

NMPaMŠ – 11.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Poissonove rozdelenie

Poissonovo rozdelenie je rozdelenie diskkrétnej náhodnej premennej X , ktoré má nasledovné vlastnosti:

- Experiment pozostáva z počítania, koľkokrát jav nastane v danom intervale. Interval môže byť interval času, vzdialenosti, plochy, objemu. . .
- Pravdepodobnosť, že k javu dôjde, je rovnaká v ľubovoľnom intervale.
- Počet výskytov javu v jednom intervale je nezávislý na počte výskytov v iných intervaloch.
- Priemerný počet výskytov javu je priamo úmerný dĺžke intervalu.
- Priemerný počet výskytov javu v danom intervale je známy a rovná sa číslu λ .

Náhodná veličina X má **poissonovo rozdelenie s parametrom λ**

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \text{ pre každé } x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

označenie $X \sim \text{poiss}(\lambda)$

Stredná hodnota

$$E(X) = \lambda$$

Disperzia

$$D(X) = \lambda$$

Smerodajná odchýlka

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Pr. 1: Do predajne príde priemerne 90 zákazníkov za hodinu. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

- i. v priebehu 5 minút nepríde do predajne žiaden zákazník,
 - ii. v priebehu 3 minút prídu do predajne aspoň traja zákazníci,
 - iii. v priebehu 4 minút prídu do predajne najviac traja zákazníci.
- [i) $5,53 \cdot 10^{-4}$; ii) 0,82641; iii) 0,1512]

i) - do predajne príde priemerne 90 zákaz. za 1 hod.
dané: $\lambda = 5 \cdot \left(\frac{90}{60}\right) = \frac{15}{2}$
5 min

$$X \sim \text{poiss} \left(\frac{15}{2} \right)$$

žiadny zákazník $\Rightarrow X = 0$

$$P(X=0) = \frac{\left(\frac{15}{2}\right)^0 e^{-\frac{15}{2}}}{0!} = 5,53 \cdot 10^{-4}$$

ii) $\lambda = 3 \cdot \frac{90}{60} = \frac{9}{2}$ aspoň 3 zákaz. = 3 a viac

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$$

$$P(X=0) = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^0 \cdot e^{-\frac{9}{2}}}{0!} = 0,011109$$

2.Spojité náhodná premenná

Distribučná funkcia $F(x)$

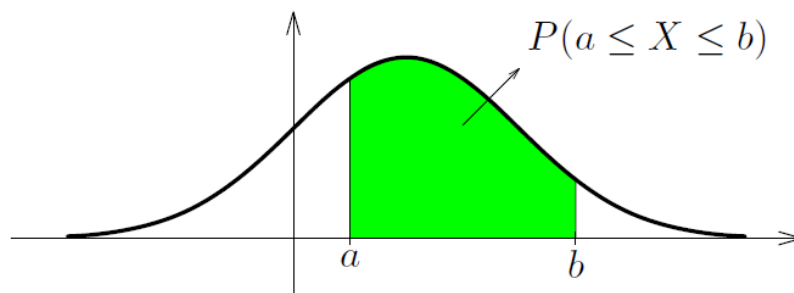
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt, x \in (-\infty, \infty)$$

Vlastnosti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

distribučná funkcia $F(x)$ je spojitá na celej množine reálnych čísel

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = \\ &= P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \end{aligned}$$



Graf hustoty pravdepodobnosti $f(x)$

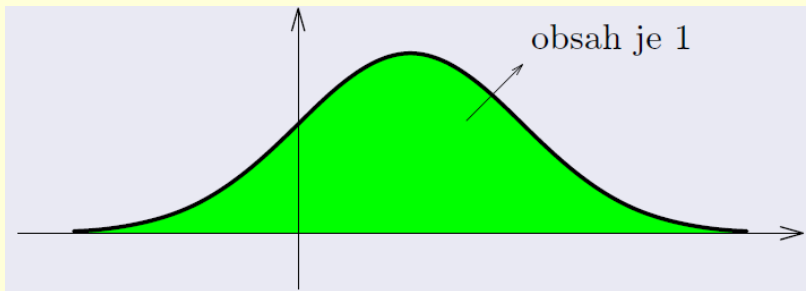
Hustota pravdepodobnosti $f(x)$

ak hodnota $f(x)$ existuje, tak $f(x) \geq 0$;

Vlastnosti:

ak existuje derivácia $F'(x)$, tak $F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

tzv., „normalizačná podmienka“: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$



Stredná hodnota náhodnej premennej $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx$$

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej X

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Analógia medzi rozdeleniami náhodnej premennej

Diskrétné rozdelenie – X nadobúda konkrétne hodnoty z $H(x)$

Spojité rozdelenie – X nadobúda všetky hodnoty z intervalu (ohraničeného alebo neohraničeného)

veličina	Diskrétné rozdelenie	Spojité rozdelenie
distribučná funkcia	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$
pravdepodobnosť / hustota pravdepodobnosti	$P(X = x_i) = p_i$ $\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$	$f(x)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
stredná hodnota	$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot p_i$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$
disperzia	$D(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n(\infty)} (x_i - E(X))^2 p_i$	$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx$
smerodajná odchýlka	$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Pr. 2:

(a) Nech $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq -1, \\ k \cdot (x+1) & \text{for } -1 < x < 2, \\ 0 & \text{for } x \geq 2. \end{cases}$

- Vypočítajte konštantu k tak, aby f bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X .
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X .
- Vypočítajte $P(-1 \leq X < 1)$.
- Nájdite predpis distribučnej funkcie.

i

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^2 k(x+1) dx + \int_2^{\infty} 0 dx = 0 + \left[k \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \right]_{-1}^2 + 0$$

$$4k + \frac{k}{2} = 1$$

$$9k = 2$$

$$k = \frac{2}{9}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{2}{9}(x+1) & -1 < x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

(ii)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{-1} x \cdot 0 dx + \int_{-1}^2 \frac{2}{9} (x+1) \cdot x dx + \int_2^{\infty} x \cdot 0 dx = \int_{-1}^2 \frac{2}{9} (x^2 + x) dx$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \right]_{-1}^2 = \frac{28}{27} - \frac{2}{54} = \frac{54}{54} = 1$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^2 (x - 1)^2 \frac{2}{9} (x+1) dx + \int_2^{\infty} 0 dx =$$

$$= \frac{2}{9} \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 1)(x+1) dx = \frac{2}{9} \int_{-1}^2 (x^3 - x^2 - x + 1) dx$$

$$= \frac{2}{9} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^2 = \frac{1}{2}$$

(iii)

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$P(-1 \leq x < 1) = \int_{-1}^1 \frac{2}{9} (x+1) dx = \left[\frac{2}{9} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \right]_{-1}^1 = \frac{4}{9}$$

(iv)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$x \leq -1 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2 & -1 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -1 < x \leq 2 \quad F(x) &= \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_{-1}^x \frac{2}{9} (t+1) dt = 0 + \frac{2}{9} \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_{-1}^x \\ &= \frac{2}{9} \left[\frac{x^2}{2} + x \right] - \frac{2}{9} \left[\frac{1}{2} - 1 \right] = \frac{1}{9} (x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{9} (x+1)^2 \end{aligned}$$

$$x > 2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_{-1}^2 \frac{2}{9} (t+1) dt + \int_2^x 0 dt = 1$$

Pr. 3:

(f) Daná je funkcia:
$$F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < 1, \\ b \cdot (x^2 - 1), & \text{ak } 1 \leq x \leq 3, \\ c, & \text{ak } x > 3. \end{cases}$$

- Stanovte parametre a , b tak, aby $F(x)$ bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X .
- Určte hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ náhodnej premennej X .
- Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej X .
- Vypočítajte pravdepodobnosť $P(0 \leq X < 2)$.

(i)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = 0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = 1}}$$

$$x = 1 \quad b(1 - 1) = 0 \\ b \cdot 0 = 0$$

$$x = 3 \quad b(9 - 1) = 1 \\ b = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{8}(x^2 - 1) & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$