

NMPaMŠ – 10. cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pravdepodobnosť

Náhodná premenná

Náhodná premenná – premenná, ktorá nadobúda svoje hodnoty náhodne

Náhodné premenné – $X, Y, X_1, X_2, \dots$

Hodnoty náhodných premenných – $x, y, x_1, x_2, \dots$

1. Diskrétné rozdelenie náhodnej premennej

Pravdepodobnostná tabuľka náhodnej premennej X

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$$

Distribučná funkcia F náhodnej premennej X

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

Modus diskkrétnej náhodnej premennej $M_o(X)$ – najpravdepodobnejšia hodnota náhodnej premennej (X z tabuľky, ktoré má najväčšiu hodnotu pravdepodobnosti)

Stredná hodnota náhodnej premennej

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot p_i$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \text{ kde } E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i.$$

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej X

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Pr. 1:

8.1. Diskrétna náhodná premenná X je daná pravdepodobnostnou tabuľkou
Určte neznámu hodnotu p_5 , strednú hodnotu, modus, disperziu a smerodajnú odchýlku náhodnej premennej X .

i	1	2	3	4	5
x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	p_5

$$\sum_{i=1}^5 p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

$$p_5 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0,1296$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i p_i = 1 \cdot 0,1536 + 2 \cdot 0,3456 + 3 \cdot 0,3456 + 4 \cdot 0,1296 = 2,$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6,72 - 2,4^2 = 0,96$$

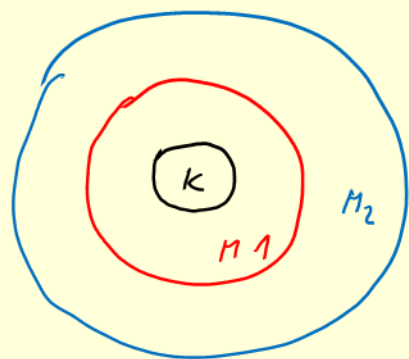
$$E(X^2) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 p_i = 6,72$$

$$M_0(X) = 2 \quad M_1(X) = 3 \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0,9798$$

Pr. 2:

10. Terč tvorí kruh K a dve medzikružia M_1 a M_2 . Zásah do kruhu K znamená 10 bodov, zásah do medzikružia M_1 znamená 5 bodov a do M_2 znamená 0 bodov. Pravdepodobnosť zásahu kruhu K je 0,5, pravdepodobnosť zásahu medzikružia M_1 je 0,3 a pravdepodobnosť zásahu medzikružia M_2 je 0,2. Nech náhodná premenná X je rovná počtu získaných bodov pri 2 nezávislých výstreloch. Určte:

- zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);
- strednú hodnotu náhodnej premennej X ;
- pravdepodobnosti $P(X \leq 10)$, $P(5 < X \leq 15)$;
- Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej X .



zásah do K - 10 bodov, $P(K) = 0,5$

zásah do M_1 - 5 bodov, $P(M_1) = 0,3$

zásah do M_2 - 0 bodov, $P(M_2) = 0,2$

X - počet bodov pri 2 nezávis. výstreloch

$X_i = 0, 5, 10, 15, 20$ bodov

$$P(X=0) = 0,2^2 = 0,04 \rightarrow \frac{M_2}{M_2} \frac{M_2}{M_2} \rightarrow \text{prav. } 0,2 \cdot 0,2$$

$$P(X=5) = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,12 \rightarrow \left. \frac{M_1}{M_2} \frac{M_2}{M_1} \right\} \rightarrow \text{prav. } 0,3 \cdot 0,2 \cdot 2$$

$$P(X=10) = 0,3^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = 0,29$$

$$\frac{M_1}{M_1} \frac{M_1}{M_1} \rightarrow \text{prav. } 0,3 \cdot 0,3$$

$$\left. \frac{M_2}{K} \frac{K}{M_2} \right\} \rightarrow \text{pravdep. } 0,2 \cdot 0,5 \cdot 2$$

$$P(X=15) = 2 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = 0,3 \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{cc} \underline{M_1} & \underline{K} \\ \underline{K} & \underline{M_1} \end{array} \right\} \text{prav. } 0,3 \cdot 0,5 \cdot 2$$

$$P(X=20) = 0,5^2 = 0,25$$

$$\swarrow$$

$$\underline{K} \quad \underline{K} \quad \text{prav. } 0,5 \cdot 0,5$$

x_i	0	5	10	15	20
p_i	0,04	0,12	0,29	0,3	0,25

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot p_i = 12,12$$

$$P(X \leq 10) = P(X=0) + P(X=5) + P(X=10) = 0,45$$

$$P(5 < X \leq 15) = P(X=10) + P(X=15) = 0,59$$

$$F(x) = 0 \quad 0 < x$$

$$\rightarrow p_1 = 0,04 \quad 0 \leq x < 5$$

$$\rightarrow p_1 + p_2 = 0,16 \quad 5 \leq x < 10$$

$$\rightarrow p_1 + p_2 + p_3 = 0,45 \quad 10 \leq x < 15$$

$$\rightarrow 0,75 \quad 15 \leq x < 20$$

$$\rightarrow 1 \quad 20 \leq x$$

x_i	0	5	10	15	20
p_i	0,04	0,12	0,29	0,3	0,25
F_i	0,04	0,16	0,45	0,75	1

Rozdelenia pravdepodobnosti diskkrétnej náhodnej premennej

Binomické rozdelenie

vieme 20 zadanie
Dané $n \in \mathbb{N}$ a reálne číslo $p \in (0,1)$, náhodná veličina X má binomické rozdelenie s parametrami n a p *pravdepodobnosť gaur, vieme vypočítať*

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \text{ pre každé } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

označenie $X \sim \text{bino}(n; p)$

Stredná hodnota náhodnej premennej $E(X)$

$$E(X) = n \cdot p,$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = n \cdot p \cdot q$$

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej X

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \text{ kde } q = 1 - p$$

Hypergeometrické rozdelenie

Dané M množina objektov, K objektov má určitú vlastnosť, $M - K$ objektov túto vlastnosť nemá. Vyberieme bez vrátenia N objektov. Chceme vedieť pravdepodobnosť, že medzi vybranými má x objektov túto vlastnosť. Náhodná veličina X má **hypergeometrické rozdelenie** s parametrami M, K, N

dané v zadaní

M, K, N

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}}$$

označenie $X \sim \text{hyge}(M, K, N)$

Stredná hodnota náhodnej premennej $E(X)$

$$E(X) = N \cdot \frac{K}{M}$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = \frac{(M-N) \cdot N \cdot K}{(M-1) \cdot M} \left(1 - \frac{K}{M}\right)$$

Pr. 1:

Predpokladajme, že hádzame súčasne dvoma kockami. Vykonáme 3 hody. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme súčet 9.

- Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku pre náhodnú premennú X (hodnoty zapíšte v tvare zlomkov).
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X .
- Vypočítajte $P(0 < X \leq 2), P(X > E(X))$.
- Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej X .

i

dané: $N = 3$ hody

p - prav., že hodíme súčet 9 na 2 kockách
(vypočítame pomocou klasic. prav.)

$$p = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad m = \left\{ \begin{matrix} \frac{3}{6} & \frac{6}{3} & \frac{4}{5} & \frac{5}{4} \end{matrix} \right\} = 4$$

$$X \sim \text{bino}\left(3, \frac{1}{9}\right)$$

$$n = \frac{6}{1} \cdot \frac{6}{1} = 6^2 = 36$$

može padnúť číslo od 1-6

X - počet hodov, pri kt. hodíme súčet 9

$x_i = 0, 1, 2, 3$ hody

$$P(X=0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{9}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{9}\right)^3 = \frac{512}{729}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{9}\right)^1 \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{243}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^1 = \frac{8}{243}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left(\frac{8}{9}\right)^0 = \frac{1}{729}$$

X_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{512}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{1}{729}$

(ii) $E(X) = P \cdot N = \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3}$

$$D(X) = P \cdot N \cdot q = \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot \frac{8}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

Pr. 2:

V triede je 15 študentov, z ktorých jedna tretina študuje s vyznamenaním. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu vyznamenaných študentov medzi tromi náhodne vybranými študentmi. Určte:

- zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);
- pravdepodobnosť, že medzi tromi náhodne vybranými študentmi bol aspoň jeden vyznamenaný študent.
- strednú hodnotu náhodnej premennej X .
- distribučnú funkciu náhodnej premennej X .

i) dané: $M = 15$ študentov
 $K = \frac{1}{3}M = 5$ s vyznamenaním

$$N = 3$$

$$X \sim \text{hype}(15, 5, 3)$$

$$\frac{M - K}{N} = 10 \text{ s nemá vyznamenaním.}$$

X - počet vyznam. št. medzi 3 vybranými náhodne

$X_i = 0, 1, 2, 3$ vyz. študentov

$$P(X=0) = \frac{\binom{5}{0} \binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{120}{455}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{10}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{100}{455}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{225}{455}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{3} \binom{10}{0}}{\binom{15}{3}} = \frac{10}{455}$$

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{120}{455}$	$\frac{225}{455}$	$\frac{100}{455}$	$\frac{10}{455}$

ii)

аспоўн 1 вызначэнне $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ а таксама

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

алебо

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = \frac{335}{455}$$

iii)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p_i = 3 \cdot \frac{1}{15} = 1$$

Pr. 3: V súbore desiatich výrobkov je osem 1. kvality a dva nepodarky. Výberom bez vrátenia je náhodne vybraných 5 výrobkov. Určte:

- pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej X – počtu výrobkov 1. kvality vo výbere,
- číselné charakteristiky $E(X)$, $D(X)$ a $\sigma(X)$.

spolu: 10 výrobkov = M

8 - 1. kvality = K

2 - nepodarky

výber - 5 = N

$X \sim \text{hyper}(10, 8, 5)$

X - počet výrobkov 1. kvality vo výbere

$$x_i = 3, 4, 5 \quad P(X=3) = \frac{\binom{8}{3} \binom{2}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9}$$

$$P(X=4) = \frac{\binom{8}{4} \binom{2}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{9}$$

$$P(X=5) = \frac{\binom{8}{5} \binom{2}{0}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9}$$

$$E(X) = \frac{N K}{M} = \frac{5 \cdot 8}{10} = 4$$

$$D(X) = \frac{(M-N) N K}{(M-1) M} \left(1 - \frac{K}{N} \right) = \frac{(10-5) 5 \cdot 8}{(10-1) \cdot 10} \left(1 - \frac{8}{10} \right)$$

$$D(X) = \frac{4}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

K_i	3	4	5
p_i	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

Dú: Súbor príkladov na precvičenie 2/pravdepodobnosť: 33 – 35, 37 - 43