

NMPaMŠ – 9.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pravdepodobnosť

Podmienená pravdepodobnosť

Pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B (ak nastal jav B, potom pre jav A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pravdepodobnosť javu B za predpokladu, že nastal jav A (ak nastal jav A, potom pre jav B)

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Vlastnosti pravdepodobnosti

*Pre disjunktné javy: ak $A \cap B = \emptyset$, tak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
pre ľubovoľné javy A, B je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;*

Veta o úplnej pravdepodobnosti

Nech $H_1, H_2, \dots, H_n$ sú hypotézy (t. j. úplný systém disjunktných javov). Potom pre ľubovoľný jav A platí

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \dots + P(A|H_n) \cdot P(H_n) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i) \cdot P(H_i).$$

Bayesov vzorec

Nech javy $H_1, H_2, \dots, H_n$ sú hypotézy a $A \in \tau$ je ľubovoľný jav, pre ktorý je $P(A) \neq 0$. Potom pre každú hypotézu H_k je

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Okrem toho platí $\sum_{i=1}^n P(H_i|A) = 1$.

Pr. 1: Pravdepodobnosť určitého ochorenia je 5%. Test na určenie prítomnosti ochorenia má spoľahlivosť 83%. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná testovaná osoba má pozitívny výsledok testu?

Pr. 2: Dvaja robotníci vyrábajú tie isté výrobky, pričom prvý vyrobí dvakrát viac výrobkov ako druhý za rovnakú dobu. Pravdepodobnosť vyrobenia nepodarku je u 1. robotníka 0,02 a u 2. robotníka 0,01. Zo skladu, kde sú uložené všetky výrobky, náhodne vyberieme jeden výrobok.

- a) Aká je pravdepodobnosť, že daný výrobok nebude nepodarok?
- b) Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný výrobok bol vyrobený prvým robotníkom, ak bol nepodarok?

Pr. 3: Z krabice, ktorá obsahuje 6 čiernych a 9 bielych gulí, náhodne vyberieme jednu guľu. Potom ju vrátime spať a pridáme ešte 5 gulí tej istej farby, akej bola vytiahnutá guľa.

a) Aká je pravdepodobnosť toho, že v druhom ťahu vytiahneme z krabice bielu guľu?

b) Aká je pravdepodobnosť, že v prvom ťahu sme vytiahli čiernu guľu, ak v druhom ťahu vytiahneme z krabice bielu guľu?

Pr. 6: V triede je 60% dievčat. Z nich 70% je nižších ako 170 cm. Z chlapcov je nižších ako 170 cm len 30%.

a) Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný žiak je nižší ako 170 cm.

b) Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný žiak je chlapec, ak je nižší ako 170 cm.

A – náhodne vybraný žiak je nižší ako 170 cm

H_1 – žiak je dievča

H_2 – žiak je chlapec

A / H_1 – náhodne vybraný žiak je nižší ako 170 cm, ak je dievča

A / H_2 – náhodne vybraný žiak je nižší ako 170 cm, ak je chlapec

a) $P(A)$ - ?

b) $P(H_2 / A)$ - ?

$$a) P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)$$

$$P(H_1) = 0,6, \quad P(H_2) = 0,4$$

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,54$$

$$P(A / H_1) = 0,7, \quad P(A / H_2) = 0,3$$

$$b) P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)}$$

$$P(H_2/A) = \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,54} = 0,222$$

Pravdepodobnosť

Opakované nezávislé pokusy

Nezávislý pokus – výsledkom pokusu je jav A, ktorý opakujeme n - krát, pričom tieto pokusy sú navzájom nezávislé, výsledok jedného nezávisí od výsledku druhého, pravdepodobnosť javu A je pre všetky pokusy rovnaká

Bernoulliho veta

A - jav, **p** je jeho **pravdepodobnosť** pri danom pokuse,

k – počet nastatí javu A pri danom pokuse,

n – počet nezávislých opakovaní pokusu

$P_{n,p}(k)$ je pravdepodobnosť toho, že pri **n** – násobnom nezávislom opakovaní daného pokusu nastane jav A práve **k**-krát

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \text{pre } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

- Pr. 1:** Predpokladajme, že hádžeme súčasné dvomi mincami. Minca má dve strany – hlava a znak. Vykonáme štyri hody. Aká je pravdepodobnosť, že
- a) pri dvoch hodoch zo štyroch hodíme dve hlavy;
 - b) aspoň (najmenej) pri jednom hode zo štyroch hodíme dve hlavy.

Pr. 2: Pravdepodobnosť toho, že basketbalista trafi do koša je 0,7. Určte pravdepodobnosť toho, že basketbalista pri šiestich nezávislých hodocho:

- a) práve dvakrát trafi do koša;
- b) aspoň dvakrát trafi do koša.

a) A – basketbalista trafi do koša

$$p(A) = 0,7$$

$$n = 6$$

$$k = 2 \text{ (práve dvakrát trafi)}$$

$$P_{6,0,7}(2) = \binom{6}{2} 0,7^2 \cdot 0,3^4 = 0,0595$$

b) A – basketbalista trafi do koša

$$p(A) = 0,7$$

$$n = 6$$

$$k \geq 2 \text{ (aspoň dvakrát trafi, } k = 2 - 6)$$

B – basketbalista trafi kôš aspoň dvakrát pri 6 nezávislých hodocho

$\bar{B}$ – basketbalista trafi kôš najviac jedenkrát pri 6 nezávislých hodocho, $k < 2$ ($k = 0, 1$)

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (P_{6,0,7}(0) + P_{6,0,7}(1))$$

$$P(B) = 1 - \left(\binom{6}{0} 0,7^0 \cdot 0,3^6 + \binom{6}{1} 0,7^1 \cdot 0,3^5 \right) = 0,9891$$

Dú: Súbor príkladov na precvičenie 2 /pravdepodobnosť: 19 – 24, 27 - 30