

NMPaMŠ – 8.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pravdepodobnosť

Klasická pravdepodobnosť

Jav (A) - výsledok pokusu, ktorý je možné opakovať za určitých podmienok niekoľkokrát

Istý jav I , nemožný jav $\emptyset$.

Pravdepodobnosť javu A

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$P(A) = \frac{\text{počet všetkých možných priaznivých výsledkov javu } A}{\text{počet všetkých možných výsledkov pokusu}}$$

Pre istý a nemožný jav je $P(I) = 1$ a $P(\emptyset) = 0$.

Pre opačný jav platí $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Žiadny = znamená 0 a nie viac

Najviac 3 = znamená 0, 1, 2, 3 a nie viac

Aspoň 2 = znamená dva a viac

Najmenej 5 = znamená 5 a viac

Pr. 3: Máme 10 vstupeniek po 200 eur, 3 vstupenky po 300 eur a 2 vstupenky po 500 eur. Určte pravdepodobnosť, že aspoň dve z týchto vstupeniek budú mať rovnakú cenu?

Pr. 4: Zo sady 32 kariet vyberieme náhodne 5 kariet. Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi nimi budú aspoň tri karty s rovnakým znakom?

n - výber 5 kariet z 32 kariet (8 kariet $\times$ 4 farby)

A - vo výbere 5 kariet budú aspoň 3 rovnakej farby
(3 a viac = 3 a 4 a 5)

$$m = \left[\underbrace{\binom{8}{3} \binom{24}{2}}_{\substack{3 \text{ karty} \\ \text{rovnakej} \\ \text{farby}}} + \underbrace{\binom{8}{4} \binom{24}{1}}_{\substack{4 \text{ karty} \\ \text{rovnakej} \\ \text{farby}}} + \underbrace{\binom{8}{5} \binom{24}{0}}_{5 \text{ kariet}} \right] \cdot 4 \text{ rôzne farby}$$

$$m = 68768$$

$$n = C(32, 5) = \frac{32!}{5! 27!} = 201376$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{68768}{201376}$$

$$P(A) = 0,3415$$

Pr. 5: V krabici je 7 bielych a 7 čiernych guľôčok. Určte pravdepodobnosť, že medzi šiestimi náhodne vybranými guľôčkami bude práve $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ bielych guľôčok.

biele guľôčky: 7 ks
 čierne guľôčky: 7 ks
 Spolu : 14 ks

A_k – medzi 6 náhodne vybranými je $k = 0 - 6$ bielych guľôčok

náhodný výber: 6

$$P(A_k) = \frac{m_k}{n} = \frac{\binom{7}{k} \binom{7}{6-k}}{\binom{14}{6}}$$

všetky možnosti výberu nezávislé na farbe - vyberáme 6 guľôčok zo všetkých 14 nezáleží na poradí, kombinácie $C(14, 6)$

výber k - bielych guľôčok medzi 6 náhodne vybranými

výber zvyšnej guľôčky vo výbere 6, ktorá nie je biela

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(A_k)$	0,0023	0,049	0,2448	0,4079	0,2448	0,049	0,0023

Pravdepodobnosť

Podmienená pravdepodobnosť

Pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B (ak nastal jav B, potom pre jav A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pravdepodobnosť javu B za predpokladu, že nastal jav A (ak nastal jav A, potom pre jav B)

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Vlastnosti pravdepodobnosti

*Pre disjunktné javy: ak $A \cap B = \emptyset$, tak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
pre ľubovoľné javy A, B je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;*

Veta o úplnej pravdepodobnosti

Nech $H_1, H_2, \dots, H_n$ sú hypotézy (t. j. úplný systém disjunktných javov). Potom pre ľubovoľný jav A platí

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \dots + P(A|H_n) \cdot P(H_n) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i) \cdot P(H_i).$$

Bayesov vzorec

Nech javy $H_1, H_2, \dots, H_n$ sú hypotézy a $A \in \tau$ je ľubovoľný jav, pre ktorý je $P(A) \neq 0$. Potom pre každú hypotézu H_k je

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Okrem toho platí $\sum_{i=1}^n P(H_i|A) = 1$.

Pr. 1: Školský prieskum zistil, že 7 z 30 študentov chodí do školy pešo. Náhodne vyberieme postupne štyroch študentov. Aká je pravdepodobnosť, že prvý a druhý vybraný študent chodí do školy pešo, ale tretí a štvrtý nechodí do školy pešo?

Pr. 2: Pravdepodobnosť toho, že ženatý muž pravidelne sporí je 0,6, pravdepodobnosť toho, že vydatá žena pravidelne sporí je 0,5 a pravdepodobnosť toho, že vydatá žena pravidelne sporí, ak pravidelne sporí jej muž, je 0,4. Určte pravdepodobnosť toho, že:

- a) obaja pravidelne sporia,
- b) pravidelne sporí ženatý muž, ak pravidelne sporí jeho žena,
- c) aspoň jeden z manželov pravidelne sporí.

A – ženatý muž pravidelne sporí, $P(A) = 0,6$

B – vydatá žena pravidelne sporí, $P(B) = 0,5$

$B \setminus A$ – vydatá žena pravidelne sporí, ak pravidelne sporí jej muž, $P(B / A) = 0,4$

a) $P(A \cap B)$ - ?

b) $P(A \setminus B)$ - ?

c) $P(A \cup B)$ - ?

$$a) P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B \setminus A) \cdot P(A) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$$

$$b) P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,24}{0,5} = 0,48$$

$$c) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,24 = 0,86$$

Pr. 3: Pravdepodobnosť určitého ochorenia je 5%. Test na určenie prítomnosti ochorenia má spoľahlivosť 83%. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná testovaná osoba má pozitívny výsledok testu?