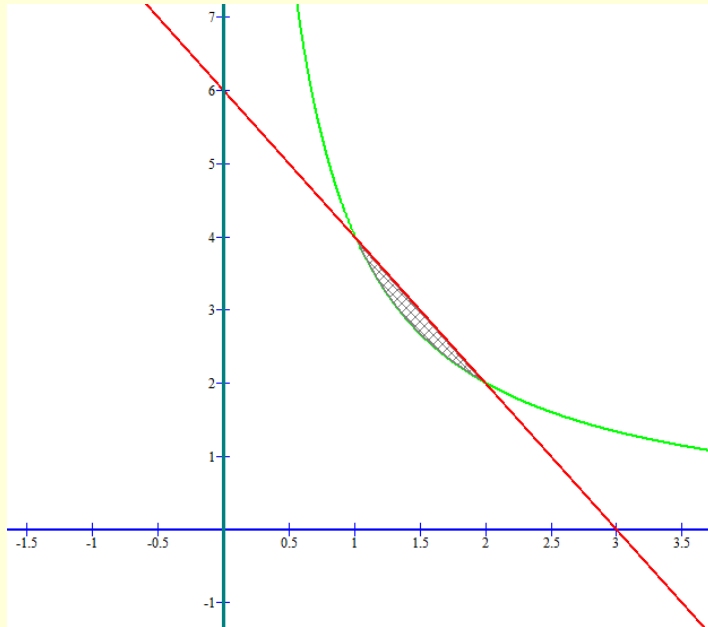
**Pr. 1:** Sú dané krivky  $y = 2e^x$ ,  $y = e^x + 2$ ,  $x = 0$ . Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

1. zobrazit' krivky do grafu a určiť typ elementárnej oblasti
2. Určiť hranice plochy – vypočítať priesečníky
3. Vypočítať plochu oblasti



**Pr. 2 – 66 / 18:** Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

$$y = \frac{4}{x}, y = 6 - 2x$$



**Pr. 3:** Sú dané krivky  $y = x^2$ ,  $y = 4$ . Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

### 1. zobrazit' krivky do grafu a určiť typ elementárnej oblasti

$y = x^2$  graf - parabola     $y = 4$  graf - priamka

$V(0, 0)$

$x = 1, y = 1$

$x = -1, y = 1$

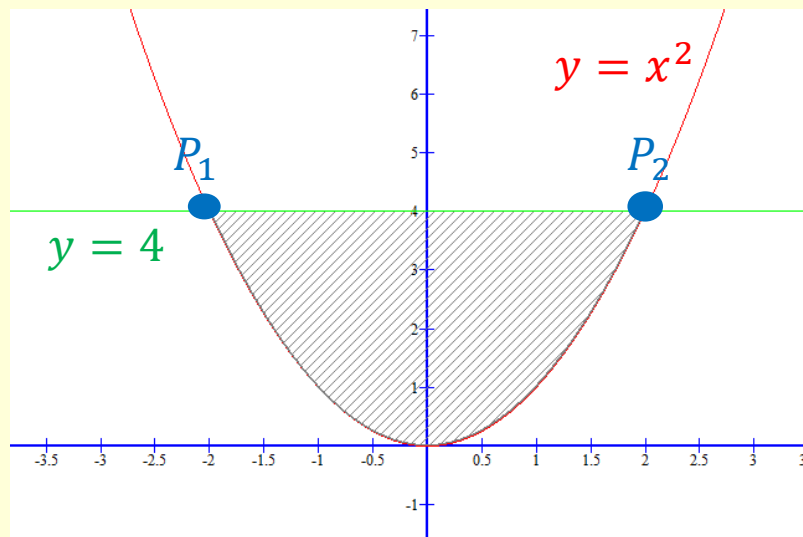
$x = 0, y = 4$

$x = 1, y = 4$

**Plocha typ  $[x, y]$ :**

$$x_{p1} \leq x \leq x_{p2}$$

$$g(x) \leq y \leq f(x)$$



### 2. určiť hranice plochy – vypočítať priesečníky (x - ové súradnice priesečníkov, dávame do rovnosti y – ové súradnice)

$$y_1 = y_2$$

$$x^2 = 4$$

$$x_p = \pm 2$$

$$x_{p1} = -2, x_{p2} = 2$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$x^2 \leq y \leq 4$$

### 3. Vypočítat' plochu oblasti

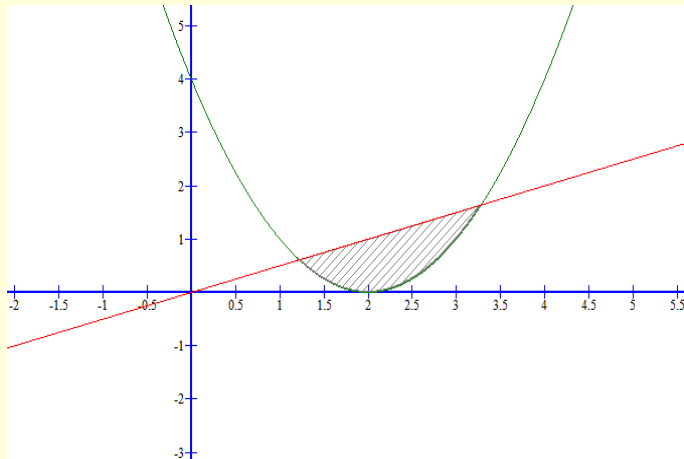
$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

$$P = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left( 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left( 4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) =$$

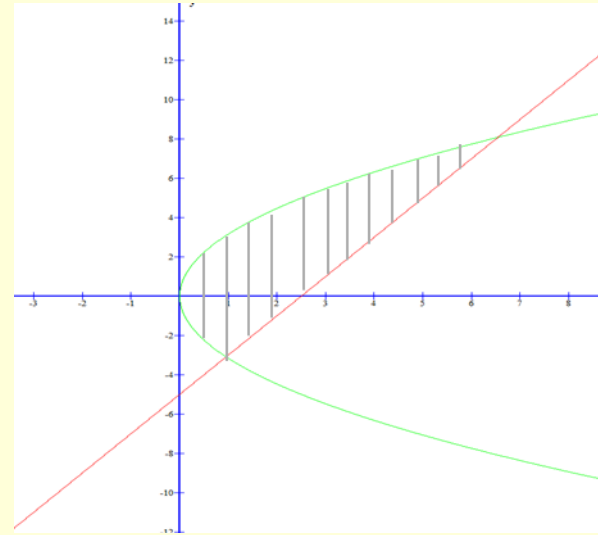
$$= \left( 8 - \frac{8}{3} \right) - \left( -8 + \frac{8}{3} \right) = \left( \frac{16}{3} \right) - \left( -\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

**Kontrolka: Určte typ elementárnej oblasti v nasledujúcich príkladoch:**

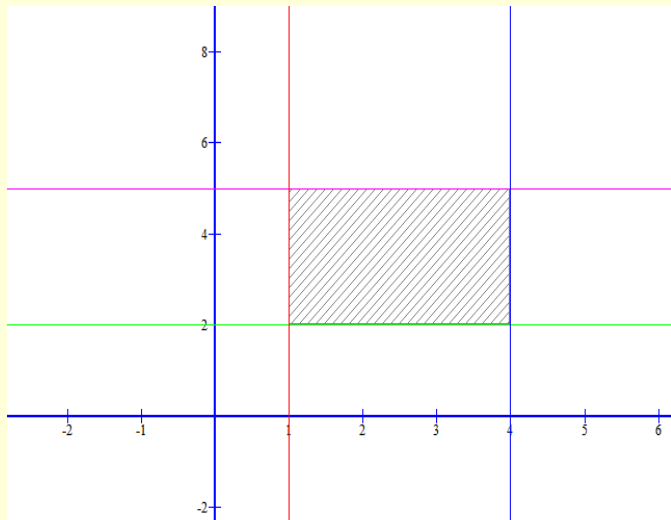
a)



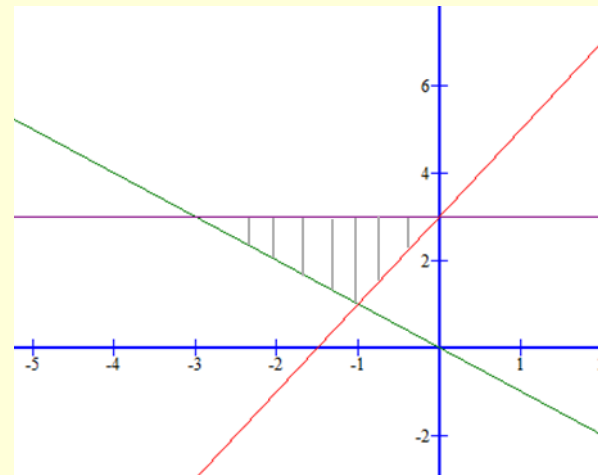
b)



c)



d)

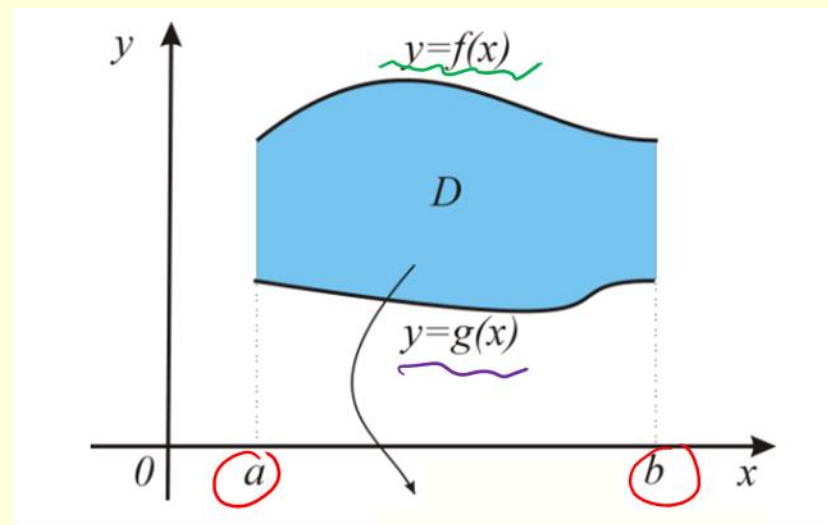


Výsledky:  $[x, y]$  - a, c,  $[y, x]$  - b, c, d

# Použitie určitého integrálu

## Objem rotačného telesa

$$a \leq x \leq b$$
$$g(x) \leq y \leq f(x)$$



Rotácia okolo osi x

Rotáciou krivočiareho lichobežníka  $A$  v priestore  $\mathbf{R}^3$  s osami  $x, y, z$ , okolo  $x$ -ovej osi vznikne rotačné teleso, ktorého objem  $V$  vypočítame pomocou vzorca

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

**Pr. 4 – 65 / 14:** Vypočítajte

a) obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami,

b) objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti okolo osi  $x$ .

$$y = x^2 - x, y = -x^2 + 3x$$

## 1. zobrazit' krivky do grafu a určiť typ elementárnej oblasti

$y = x^2 - x$  graf - parabola

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$x = 1, y = 0$$

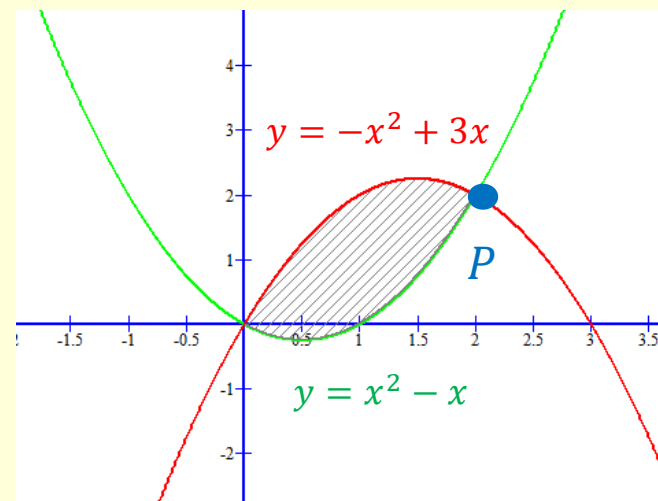
$$x = 0, y = 0$$

$y = -x^2 + 3x$  graf - parabola

$$y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}, V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

$$x = 0, y = 0$$

$$x = 3, y = 0$$



**Plocha typ  $[x,y]$ :**

$$0 \leq x \leq x_p$$

$$g(x) \leq y \leq f(x)$$

## 2. určiť hranice plochy – vypočítať priesečníky (y-ové súradnice priesečníkov, dávame do rovnosti x –ové súradnice)

$$y_1 = y_2$$

$$x^2 - x = -x^2 + 3x$$

$$x^2 + x^2 - x - 3x = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0 \rightarrow x_{p1} = 0, x_{p2} = 2$$

**hranice plochy:**

$$0 \leq x \leq 2$$

$$x^2 - x \leq y \leq -x^2 + 3x$$

### 3. Vypočítat' plochu oblasti

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 (-x^2 + 3x - x^2 + x)dx =$$

$$P = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx = \left[ -2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

### 4. Vypočítat' objem oblasti

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx = \pi \int_0^2 ((-x^2 + 3x)^2 - (x^2 - x)^2)dx =$$

$$V = \pi \int_0^2 ((x^4 - 6x^3 + 9x^2) - (x^4 - 2x^3 + x^2))dx = \pi \int_0^2 ((-4x^3 + 8x^2))dx =$$

$$V = \pi \left[ -4\frac{x^4}{4} + 8\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi$$

**Pr. 5 – 64 / 4:** Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

$$x = y^2, y = x - 2$$

### 1. zobrazit' krivky do grafu a určiť typ elementárnej oblasti

$x = y^2$  parabola

$V(0,0)$

$y = 1, x = 1$

$y = -1, x = 1$

$y = x - 2$  priamka

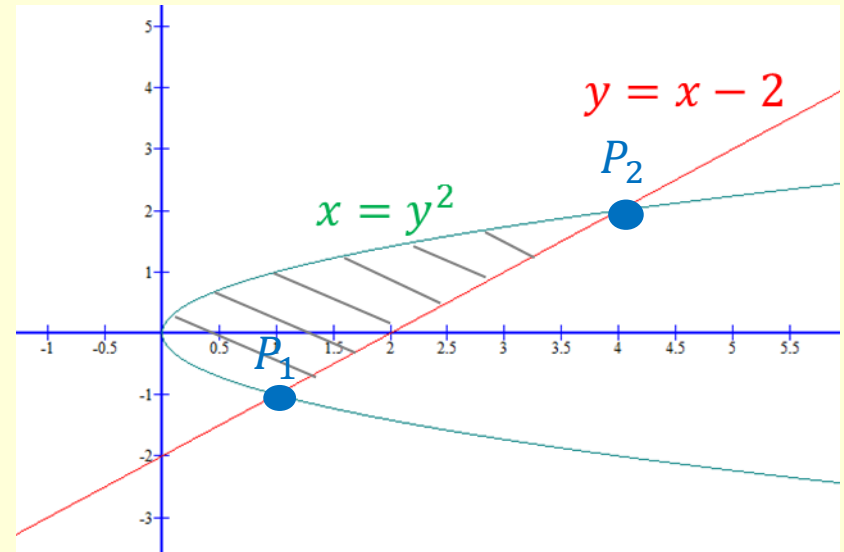
$x = 0, y = -2$

$x = -2, y = 0$

Plocha typ  $[y, x]$ :

$$y_{p1} \leq y \leq y_{p2}$$

$$\Psi(y) \leq x \leq \Phi(y)$$



### 2. určiť hranice plochy – vypočítať priesečníky (y-ové súradnice priesečníkov, dávame do rovnosti x –ové súradnice)

$$x_1 = x_2$$

$$y^2 = y + 2$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y - 2)(y + 1) = 0$$

$$y_{p1} = -1, y_{p2} = 2$$

$$y^2 \leq x \leq y + 2$$

$$-1 \leq y \leq 2$$

### 3. Vypočítat' plochu oblasti

$$P = \int\limits_c^d (\Phi(y) - \Psi(y)) dy$$

$$P = \int\limits_{-1}^2 (y + 2 - y^2) dy = \left[ \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$= \left( \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left( \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{9}{2}$$

Dú: kap. 64 / 3, 8, 13, 17, 19, 22, 33, 35, 42, 45  
68 / 2, 6, 7, 9, 11, 13, 18, 22, 25, 29